Les Cahiers des Mathématiques

4è année secondaire

Maths

Section sciences techniques

Analyse

Résumé de cours
Exercices et problèmes
Solutions détaillées

Kounouz Editions

Salima Fakhfakh Maalej - Mohamed Salah Maalej

Maths

4ème

Section Sciences Techniques

ANALYSE

- *Résumés de cours*
- *Exercices et problèmes*
- *Solutions détaillées*

Salima Fakhfakh Maalej
Professeur principal

Mohamed Salah Maalej
Enseignant à l'université

Kounouz Editions

Sommaire

Chapitre I

Continuité et Limites

I) **Limites** :

■ Théorèmes de comparaison :

α un réel fini ou infini, ℓ et ℓ' deux réels.

a) Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ et $f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.

b) Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$ et $f(x) \geq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

c) Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\leftarrow\alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

d) Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ et $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \ell$.

e) Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \ell'$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ et $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$.

■ Limites d'une composée:

α et β désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$,

λ désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{y\to\beta} g(y) = \lambda$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \lambda$.

■ Asymptotes :

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) avec ℓ (fini).

Alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ avec (a fini) alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à la courbe de f.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $x \to -\infty$) alors la droite d'équation $y = ax + b$, est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

II) **Continuité** :

■ Définition : (Soit $x_0 \in D$; D est le domaine de définition de f).

• f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{X\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

• f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

■ Théorème: Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$

Avec m la plus petite valeur prise par $f(x)$ sur $[a,b]$ et M la plus grande valeur prise par $f(x)$ sur $[a,b]$.

■ Théorèmes : (Image d'un intervalle par une fonction continue).

I	f continue et strictement croissante alors $f(I) =$	f continue et strictement décroissante alors $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f(x),f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f(x),\lim\limits_{b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f(x),\lim\limits_{a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f(x),f(a)\right]$	$\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f(x)\right[$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f(x),\lim\limits_{+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f(x),\lim\limits_{a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{-\infty} f(x),\lim\limits_{+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f(x),\lim\limits_{-\infty} f(x)\right[$

■ Théorème des valeurs intermédiaires :

- Si f est continue sur $[a,b]$ alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \lambda$.
- Conséquences :

Si f continue sur $[a,b]$ et $f(a)\cdot f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque : Si f est strictement monotone alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une seule solution.

■ Composée de deux fonctions continues :

- Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.
- Si f est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.
- Conséquences :

Si f est continue sur I et pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$

Alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Déterminer la limite d'une fonction f en a réel ou infini.	On peut essayer dans l'ordre. * on utilise les règles opératoires relatives au somme, produit, quotient, ou théorème des fonctions composées ou théorème polynôme ou rationnelles à l'infini ou les limites isuelles trigonométrique * Si on a toujours une forme indéterminée on cherche à transformer l'écriture de f en factorisant et en simplifiant. * S'il y a des racines carrées on peut utiliser l'expression conjuguée. * Si on a la forme $\frac{0}{0}$ on peut utiliser le nombre dérivé. * On utilise les théorèmes de comparaisons.
Justifier q'une équation f(x) = k admet au moins une solution sur [a, b]	On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaire. Si f est strictement monotone la solution est unique
Dénombrer les solutions d'une équation f(x) = k.	Dans certain cas particulier on peut résoudre (second degrés)

ENONCES

1 1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x}{x^6-1}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2x-6}$. b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

3 Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\sqrt{4x^2-x+1}$.

Déterminer : a) $\lim\limits_{+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{-\infty}g(x)$. b) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$. c) $\lim\limits_{+\infty}g(x)-2x$.

4 Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

5 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{+\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$ c) $\lim\limits_{0}\cos\left(\dfrac{\pi-x}{2+x}\right)$

d) $\lim\limits_{+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x-1}{x+2}\right)$ e) $\lim\limits_{0}\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

6 1) Démontrer que $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

3) Déterminer un réel positif A tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
si $x\geq A$ alors $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq 10^{-3}$.

7 1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, si $x\geq 1$, alors : $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{x+1}\leq 1$.

2) En utilisant les théorèmes de comparaison, en déduire que :

a) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$; b) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

8 Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur $[1,+\infty[$ et vérifiant $1-x^2 \le x^2\varphi(x) \le 2-x^2$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{[\varphi(x)]^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

9 1) Trouver deux réels m et M tels que : $m \le \dfrac{1}{3-\sin x} \le M$.

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3-\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{3-\sin x}$

10 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$ avec a et b, deux réels.

1) Déterminer les valeurs de a et b, pour que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 7$.

2) Pour les valeurs de a et b, trouver :
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{IR} - \{1, 2\}$; $f(x) = x^2 + x + 1$
   b) Retrouver alors la limite de f en 1 et en 2.
   c) Peut on prolonger f par continuité?

11 Indiquer la bonne réponse sans justification :

1) $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0,4]$.
   $f(x) = \lambda$ si $x \in]4,8]$
   f est continue sur [0,8] lorsque λ est
   [a] égale à 4   [b] égale à 2   [c] égale à 0

2) L'équation $x^5 + 2x - 7 = 0$ admet
   [a] une unique solution dans IR   [b] deux solutions exactement dans IR
   [c] Trois solutions distinctes

3) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ si $x > 1$
   $f(x) = x - 1$ si $x \le 1$ alors
   [a] f est prolongeable par continuité en 1
   [b] f n'est prolongeable par continuité en 1
   [c] $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$.

12 Vrai – Faux

Justifier votre réponse.

1) Soit f une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ tel que $f(0) = 2$
   a) Si f est continue sur $[0,1]$, alors pour tout réel k l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[0,1]$.
   b) Si $f(1) < 0$ alors $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0,1]$
   c) Si f est continue sur $[0,1]$ alors l'équation $f(x) = 0$ peut avoir deux solutions $[0,1]$
   d) Si f est dérivable sur $[0,1]$ et $f(1) = -2$ alors il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$
2) Soit g un fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$	-2	0		1	2	4	$+\infty$
g(x)	1 ↘	0 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	$+\infty$

   a) L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution
   b) L'équation $f(x) = - 3$ admet une unique solution
   c) L'image de $]0,4]$ est $[0,+\infty[$
   d) Le signe de f est :

x	$-\infty$		2		0		1		4		$+\infty$
f(x)		+	0	-	‖	+	0	-	0	+	

13

Soit ; $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - \cos x}$

1) Montrer que pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[$;

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x + 1} \le f(x) \le \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{x - 1}$$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

14

f est la fonction définie sur $D = [-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

a) Montrer que pour tout x de D, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$

b) Etudier la limite de f en 0.

c) La fonction f est telle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui défini ce prolongement.

15 Déterminer dans chaque cas le domaine de continuité des fonctions $h = f \circ g$ et $k = g \circ f$.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sin x$

16 Soit la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$.

1) Déterminer le domaine de continuité de f.

2) Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

3) Soit la fonction $g(x) = \text{cotg}\ (\pi f(x))$.

a) Etudier la continuité de g sur $]1, +\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

17 f la fonction définie sur IR^* par $f(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}$

a) Etudier la continuité de f en 0

b) Peut-on prolonger f par continuité en 0.

18 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer $f([2, 3])$; $f(]1, 4])$; $f(]-\infty, 1[)$.

19 Soit f la fonction numérique de la variable x définie par $f(x) = 4x^3 - 3x + \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer $f(-1)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(1)$

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines distinctes dans $]-1, 1[$ et encadrer chacune de ces racines dans un intervalle.

2) Calculer $\sin 3t$ en fonction de $\sin t$.

En posons $x = \sin t$ dans l'équation $f(x) = 0$, déduire les racines de cette Equation sous forme trigonométrique.

20 On considère $f(x) = x\,(x^3 - 6x + 1)$ définie sur IR.

1) Déterminer la fonction f' puis f''

2) Démontrer que l'équation $4x^3 - 12x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions.

En donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

3) En déduire le signe de la fonction f' puis le tableau de variation de f.
4) Conclure le nombre de solution de l'équation $x(x^3 - 6x + 1) = -1$

21 Soit la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x+3}$

1) Déterminer le tableau de variation de f.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 1$ et $f(x) = 3$ admettent chacune une seule solution.
   On donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre m pour les quelles l'équation $x\sqrt{x+3} + m\sqrt{m+3} = 1$ admet une unique solution réelle.

CORRIGES

1 1) a) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ au voisinage de 2, $f(x)$ se présente sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

On peut écrire $f(x)=\dfrac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}$

$$f(x)=\frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(\sqrt{x+2}+x)}=\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}.$$

Soit $f(x)=\dfrac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(\sqrt{x+2}+x)}$

$\lim\limits_{x\to2}(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)=3\times6=18$ et $\lim\limits_{x\to2}4(\sqrt{x+2}+x)=16$.

Alors $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\dfrac{18}{16}=\dfrac{9}{8}$.

b) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$ au voisinage de $-\infty$, $f(x)$ se présente sous la forme indéterminée $+\infty-\infty$.

On peut écrire $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}$

soit $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}$

pour $x\neq0$

pour $x<0$ on a $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ d'où pour tout $x<0$,

$$f(x)=\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=2$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}-x}{x^6-1}$

Pour tout $x > 0$ on a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}-x}{x^6-1} = \dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{1}{x}\right)}{x^6\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right)}$

d'où $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{1}{x}}{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

d'où $f(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1 = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2 a) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2x-6}$, au voisinage de 3, f(x) se présente sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On peut écrire $f(x) = \dfrac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$

$f(x) = \dfrac{-(x-3)}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})} = \dfrac{-1}{2(2+\sqrt{x+1})}$.

Lorsque x tend vers 3, cette expression a pour limite $\frac{-1}{8}$.

b) $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, au voisinage de 2, g(x) se présente sous la forme

Indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut écrire :

$$g(x)=\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

D'où $\lim\limits_{2} g(x)=\lim\limits_{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$.

3 a) * $\lim\limits_{-\infty} 4x^2-x+1=\lim\limits_{-\infty} 4x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{-\infty} g(x)=+\infty$.

* De même en $+\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g(x)=+\infty$.

b) $g(x)=\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Pour x > 0, $\frac{g(x)}{x}=\frac{x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{+\infty} 4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$ donc $\lim\limits_{+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$

Pour tout x < 0 ; $\frac{g(x)}{x}=-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ d'où $\lim\limits_{-\infty}\frac{g(x)}{x}=-2$.

c) $g(x)-2x=\sqrt{4x^2-x+1}-2x$, en $+\infty$ cette expression se présente sous la forme indéterminée $+\infty-\infty$.

$$g(x)-2x=\frac{\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-x+1}+2x\right)}=\frac{4x^2-x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}$$

$$=\frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x}=\frac{x(-1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$$ or $x>0$ donc $|x|=x$.

D'où $g(x) -2x = \dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}$.

Le numérateur tend vers -1, le dénominateur tend vers 4

D'où $\lim\limits_{+\infty} g(x)-2x=-\dfrac{1}{4}$.

4 a) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

Alors $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$

D'où la courbe de f admet une asymptote d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})\sin\big(f(x)\big)$

$=\lim\limits_{+\infty} f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})\cdot\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$

$=\lim\limits_{+\infty} 2\cdot\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

5 a) $x^2\,\textit{sin}\,\dfrac{1}{x}$ *se présente* au voisinage de $+\infty$ sous la forme indéterminée $\infty\times0$, car $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Mais on a : $x^2\sin(\dfrac{1}{x})=x.\dfrac{\sin(\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{0}\dfrac{\sin3x}{x}-\dfrac{\sin x}{x}=3-1=2$.

c) $\lim\limits_{0}\dfrac{\pi-x}{2+x}=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ donc $\lim\limits_{0}\cos\left(\dfrac{\pi-x}{2+x}\right)=0$.

d) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\pi x - 1}{x+2}=\pi$ et $\lim\limits_{x\to\pi}\sin x = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x - x}{x+2}\right)=0.$

e) On a : $-1\leq\cos\dfrac{1}{x}\leq 1$, on multiple par un réel positif $\sqrt{x}$.

D'où $-\sqrt{x}\leq\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}\leq\sqrt{x}$ comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{0}-\sqrt{x}=0$

Donc $\lim\limits_{0}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}=0.$

f) On a : $-1\leq\sin x\leq 1$ donc en multipliant par un réel positif $\dfrac{1}{x}$.

On a : $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ comme $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

6 1) Pour $x\geq 0$, $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Pour $x>0$ on a $x+1\geq x$ donc $\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x}$.

Par suite $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On a : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\geq 0$ donc $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

On a donc prouvé que $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2) On sait que pour tout $x>0$ on a $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Et $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$ donc $\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$.

3) Pour que $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq 10^{-3}$ il suffit que $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leq 10^{-3}$

Pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leq 10^{-3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\geq 10^{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}\geq 500$

ou encore $x\geq 250000$.

Si $x\geq 250000$ alors $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|\leq 10^{-3}$.

7 1) Il suffit de calculer :

$$\frac{x}{x+1}-1=\frac{-1}{x+1} \text{ et } \frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2(x+1)}$$

• Si $x \geq 1$ alors $x+1>0$ donc $\frac{-1}{x+1}<0$ on en déduit que $\frac{x}{x+1} \leq 1$

• Si $x \geq 1$ alors $x-1 \geq 0$ et $x+1>0$ d'où $\frac{x-1}{2(x+1)}>0$

on en déduit que $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1, \forall x \geq 1$

2) a) Pour $x \geq 1$ on a $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$ et $\sqrt{x}>0$

d'où $\frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \leq \sqrt{x}$

à l'aide de l'inégalité $\frac{\sqrt{x}}{2} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et de $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$

on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}=+\infty$.

b) Puisque on a $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$ et $\sqrt{x}>0$

Alors $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}=0$.

8 • $1-x^2 \leq x^2 \varphi(x) \leq 2-x^2$ or $x^2>0$.

d'où $\frac{1}{x^2}-1 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{x^2}-1$

et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2}-1=-1=\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{x^2}-1$ donc $\lim\limits_{+\infty} \varphi(x)=-1$

• $\lim\limits_{+\infty} \varphi(x)=-1$

Si n est paire alors $\lim\limits_{+\infty} [\varphi(x)]^n=1$ d'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{[\varphi(x)]^n}=2$

Si n est impaire alors $\lim\limits_{+\infty} [\varphi(x)]^n=-1$ d'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{[\varphi(x)]^n}=-2$

9 1) On sait que $-1 \le \sin x \le 1$ ou encore $-1 \le -\sin x \le 1$, en ajoutant 3 on obtient : $2 \le 3-\sin x \le 4$ donc $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3-\sin x} \ge \frac{1}{4}$.

On choisit $m = \frac{1}{4}$ et $M = \frac{1}{2}$.

2) • On a : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\sin x} \le \frac{1}{2}$ en multipliant par $x > 0$

d'où $\frac{x}{4} < \frac{x}{3-\sin x} \le \frac{x}{2}$ comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{x}{3-\sin x} = +\infty$

• On sait que $-1 \le \sin x \le 1$

D'où $x-1 \le \sin x + x \le x+1$

Quand x tend vers $+\infty$ alors $x-1>0$ et $x+1>0$

$x-1 \le \sin x + x \le x+1$ et $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\sin x} \le \frac{1}{2}$.

Tous les membres sont positifs, on multiplie alors membre à membre,

On obtient : $\frac{x-1}{4} \le \frac{\sin x + x}{3-\sin x} \le \frac{x+1}{2}$.

Comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{x-1}{4} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sin x + x}{3-\sin x} = +\infty$.

10 1) * $\lim\limits_{x\to 1} x^4\text{-}2x^3\text{+}ax\text{+}b\text{=}a\text{+}b\text{-}1$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x\text{-}1)(x\text{-}2)\text{=}0$

alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ est finie que lorsque $a+b-1 = 0$, soit $a = 1-b$.

* $\lim\limits_{x\to 2} x^4\text{-}2x^3\text{+}ax\text{+}b\text{=}2a\text{+}b$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x\text{-}1)(x\text{-}2) = 0$

alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est finie que lorsque $2a+b = 0$

or $a=1-b$ d'où $2-2b+b=0$ ou encore $b = 2$ et $a = -1$.

2) a) $f(x)=\frac{x^4\text{-}2x^3\text{-}x\text{+}2}{(x\text{-}1)(x\text{-}2)}$.

On remarque que : $1^4\text{-} 2.1^3\text{-} 1 + 2 = 0$ et $2^4\text{-} 2.2^3\text{-}2 + 2 = 0$

Donc 1 et 2 sont des racines de $x^4\text{-}2x^3\text{-}x + 2$.

$x^4\text{-} 2x^3\text{-} x + 2 = (x - 1)(x - 2)(cx^2 + d\,x + e)$

$= (x^2\text{-} 3x + 2)\,(cx^2 + d\,x + e)$

$= cx^4 + (d - 3c)\,x^3 + (e + 2c - 3d)\,x^2 + (-3e + 2d)\,x + 2e.$

Par indentification, on obtient :

$c=1$ et $d-3c=-2$ et $e+2c-3d=0$ et $-3e+2d=-1$ et $2e=2$

$\Leftrightarrow c=1$ et $e=1$ et $d=1$

Par suite, $f(x)=\frac{(x\text{-}1)(x\text{-}2)(x^2\text{+}x\text{+}1)}{(x\text{-}1)(x\text{-}2)}= x^2\text{+}x\text{+}1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f = \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2+x+1=7$

f est une fonction rationnelle donc continue sur $D_f = IR-\{1,2\}$

comme $\lim\limits_{x\to 1} f = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} f = 7$

Alors on peut prolonger f par continuité il suffit de choisir la fonction g

Définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in IR_{-}\{1,2\} \\ g(1) = 3 \\ g(2) = 7 \end{cases}$

11 1) La réponse est $\boxed{b}$ 2) La réponse est $\boxed{a}$ 3) La réponse est $\boxed{b}$

12 1) a) Faux : f strictement décroissante sur [0, 1] et f(0) = 2 donc $f(x) \le 2$
Si k = 3 alors f(x) = 3 n'admet pas de solution.

b) Faux : f(1) < 0 et f(0) = 2 > 0 et f est strictement décroissante mais f n'est pas continue alors f(x) = 0 peut ne pas avoir des solutions.

c) Faux : f est continue et croissante donc f(x) = 0 admet au plus une solution.

d) Vrai : Si f est dérivable sur [0, 1] alors f est continue sur [0, 1]
$f(0) \times f(1) = -2 \times 2 < 0$ et f strictement décroissante.
donc il existe un seul $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

2) a) Faux : f(x) = 1 a deux solution l'une dans]0, 2] et l'autre dans [2, +∞[

b) Faux : f(x) = -3 a deux solution l'une est 2 et l'autre dans]-2, 0]

c) Faux : $f(]0, 4]) = [-3, +\infty[\neq [0, +\infty[$

d) Vrai : car $x \le -2$ on a f est croissante alors $f(x) \ge f(-2) = 0$ donc $f(x) \ge 0$ de même pour ces autre intervalles.

13 1)• On a : $\forall x \in IR$, $-1 \le \cos x \le 1$ ou encore $-1 \le -\cos x \le 1$
d'où $x-1 \le x - \cos x \le x+1$

Pour $x > 1$ on a $x-1>0$, $x-\cos x > 0$ et $x+1>0$

donc $\dfrac{1}{x+1} \le \dfrac{1}{x-\cos x} \le \dfrac{1}{x-1}$

• $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

pour $x>1$ alors $(x-1)^2+1>1$ d'où $\sqrt{x^2-2x+2}>1$

par suite $\sqrt{x^2-2x+2}-1>0$

donc $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1} \le \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-\cos x} \le \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}$

On en déduit que $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}$ (1)

$$2)\ \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}{x+1} \quad \text{or } x>0$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{et } \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

et on a (1) d'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$.

14 a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$= \frac{\sqrt{1+x}^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ alors f est prolongeable par continuité en 0 il suffit de choisir

g définie sur $[-1,+\infty[$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

15 a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ et $Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ telque } 4-x^2 \ge 0\} = [-2,2]$

$g(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ et $Dg = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- $x \longmapsto 4-x^2$ continue et positive sur $[-2,2]$ donc f est continue sur $[-2,2]$.
- g est rationnelle donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

soit D le domaine de continuité de h est l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ tel que $g(x) \in [-2,2]$.

$g(x) \in [-2,2] \Leftrightarrow -2 \leq \dfrac{x+1}{x-3} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-3} \leq 2$ et $-2 \leq \dfrac{x+1}{x-3}$

ou encore $\dfrac{x+1}{x-3} - 2 \leq 0$ et $0 \leq \dfrac{x+1}{x-3} + 2$

équivaut à $\dfrac{-x+7}{x-3} \leq 0$ et $\dfrac{3x-5}{x-3} \geq 0$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$		3		7	$+\infty$
$-x+7$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x-5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{-x+7}{x-3}$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$\dfrac{3x-5}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		$+$

d'où $D = \left]-\infty, \dfrac{5}{3}\right] \cup [7, +\infty[$

soit D' le domaine de continuité de k c'est l'ensemble des $x \in [-2,2]$ tel que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 3 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = -5$ impossible

donc $f(x) \neq 3$.

On en déduit que $D' = [-2,2]$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$

$g(x) = \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D le domaine de continuité de h c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \in [0, +\infty[$.

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

d'où $D = \bigcup\limits_{k \in Z} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$

D' le domaine de continuité de k c'est l'ensemble des $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$.

d'où $D' = [0, +\infty[$.

16 1) $x \longmapsto x^2-1$ et continue et positif sur $[1,+\infty[$

donc $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$

$x \longmapsto \dfrac{1}{2x}$ rationnelle continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[1,+\infty[$

on en déduit que f est continue sur $[1,+\infty[$.

2) Pour $x>1$ on a $2x>0$ et $\sqrt{x^2-1}>0$ d'où $f(x)>0$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{2x}=\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{2x(\sqrt{x^2-1}+x)}=\frac{-1}{2x(\sqrt{x^2-1}+x)}<0$$

car : pour $x>1$ on a $2x>0$ et $\sqrt{x^2-1}+x>0$.

On en déduit que $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x}\leq\dfrac{1}{2}$

3) $x \longmapsto \cot gx$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi; k\in Z\}$.

f est continue sur $[1,+\infty[$ et $\pi f(x)\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in Z\}$.

Comme $0<f(x)\leq\dfrac{1}{2}$ alors $0<\pi f(x)\leq\dfrac{\pi}{2}$

d'où $\forall x\in]1,+\infty[$ on a $\pi f(x)\neq k\pi$, $k\in Z$

On en déduit que g est continue sur $]1,+\infty[$.

4) $\lim\limits_{1^+} f(x)=0^+$ alors $\lim\limits_{x\to0^+}\cot g(\pi x)=+\infty$.

car $\lim\limits_{0^+}\cos\pi x=1$ et $\lim\limits_{0^+}\sin\pi x=0^+$ d'où $\lim\limits_{1^+} g(x)=+\infty$

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\lim_{\left(\frac{1}{2}\right)}\text{cotg}\,(\pi x)=0$$

d'où $\lim\limits_{+\infty} g(x)=0$.

17 a) On a : $\sqrt{9x^2}=3|x|$

$f(x)=2x+\dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}=2x+\dfrac{3|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x + \frac{3x}{x} \text{(car } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} 2x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x + \frac{-3x}{x} \quad \text{(car } x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x)$$

$= \lim_{x\to 0^-} 2x - 3 = -3$ donc $\lim_{x\to 0^+} f \neq \lim_{x\to 0^-} f$

d'ou f n'a pas de limite en 0 par suite f n'est pas continue en 0.

b) On ne peut pas prolonger f par continuité car $\lim_{x\to 0} f$ n'existe pas.

18 1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

f est une fonction rationnelle donc continue dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0;$$

$\lim_{-\infty} f(x) = 2 = \lim_{+\infty} f(x)$; $\lim_{1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{1^-} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)	0	-	‖	-	
f(x)	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

2) * f est continue strictement décroissante sur [2, 3] et]1, 4] et]-∞, 1[.

Donc f([2, 3]) = [f(3), f(2)] et f(]1, 4]) = [f(4), $\lim_{1^-} f(x)$[

or $f(3) = \frac{7}{2}; f(2) = 5; f(4) = 3; \lim_{1^-} f(x) = +\infty; f([2,3]) = [\frac{7}{2}, 5]$ et f(]1,4]) = [3,+∞[.

* $f(]-\infty, 1[) =]\lim_{1^-} f(x), \lim_{-\infty} f(x)[=]-\infty, 2[$.

19 1) $f(-1) = -\frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{3}{2}$.

Comme $f(-1) \cdot f(1) < 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ alors il existe des solutions $]-1, 1[$ Tel que $f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{f est continue sur } \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ f(-1) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{il existe } x_1 \in \left]-1, \frac{-1}{2}\right[\text{ tq } f(x_1) = 0$$

de même sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc il existe trois solutions

$x_1 \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[$, $x_2 \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ et $x_3 \in \left]\frac{1}{2},1\right[$ de l'équation $f(x)=0$.

2) $\sin 3t = \sin(t+2t) = \sin t\cos 2t + \cos t\sin 2t$

$$= \sin t(1-2\sin^2 t) + 2\cos^2 t\sin t$$
$$= \sin t - 2\sin^3 t + 2(1-\sin^2 t)\sin t$$
$$= \sin t - 2\sin^3 t + 2\sin t - 2\sin^3 t = -4\sin^3 t + 3\sin t.$$

On a $\sin 3t = -4\sin^3 t + 3\sin t$ et on pose $x = \sin t$, $x \in \left]-1,1\right[$

on obtient $4x^3 - 3x + \sin 3t = 0$ Donc $\sin 3t = \frac{1}{2}$

équivaut à $3t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3t = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in Z$

ou encore $t = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $t = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$; $k \in Z$

$x_1 = -\sin\frac{7\pi}{18}$, $x_2 = \sin\frac{\pi}{18}$, $x_3 = \sin\frac{5\pi}{18}$

20

1) f est une fonction polynôme donc dérivable 2 fois sur IR ,
$f(x) = x^4 - 6x^2 + x$ alors $f'(x) = 4x^3 - 12x + 1$ et $f''(x) = 12x^2 - 12$

2)

x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		$+\infty$
$f''(x)$		+			0			-	0	+			
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	9	↘	0	↘	-7	↗	0	↗	$+\infty$

D'après le tableau , f' s'annule exactement trois fois.
L'équation $4x^3 - 12x + 1 = 0$ admet donc 3 solutions a, b et c avec
$-1{,}8 < a < -1{,}7$; $0 < b < 0{,}1$; $1{,}6 < c < 1{,}7$

3)

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		-		+		-		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	f(a)	↗	f(b)	↘	f(c)	↗	$+\infty$

$f(a) \simeq -10$; $f(b) \simeq 0$ et $f(c) \simeq -7$

4) $x(x^3 - 6x + 1) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -1$

* f continue est strictement ↘ sur $]-\infty , a]$ et $f(a) = -10$

$\Rightarrow$ Il existe un seul $\alpha \in]-\infty , a]$ tel que $f(\alpha) = -1$

De même pour les autres intervalles

On conclu que f(x) = -1 admet exactement 4 solutions une dans chaque intervalle. $]-\infty, a[$; $]a, b[$; $]b, c[$; $]c,+\infty[$

21 1) f est dérivable sur $]-3,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

x	-3		-2		a		+∞
f'(x)	‖	-	0	+			
f(x)	0	↘	-2	↗	1	↗	+∞

2) Sur $]-3,-2]$ f est continue et strictement ↘
Donc $f(]-3,-2]) = [-2,0[$ or 1 et $3 \notin [-2,0[$
donc f(x) = 1 et f(x) = 3 n'admet pas de solution sur $[-3,-2]$
Sur $[-2,+\infty[$ f continue et strictement croissante
$f([-2,+\infty[) = [-2,+\infty[$ or 1 et $3 \in [-2,+\infty[$
donc les équation f(x) = 1 et f(x) = 3 admet une seule solution alors $[-3,+\infty[$.
* $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = a$ et $0,53 < a < 0,54$
* $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = b$ et $1,42 < b < 1,43$

3) $x\sqrt{x+3} + m\sqrt{m+3} = 1$
$\Leftrightarrow x\sqrt{x+3} = 1 - m\sqrt{m+3}$
$\Leftrightarrow f(x) = k$ avec $k = 1 - m\sqrt{m+3} = 1 - f(m)$
$f(x) = k$ admet une unique solution réelle si et seulement si $k > 0$.
$k > 0 \Leftrightarrow 1 - f(m) > 0 \Leftrightarrow f(m) < 1 \Leftrightarrow m \in [-3,a[$.

Chapitre II

Dérivabilité

I) **Dérivabilité** :

■ Définition : f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell\,(\text{fini})$

et ℓ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 noté : $f'(x_0)=\ell$.

■ Théorème :

Si f est dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

■ Dérivées usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a$ (a est constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n\in\mathbb{N};n\geq 1$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{tg}(ax+b)$	$I=\left\{x\in\mathbb{R} \text{ telque} ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\, k\in Z\right\}$	$x \mapsto a(1+\mathrm{tg}^2(ax+b))$	I
$x \mapsto \cot g(ax+b)$	$I=\{x\in\mathbb{R} \text{ telque } ax+b\neq k\pi\, k\in Z\}$	$x \mapsto -a(1+\cot g^2(ax+b))$	I

■ Théorèmes de dérivation :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, I intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Les fonctions suivantes sont dérivables sur I et le tableau donne l'expression des dérivées.

Fonction	Fonction dérivée
$U+V$	$U'+V'$
λU	$\lambda U'$
UV	$U'V+UV'$
$n\in\mathbb{Z}$, U^n	$nU^{n-1}U'$
$\frac{1}{V}$ (V ne s'annule pas sur I)	$-\frac{V'}{V^2}$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V-V'U}{V^2}$

■ Dérivée d'une fonction composée :

Soit U dérivable sur I, V dérivable sur J et pour tout $x\in I$, $f(x)\in J$ alors $V\circ U$ est dérivable sur I et $(V\circ U)'=U'\times(V'\circ U)$.

II) **Accroissements finis**.

■ Théorèmes des accroissements finis :

Si f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

■ Inégalités des accroissements finis :

• Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x\in I$, $m\leq f'(x)\leq M$ Alors

Pour tout a et $b\in I$ $(a\neq b)$ on a : $m\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$

• Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un réel $k>0$ tel que $\forall x\in I\ |f'(x)|\leq k$

alors pour tout a et b de I, on a $|f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$

• Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(x)\neq 0$ alors f garde un signe constant.

Approximation affine

Définition : Soit f une fonction dérivable en a

Une valeur approché de $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\times h$

On dit alors que $f(a)+f'(a)\times h$ est une approximation affine de f en a.

Exemple :

1) Déterminer une approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h voisin de 0.

2) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,002}$.

Solution :

1) On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

$\forall x \in]0,+\infty[, f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Une approximation affine de f en 1 est $f'(1)\, h + f(1) = \dfrac{1}{2}h + 1$

D'où $\sqrt{1+h} \simeq \dfrac{1}{2}h + 1$

2) $\sqrt{1,002} = \sqrt{1+0,002} = \dfrac{1}{2} \times 0,002 + 1 = 1,001$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment calculer une limite à l'aide de la dérivée ?	Si f est dérivable en a alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Comment étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle I ?	On applique le théorème de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée. Pour les valeurs a où aucun de çes théorèmes ne permet pas de conclure, on utilise $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ENONCES

1 QCM

Soit f une fonction dérivable sur [-2,2] dont le tableau de variation la fonction f' est :

x	-2	-1	0	1	2
f'(x)	1 ↘	0	↘ -2 ↗	-1	↗ 0

On a alors :

1) a) f(-2) < f(-1) b) f(-1) < f(0) c) f(0) < f(1)

2) La ζ_f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation.

a) $y = -\frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = -\frac{1}{2}x$

3) Si f(-2) > (2) alors pour tout k ∈]f(2) , f(-2) [l'équation f(x) = k admet dans [-2,2]

a) exactement une solution b) exactement 2 solutions

c) Pas de solutions

2 **Vrai – faux.** Dire si chacune des propositions est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) f continue en a alors f est dérivable en a.
2) f est continue en a alors f n'est pas dérivable en a.
3) f n'est pas continue en alors f est dérivable en a.
4) f n'est pas continue en alors f n'est pas dérivable en a.

3

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Préciser les demi-tangentes, aux points d'abscisses 1 et -1 à la courbe représentative de g.

2) Soit h définie par $h(x) = \left|x^2 + x\right|$.

Préciser les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et -1 à la courbe de h.

4

En utilisant les théorèmes sur la dérivation.

Déterminer le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 2) $h(x) = x^2\sqrt{x}$; 3) $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

4) $\ell(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$; 5) $k(x) = x\cos(x^2)$; 6) $\varphi(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

5

Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle I.

a) $f(x)=\sqrt{2x^3+1}-2$ sur $[0,2]$.

b) $f(x)=2x-2\cos x-1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

6 En utilisant l'inégalité des accroissements finis.

1) Démontrer que pour tout $h\in\mathbb{R}$, $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\frac{1}{2}\right|\leq|h|$.

2) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $x\leq \operatorname{tg}x\leq 2x$.

7 Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur $[0,2]$ Vérifiant $f(0)=-1$ et $f(2)=1$, et telle que pour tout $x\in[0,2]$ $\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq\frac{3}{2}$.

En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0,x]$ d'une part, et sur $[x,2]$ d'autre part, montrer que la courbe représentative de $x\mapsto f(x)$ se situe nécessairement à l'intérieur d'un parallélogramme à définir.

8 1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction dérivée f'.

b) Soit $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,u]$.

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis montrer que

$u\cos u\leq\sin u\leq u$ (1)

2) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\cos x$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction dérivée g'.

b) Soit $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer un encadrement de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,u]$.

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $1-u^2\leq\cos u\leq 1$ (2).

3) a) Déduire de (1) et (2) que $u-u^3\leq\sin u\leq u$.

b) En déduire un encadrement, par des nombres décimaux de sin 1°.

9 1) Déterminer une approximation affine de sin $(\frac{\pi}{6}+h)$ pour h proche de 0.

2) Déduire une valeur approchée de sin 31°. Comparer le résultat trouvé avec celle d'une calculatrice.

(Rappel : 1° correspond à $\frac{\pi}{180}$ rd).

10 f définie sur IR – {-5} pour $f(x) = \frac{2}{x+5}$

1) Déterminer une approximation affine de f voisin de (-1).
2) Démontrer que pour $-1 \leq h \leq 1$. L'erreur commise en remplaçant f(-1+h) par f(-1) + h f'(-1) est majorée par $\frac{1}{24}h^2$.

11 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{2x+1}$

1) Déterminer l'approximation affine de f(h) proche de 0.
2) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,00024}$

12 $n \in IN^*$; $f(x) = (1+x)^n$

1) Donner une approximation affine de f puis de g voisin de 0.
2) Donner une valeur approchée de $1,0003^7$

13 f est la fonction définie sur]1, +∞[$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

1) a) Déterminer la fonction dérivée de f.
   b) Etudier les variations de f.
   c) Déterminer les extremums de f.
2) Etudier les limites de f en 1 et en +∞.
3) ζ est la courbe représentant f dans un repère orthonormal.
   a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe ζ en +∞.
   b) Situer la courbe ζ par rapport à la droite D.
   c) Tracer la droite D et la courbe ζ.

14 f est la fonction définie sur D = IR – {-1} par : $f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$

ζ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Calculer f'(x) lorsque :
   a) x appartient à]-∞,-2[
   b) x appartient à]-2,-1[∪]-1,+∞[
2) En déduire l'étude des variations de f sur]-∞, -2[;]-2,-1[et]-1,+∞[
3) a) Montrer que f est dérivable à droite en -2 et que le nombre dérivé à droite

de f en -2 est égale à 0.

b) Montrer que f est dérivable à gauche en -2 et que le nombre dérivé à gauche de f en -2 est égale à -2.

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

4) Etudier les limites de f aux bornes de D.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Montrer que la courbe ζ admet des asymptotes obliques D et D'.

7) Tracer les droites D, D' la courbe ζ les tangentes remarquables et b L'asymptote verticale.

15 Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ et (C) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et à gauche en –2.

c) Donner le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) relativement à $\mathbb{R}_+$.

c) Construire la courbe (C).

16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2x\text{-}1+\sqrt{x^2\text{-}5x+4}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Soit le point $O'\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.Ecrire l'équation $Y = F(X)$ de la courbe C dans le repère $R'(O', \vec{i}, \vec{j})$.

3) Ecrire une équation de la courbe C ' dans le repère R' symétrique de C par rapport à O'.

4) Soit $\Gamma = C \cup C'$, Ecrire une équation de Γ dans le repère R'.

5) Soit $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} + 3\vec{j}$, Ecrire une équation de Γ dans le repère $R''(O', \vec{I}, \vec{J})$. En déduire la nature de Γ.

CORRIGES

1 On a

x	-2		-1		0		1		2
f'(x)	1	↘	0	↘	-2	↗	-1	↗	0
f'(x)		+	0	—					0
f(x)	f(-2)	↗		↘					f(2)

1) La réponse est $\boxed{a}$: f est strictement croissante sur [-2, -1] donc f(-2) < f(-1)

2) f'(-1) = 0 et f'(2) = 0 donc ζ_f admet deux tangentes horizontales qui sont parallèles à $\Delta : y = \frac{-1}{2}$ donc la réponse est $\boxed{a}$.

3) La réponse est $\boxed{a}$: d'après le tableau de variation la droite y = k coupe la courbe de f en un seul point.

2 1) Faux : f(x) = |x| continue en 0 et n'est pas dérivable en 0

$$\lim_{0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{0^+}\frac{x}{x}=\lim_{0^+}1=1$$

$$\lim_{0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{0^-}-1=-1\neq 1$$

2) Faux : f(x) = x^2 continue et dérivable en a.

3) Faux : car f n'est pas continue $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable.

4) Vrai .

3 1) La fonction g est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ par :

$g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

• Si $x\in]1,+\infty[$; $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}=1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

Comme $x-1>0$ on a : $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$

et $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=1+\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}}$ d'où $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=+\infty$ par suite g n'est pas dérivable à droite en 1

Mais sa courbe représentative admet en ce point une demi tangente verticale (parallèle à (yy')).

• Si $x\in\left]-\infty,-1\right[$; $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}=1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

Comme $x+1<0$: $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$ et $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

D'où $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=-\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche

En -1 mais la courbe de g admet une demi tangente verticale.

2) $h(x)=\left|x^2+x\right|=\left|x(x+1)\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[$; $h(x)=x^2+x$

Si $x\in[-1,0]$, $h(x)=-x^2-x$

• La restriction h_1 de h sur $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[$ est définie par :

$h_1(x)=x^2+x$ est dérivable sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left[0,+\infty\right[$ car c'est un Polynôme et $h_1'(x)=2x+1$.

D'où la fonction h est dérivable sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left[0,+\infty\right[$ et dérivable à gauche en (-1) et à droite en 0 et $h_g'(-1)=-1$, $h_d'(0)=1$.

– La courbe de h admet au point d'abscisse (-1) une demi tangente à gauche d'équation : $\begin{cases}x\le -1\\ y=h_g'(-1)(x+1)+h(-1)\end{cases}$ soit $\begin{cases}x\le -1\\ y=-x-1\end{cases}$

– La courbe de h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à droite d'équation : $\begin{cases}x\ge 0\\ y=h_d'(0)(x)+h(0)\end{cases}$ soit $\begin{cases}x\ge 0\\ y=x\end{cases}$

• h_2 la restriction de h sur $[-1,0]$ est définie par $h_2(x)=-x^2-x$

h_2 est dérivable sur $[-1,0]$ et $h_2'(x)=-2x-1$ donc h est dérivable sur $\left]-1,0\right[$ et $h_d'(-1)=1$ et $h_g'(0)=-1$.

– La courbe de h admet une demi tangente à gauche au point d'abscisse (0) d'équation : $\begin{cases}x\le 0\\ y=h_g'(0)x+h(0)\end{cases}$ soit $\begin{cases}x\le 0\\ y=-x\end{cases}$

– La courbe de h admet une demi tangente à droite au point d'abscisse

(–1) d'équation : $\begin{cases} x \geq -1 \\ y = h'_d(-1)(x+1) + h(-1) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \geq -1 \\ y = x+1 \end{cases}$

4 1) La fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $]-1,1[$, donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est dérivable sur cet intervalle.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur cet intervalle.

Pour tout $x \in]-1,1[$; $f'(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + x\dfrac{\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$

donc $f'(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \dfrac{x}{(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

2) $h(x) = x^2\sqrt{x}$; $D_h =]0,+\infty[$

h est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc h est dérivable sur cet intervalle.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $h'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$ donc $h'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

3) $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $D_g =]0,+\infty[$.

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}\cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x}{x} = \dfrac{2x\cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$.

4) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ fonction rationnelle donc ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d'où ℓ est la composé de 2 fonctions dérivables donc ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\ell'(x) = -\dfrac{2x(x^2+1) - 2x(x^2)}{(x^2+1)^2}\sin\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\sin\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$.

5) $x \longmapsto x^2$ polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \longmapsto \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$k'(x) = \cos(x^2) + x \cdot (2x)(-\sin x^2) = \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2$

6) $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

et $x \longmapsto \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

d'où $\varphi'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^3}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5 a) f est dérivable sur $[0,2]$. $f'(x) = \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3+1}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3+1}} \geq 0$

donc f est strictement croissante sur $[0,2]$ et continue d'où f réalise une bijection de $[0,2]$ sur $f([0,2]) = [f(0), f(2)] = [-1, \sqrt{17}-2]$.

or $0 \in [-1, \sqrt{17}-2]$ donc 0 admet qu'un seul antécédent $\alpha \in [0,2]$, donc $f(x) = 0$ admet qu'une seule solution.

b) $f(x) = 2x - 2\cos x - 1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

f dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2 + 2\sin x = 2(1 + \sin x) > 0$

car $\sin x > -1$ donc $\sin x + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et comme elle est continue sur cette intervalle donc f est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

Soit $[-3, \pi - 1]$ or $0 \in [-3, \pi - 1]$ donc il existe qu'une seule valeur $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet qu'une seule solution sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6 1) On pose $f(x) = \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x$

et on a $|\sin x| \leq 1$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle de bornes $\dfrac{\pi}{3}$ et $h + \dfrac{\pi}{3}$

On a donc $\left|f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \leq 1 \cdot \left|\frac{\pi}{3}+h-\frac{\pi}{3}\right|$

ou encore $\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\frac{1}{2}\right| \leq |h|$

2) On pose $f(x)=\operatorname{tg}x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x$

comme $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg}x$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Alors $0 \leq \operatorname{tg}x \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ ou encore $0 \leq \operatorname{tg}x \leq 1$

par suite $1 \leq 1+\operatorname{tg}^2 x \leq 2$ soit $1 \leq f'(x) \leq 2$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle de bornes 0 et x.

avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ on a : $1 \cdot (x-0) \leq f(x)-f(0) \leq 2(x-0)$ d'où $x \leq \operatorname{tg}x \leq 2x$.

7

En appliquant les inégalités des accroissements finis en deux temps :

- Pour $x_0=0$ et $x_1=x$ et sur $[0,2]$

$\frac{1}{2}(x-0) \leq f(x)-f(0) \leq \frac{3}{2}(x-0)$

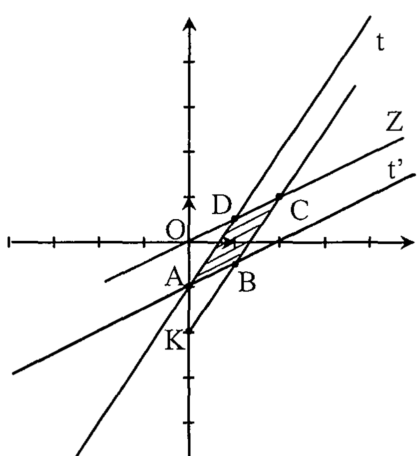
$\frac{1}{2}x \leq f(x)+1 \leq \frac{3}{2}x$ ou encore

$\frac{1}{2}x-1 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}x-1$ (1)

- Pour $x_0=x$ et $x_1=2$ et Sur $[0,2]$

$\frac{1}{2}(2-x) \leq f(2)-f(x) \leq \frac{3}{2}(2-x)$

$\frac{1}{2}x \geq f(x) \geq \frac{3}{2}x-2$ (2)



D'après (1) la courbe de f est située dans $[At, At']$ avec $A(0,-1)$ et $(At): y=\frac{1}{2}x-1$ et $(At'): y=\frac{3}{2}x-1$ et (2) donne que la courbe de f est située dans le triangle OCK avec $K(0,-2)$ et $C(2,1)$ finalement la courbe de f est située à l'intérieur du parallélogramme ABCD.

8 1) a) f est dérivable deux fois sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x\leq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

donc f' est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) $0\leq x\leq u$ et f' est décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $[0,u]$

Alors $f'(0)\geq f'(x)\geq f'(u)$ d'où $1\geq f'(x)\geq \cos u$.

c) f est continue dérivable sur $[0,u]$

et $\cos u\leq f'(x)\leq 1$ on applique l'inégalité des accroissements finis

$\cos u\leq\dfrac{\sin u-\sin 0}{u-0}\leq 1$ or $u>0$ d'où $u\cos u\leq \sin u\leq u$ (1)

2) a) $g(x)=\cos x$ dérivable deux fois sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x)=-\sin x$

et $g''(x)=-\cos x\leq 0$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ donc g' est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Si $0\leq x\leq u$ alors $g'(0)\geq g'(x)\geq g'(u)$ d'où $0\geq g'(x)\geq -\sin u$

c) Comme g' est bornée sur $[0,u]$, on peut appliquer l'inégalité des Accroissements finis :

$-\sin u\leq\dfrac{\cos u-\cos 0}{u-0}\leq 0$

$-u\sin u\leq \cos u-1\leq 0 \Leftrightarrow 1-u\sin u\leq\cos u\leq 1$

d'après (1) on a $\sin u\leq u$ d'où $-u\sin u\geq -u^2$

D'où $1-u^2\leq 1-u\sin u\leq \cos u\leq 1$

3) a) On a : $1-u^2\leq\cos u\leq 1$

Alors $u-u^3\leq u\cos u$ comme $u\cos u\leq\sin u\leq u$

D'où $u-u^3\leq \sin u\leq u$.

b) $1°=\frac{\pi}{180}\text{rd}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{180}-\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\leq\sin\frac{\pi}{180}\leq\frac{\pi}{180}$

La calculatrice donne :

$\frac{\pi}{180}\cong 0{,}017453...$; $\frac{\pi}{180}-\left(\frac{\pi}{180}\right)^3=0{,}017447..$

On trouve, par exemple $0{,}01744 \leq \sin 1° \leq 0{,}017746$

9 $f(x) = \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = \cos x$

Alors une approximation affine de $\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)$ au voisinage de 0 est

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)h+f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}h+\frac{1}{2}$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}h+\frac{1}{2}$

2) $1° \to \frac{\pi}{180°}$rd donc $31° \to x$ rd d'où $x = 31 \times\frac{\pi}{180°} = \frac{30\pi}{180}+\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$

D'où $\sin 31° = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180°}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{180}+\frac{1}{2}\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0{,}017+\frac{1}{2}=0{,}515107.$$

* $\sin 31° = 0{,}51503$ avec une calculatrice.
* $0{,}515107 > 0{,}51503$

  Donc l'approximation de sin 31° est supérieur à sin 31° avec une calculatrice.

10 1) $f(x) = \frac{2}{x+5}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{-5\}$

Et $f'(x) = \frac{-2}{(x+5)^2}$

$f(-1+h) \simeq f'(-1)\,h + f(-1)$

$f(-1+h) \simeq -\frac{1}{8}\,h + \frac{1}{2}$ c'est l'approximation affine de f voisin de (-1).

2) * $f(-1 + h) = \frac{2}{-1+h+5} = \frac{2}{h+4}$

* $f(-1) + f'(-1) \times h = -\frac{1}{8}h+\frac{1}{2}$
* L'erreur commise est : $f(-1+h) - f(-1) - f'(-1)h$

  $f(-1+h) - f(-1) - f'(-1) \times h = \frac{2}{h+4}+\frac{1}{8}h-\frac{1}{2}$

Montrons que pour tout $h \in [-1,1]$

On a $\frac{2}{h+4}+\frac{1}{8}h-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{24}h^2$

$g(h) = \frac{2}{h+4}+\frac{1}{8}h-\frac{1}{2}-\frac{1}{24}h^2$

$$g'(h) = \frac{-2}{(h+4)^2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12}h$$

$$g''(h) = 4(h+4)^{-3} - 1 = \frac{4}{(h+4)^3} - 1 \leq 0 \text{ car } 3^3 \leq (h+4)^3 \leq 5^3$$

$\Rightarrow$ g' est décroissante sur [-1,1]

$$g'(-1) = \frac{-2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{-16+9}{72} + \frac{6}{72} = \frac{-1}{72} < 0$$

$\Rightarrow$ g est strictement décroissante sur [-1,1]

$$\text{Or } g(-1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{16-3-12-1}{24} = 0$$

$\Rightarrow g(h) \leq 0$. D'où $\frac{1}{24}h^2$ est un majorant de l'erreur commise.

11 1) $f(x) = \sqrt{2x+1}, \forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$ on a

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ d'où l'approximation de f pour h proche de 0.

$f(h) \simeq f'(0) \times h + f(0)$

$f(h) \simeq h + 1$

2) $\sqrt{1{,}00024} = \sqrt{1 + 2 \times 0{,}00012} = 0{,}00012 + 1 = 1{,}00012$

12 1) $f(x) = (1+x)^n$ dérivable sur IR

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$

Une approximation affine de f pour x voisin de 0 est :

$f'(0)x + f(0) = nx + 1$ d'où $f(x) \simeq nx + 1$

2) $1{,}0003^7 = (1 + 0{,}0003)^7$

$\simeq 7 \times 0{,}0003 + 1 = 1{,}0021$

13 1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

a) $x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$ est dérivable et strictement positif sur]1,+∞[

alors f est dérivable sur]1,+∞[

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \frac{x^2(3x-3-x)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}}}$$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	1		$3/2$		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ -	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗	-

c) f admet un minimum absolue en $\frac{3}{2}$

2) $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{1^+} f(x) = \lim\limits_{1^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty$

3) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x - \frac{1}{2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + \left(x+\frac{1}{2}\right)}$

En développent et en simplifiant

On obtient $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{3x+1}{4x-4}}{f(x) + x + \frac{1}{2}} = \lim\limits_{+\infty} \frac{3x+1}{4x-4} = \frac{3}{4}$

et $\lim\limits_{+\infty} f(x) + x + \frac{1}{2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$

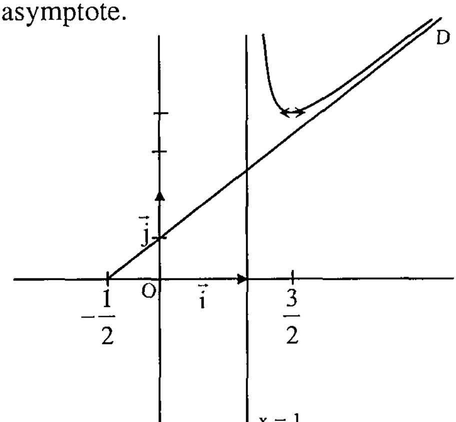
La droite D : $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote.

b) Pour $x > 1$ on a $\frac{3x+1}{4(x-1)} > 0$

et $f(x) + x + \frac{1}{2} > 0$

donc $f(x) - x - \frac{1}{2} > 0$

d'où ζ est au dessus de D.



14 1) a) $x \in]-\infty, -2[$; $f(x) = -x - 2 + \frac{1}{x+1}$

Alors $f'(x) = -1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

b) $x \in]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$; $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x+1}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2) $x \in]-\infty, -2[$; $f'(x) = -1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$

$x \in]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0$ le signe de f' est celui de x

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		-		-	‖	-	0	+	
f(x)		↘		↘	‖	↘	3	↗	

3) a) $$\lim_{(-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{(-2)^+} \frac{x+2+\dfrac{1}{x+1}+1}{x+2} = \lim_{-2^+} \frac{(x+3)(x+1)+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \lim_{-2^+} \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)} = \lim_{-2^+} \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = \lim_{-2^+} \frac{x+2}{x+1} = 0$$

b) $$\lim_{(-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{(-2)^-} \frac{-x-2+\dfrac{1}{x+1}+1}{x+2} = \lim_{(-2)^-} \frac{(-x-1)(x+1)+1}{(x+2)(x+1)} = \lim_{(-2)^-} \frac{-x^2 - 2x - 1 + 1}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \lim_{(-2)^-} \frac{-x(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{(-2)^-} \frac{-x}{x+1} = -2 = f_g^-(-2)$$

c) ζ admet au point d'abscisse (-2) deux demi- tangentes de coefficient $f'_d(-2) = 0$ et $f'_d(-2) = -2$

4) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x + 2 + \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -x - 2 + \dfrac{1}{x+1} = +\infty$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{(-1)^+} -x-2+\frac{1}{x+1} = -1+\infty = +\infty$$

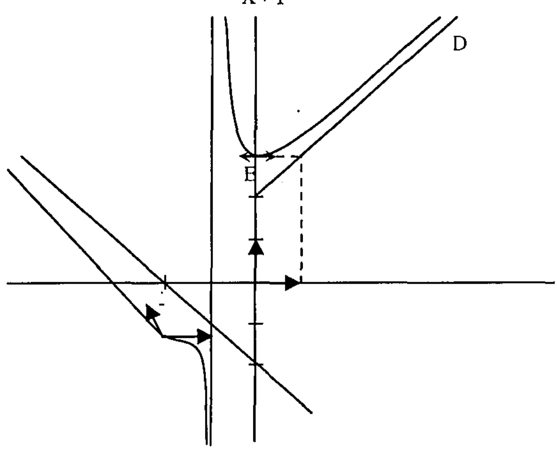
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		-	||	-	||	-	0	+	
f(x)	$+\infty$ ↘		-1	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

6) $\lim\limits_{+\infty} f(x) - (x+2) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

$\Rightarrow$ D : y = x + 2 est une asymptote pour ζ en $+\infty$.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) - (-x - 2) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow$ D' : y = -x – 2 est une asymptote en $-\infty$.



15 1) a) $Dg = \{x \in \mathbb{R}, \text{tel que } x^2 + 2x \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \dfrac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}} = +\infty$.

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

$$\lim_{x\to(-2)^-} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} 1 + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to(-2)^-} 1 + \frac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}} = -\infty$$

Donc g n'est pas dérivable à gauche en –2.

c) La fonction $x \longmapsto x^2 + 2x$ est dérivable et strictement positive sur :

$I=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]0,+\infty\right[$. Alors la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+2x}$ est dérivable sur I et $x\longmapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I d'où g est dérivable sur I et pour tout $x\in I$ on a

$$g'(x)=1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$$

• Si $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$ alors $x\in\left]0,+\infty\right[$.

Donc $g'(x)\geq 0$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

• Si $x+1\leq 0\Leftrightarrow \quad x\leq -1$ alors $x\in\left]-\infty,-2\right[$.

$$g'(x)=\frac{-1}{\left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right]\cdot\sqrt{x^2+2x}}<0$$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$0\searrow -1$		$+\infty\searrow 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{-\infty}\dfrac{1}{x+1-\sqrt{x^2+2x}}=0$

2) a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x+\sqrt{x^2+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4x}{1-x-\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}-1-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=2$$

donc la droite (D) d'équation : $y=2x+2$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

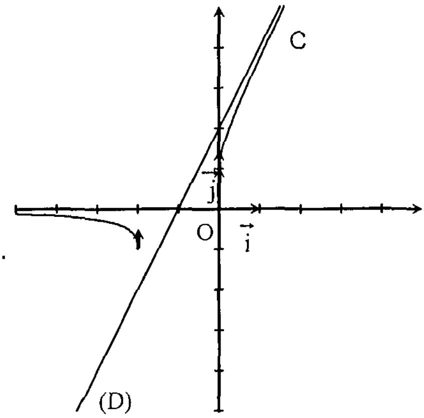
b) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$; $g(x)-y=\sqrt{x^2+2x}-x-1=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}<0$

Donc (C) est au-dessous
de la droite (D) pour tout

$x \in \mathbb{R}_+$.

c) • $y=0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

• La courbe (C) admet deux demi-tangentes verticales aux points d'abscisses $x=-2$ et $x=0$.



16 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$

$D_f =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$

$x \longmapsto x^2 - 5x + 4$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

Donc $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$ et $x \longmapsto 2x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

• $\lim\limits_{1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{1^-} \dfrac{2x - 1 + \sqrt{x^2 - 5x + 4} - 1}{x - 1}$

$= \lim\limits_{1^-} \left[2 + \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x - 1} \right] = \lim\limits_{1^-} \left[2 + \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \right]$

$= \lim\limits_{1^-} \left[2 + \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \right] = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

• $\lim\limits_{4^+} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim\limits_{4^+} \dfrac{2x - 8 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x - 4}$

$= \lim\limits_{4^+} \left[x - 2 + \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-4)\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \right]$

$= \lim\limits_{4^+} \left[x - 2 + \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \right] = +\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 4.

On en déduit qu'aux points $A(1,1)$ et $B(4,7)$ la courbe de f admet deux demi-tangentes verticales dirigées vers le haut.

• $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$,

$$f'(x)=2+\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}=\frac{4\sqrt{x^2-5x+4}+2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$$

pour $2x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{5}{2}$ alors pour $x>4$ on a $f'(x)>0$

pour $2x-5\leq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{5}{2}$ alors pour $x<1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-5x+4}+2x-5=0$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-5x+4}=5-2x \Leftrightarrow 16(x^2-5x+4)=(5-2x)^2$

$16x^2-80x+64=25-20x+4x^2$ ou encore $4x^2-20x+13=0$, $\Delta'=48$

$x'=\frac{10-4\sqrt{3}}{4}=\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$ et $x''=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$		x'		1		x''		$+\infty$
$4x^2-20x+13$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$		1	4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	y'	$\searrow$	1	7	$\nearrow$	$+\infty$

$$y'=f\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8-3\sqrt{3}}{2}$$

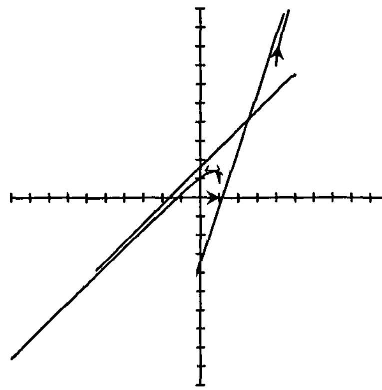
$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty} 2x-1+\lim_{+\infty}\sqrt{x^2-5x+4}=+\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x)=\lim_{-\infty} 2x-1+\sqrt{x^2-5x+4}=\lim_{-\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=-\infty$$

• Branches infinies : $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty} 2-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=3$

$$\lim_{+\infty} f(x)-3x=\lim_{+\infty} -1-x+\sqrt{x^2-5x+4}=\lim_{+\infty} -1+\frac{(x^2-5x+4)-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}$$

$$\lim_{+\infty} -1+\frac{x\left(-5+\frac{4}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right]}=-\frac{7}{2}$$ d'où $y=3x-\frac{7}{2}$ est une asymptote pour la courbe de f au voisinage de $+\infty$.



$$\lim_{-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{-\infty} 2-\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=1$$

$$\lim_{-\infty} f(x)-x=\lim_{-\infty} -1+x+\sqrt{x^2-5x+4}$$

$$=\lim_{-\infty} -1+\frac{(x^2-5x+4)-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}-x}$$

$$=\lim_{-\infty} -1+\frac{-5+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}=\frac{3}{2}$$

d'où $y=x+\frac{3}{2}$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$ pour la courbe de f.

2) $M(x,y)$ dans ce repère R et $M(X,Y)$ dans le repère R'.

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{O'M}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM}=\left(x-\frac{5}{2}\right)\vec{i}+(y-4)\,\vec{j}$$

d'où $X=x-\frac{5}{2}$ et $Y=y-4$ ou encore $x=X+\frac{5}{2}$ et $y=Y+4$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans R est : $y=2x-1+\sqrt{x^2-5x+4}$

Alors l'équation de $\mathcal{C}$ dans R' est :

$$Y+4=2X+5-1+\sqrt{\left(X+\frac{5}{2}\right)^2-5\left(X+\frac{5}{2}\right)+4}$$

Soit $Y=2X+\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$ donc $F(X)=2X+\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$

3) $M(X,Y)_{R'}$ et $M'(X',Y')_{R'}$; $S_{O'}(M)=M' \Leftrightarrow O'=M*M'$
ou encore $X'=-X$ et $Y'=-Y$ soit $X=-X'$ et $Y=-Y'$

$\mathcal{C}$: $Y=2X+\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$ dans R' comme $\mathcal{C}'=S_{O'}(\mathcal{C})$

d'où $C':-Y'=-2X'+\sqrt{X'^2-\frac{9}{4}}$ ou encore $C':Y=2X-\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$ dans le repère R'.

4) $M(X,Y)\in\Gamma \Leftrightarrow Y=2X+\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$ et $Y=2X-\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$

ou encore $Y-2X=\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$ et $Y-2X=-\sqrt{X^2-\frac{9}{4}}$

soit $|Y-2X|=\sqrt{X^2-\frac{9}{4}} \Leftrightarrow (Y-2X)^2=X^2-\frac{9}{4}$

$\Gamma: Y^2+3X^2-4XY+\frac{9}{4}=0$

5) $M(X,Y)_{R'}\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{O'M}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}$ $M(X',Y')_{R''} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M}=X'\,\vec{I}+Y'\,\vec{J}$

$\overrightarrow{O'M}=X'(\vec{i}+\vec{j})+Y'(\vec{i}+3\,\vec{j})=(X'+Y')\,\vec{i}+(X'+3Y')\,\vec{j}$

d'où $X=X'+Y'$ et $Y=X'+3Y'$

L'équation de Γ dans R' : $Y^2+3X^2-4XY+\frac{9}{4}=0$

devient dans R'' : $(X'+3Y')^2+3(X'+Y')^2-4(X'+Y')(X'+3Y')+\frac{9}{4}=0$

ou encore Γ : $-4X'Y'=\frac{-9}{4}$ par suite Γ : $y'=\frac{9}{16X'}$

d'où Γ est une hyperbole.

Chapitre III

Fonctions continues et strictement Monotone sur un intervalle

Bijection :

■ Théorèmes :

• Si f est continue est strictement monotone sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$)
Alors : 1) f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

2) La fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $f(I)$.

3) Dans un repère orthonormé, la courbe de f et de f^{-1} sont
Symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

■ Dérivabilité de f^{-1} :

Soit f une fonction et strictement monotone sur I.

• Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

• Si f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

■ Fonction racine $n^{\text{ième}}$:

• Définition de la racine $n^{\text{ième}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réel positifs :

$$a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$b^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{b}$ est appelé racine nième de b.

• Remarque

Pour $n = 2$, $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$ (racine carrée)

Pour $n = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$ (racine cubique)

• Théorème

La réciproque de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$ est la fonction f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

• Propriétés :

Soient x et y deux réels strictement positifs, p et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
on a alors :

• $\sqrt[n]{x^n} = x$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$
$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$	$\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$
$\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$	$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$

•Résolution de l'équation $x^n = a$ avec $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$

1er cas : $a \geq 0$

Si n est pair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$

Si n est impair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

2ème cas : $a < 0$

Si n est pair alors $x^n = a$ n'admet pas de solution.

Si n est impair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{-a}$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} ?	* $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$ Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ * f dérivable sur I et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou x_2 ou … x_n alors f^{-1} est dérivable sur $f(I) - \{f(x_1), f(x_2)$ à $f(x_n)\}$

Comment déterminer la dérivabilité de f^{-1} en y_0 ?	On calcule x_0 tel que $f(x_0) = y_0$ Puis $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ $= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ Ainsi si f est dérivable en x_0 alors $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ Si $f'(x_0) = 0$ Alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 Si $\lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ Donc $(f^{-1})'(y_0) = 0$

<u>Remarque :</u>
Si f n'est pas dérivable en x_0 on peut pas conclure que f^{-1} n'est pas dérivable en y_0.

ENONCES

1 On considère la fonction f définie sur $\left[0,\sqrt{2}\right]$ par $f(x)=x^4-4x^2+1$.

1) Démontrer que f est bijection de $\left[0,\sqrt{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=-4x+\sqrt{5}$ admet dans $]1,\sqrt{2}[$ une solution unique.

2 $r\in\mathbb{Q}^*$, soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 + x)^r$.

1) Déterminer l'équation y = T(x) de la tangente à ζ_f au point d'abscisse O.

2) Pour x assez proche de 0 , on décide d'approximer f(x) par T(x)
Calculer ainsi une valeur approchée $1{,}002^7$.
Comparer avec la valeur fournie par la calculatrice.

3 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2+x-1$.

a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha\in]0,1[$.

b) En déduire que α est le seul réel vérifiant $\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}$

2) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même soit h sa bijection réciproque.

b) Expliciter h(x) pour tout $x\in[0,1]$.

3) Soit $\beta\in\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $\alpha=\cos 2\beta$. Montrer que β est l'unique solution dans $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ de l'équation : $\operatorname{tg}x-\cos 2x=0$.

4 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{2-x} & \text{si } x<0 \\ 4x^3+x^2+x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

2) Etudier la dérivabilité de f et donner sa fonction dérivée.
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $\alpha \in]0,1[$.
4) Montrer que la restriction g de f à $]-\infty,0[$ réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur un intervalle J à préciser.

Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

5) Soit h la fonction définie sur $]-\pi,0[$ par $h(x)=f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Etudier la dérivabilité de h et donner sa fonction dérivée.

5 Soit la fonction $f:x \mapsto \sqrt{x^2\text{-}x+1}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau de variation de f.
2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x.
3) Déterminer le nombre dérivé de f^{-1} au point $\frac{3}{2}$.
4) Soit $g:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \sqrt{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1}+\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Donner le tableau de variation de g.

6 Soit $f:[-1,0] \longrightarrow \left[0,\frac{1}{2}\right]$; $x \longmapsto \sin^2 \frac{\pi}{4}x$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x+1$ admet une solution dans $\left]-1,-\frac{2}{3}\right[$.
2) Montrer que f est une bijection, soit f^{-1} sa réciproque.
3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{4}$, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\frac{f^{-1}(y)}{y}=-\infty$.

4) Déterminer la fonction dérivée de f^{-1}, puis retrouver $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{4}\right)$.

7 Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt[3]{2-2x}$

1) Etudier la dérivabilité de f.
2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,1]$ sur J que l'on précisera.
4) g étant la réciproque de f.
   a) Etudier la dérivabilité de g.
   b) Calculer $g'(x)$.
   c) Expliciter l'expression de $g(x)$.

8 Soit $f : \left]\frac{1}{2},1\right] \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 \pi x}$

1) Etudier la dérivabilité de f.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que f réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2},1\right]$ sur J que l'on précisera.
4) g étant la réciproque de f.
   a) g est elle dérivable en 1 et en $\frac{4}{3}$.
   b) Calculer $g'(x)$.

9 Soit $f :]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(x+1)$

1) a) Montrer que f réalise une bijection, soit h sa réciproque.
   b) Déterminer l'ensemble de continuité de h et son sens de variation. Construire C_h la courbe de h.
2) Montrer que h est dérivable en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et calculer $h'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.
3) a) Déterminer la fonction dérivée de h.
   b) Soit $p : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

10 Déterminer la fonction dérivée de p. Expliciter $p(x)$.

1) Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ définie par $f(x) = \sin x$.
   a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
   b) Calculer $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   c) Calculer $h(a) = f^{-1}(a) + f^{-1}(-a)$ pour $a \in [-1,1]$.
   d) Calculer $\sin\left[f^{-1}(x)\right]$et $\cos\left[f^{-1}(x)\right]$
2) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \cos x$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et déterminer le domaine de définition de g^{-1}.

b) Calculer $\cos[g^{-1}(x)]$ et $\sin[g^{-1}(x)]$.

c) Montrer que $g^{-1}(-x)=\pi-g^{-1}(x)$.

d) Soit $a\in[-1,1]$. Exprimer à l'aide de $g^{-1}(a)$ toutes les solutions de l'équation $\cos x=a$.

3) f^{-1} et g^{-1} étant les fonctions définies dans 1) et 2).

a) Montrer que $0\le\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\le\pi$.

b) Calculer $\cos\left[\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\right]$.

c) Monter que pour tout $x\in[-1,1]$; $f^{-1}(x)+g^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$.

11 Soit $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}:x\longmapsto f(x)=x+\sin^2 x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) a)Etudier les variations de f.

b) Déterminer les points d'abscisses $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ en les quels (C) est tangente aux droites d'équations : $y=x$ et $y=x+1$.

2) Soit $\varphi:\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}:x\longmapsto -x+\sin^2 x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

a) Etudier les variations de φ.

b) Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Déduire sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ la position de (C) par rapport à la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

B) Soit $g:\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}:x\longmapsto 1+\sin 2x$.

1) Montrer que g admet une fonction réciproque G définie sur J à préciser.

2) Calculer G(0), G(1) et G(2).

3) a) Sur quel ensemble K, G est elle dérivable.

b) Démontrer que pour tout $x \in K$; $G'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x(2-x)}}$.

4) Soit h la fonction définie sur $[0,2]$ par : $h(x) = \dfrac{x-1}{2} - G(x)$.

a) Etudier la dérivabilité de h aux points 0 et 2.
b) Dresser le tableau de variation de h.

12 Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+\sin \pi x}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J.

b) On note $g = f^{-1}$,calculer $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $g(-1-\sqrt{2})$.

2) a) Sur quel ensemble K, g est elle dérivable ? Déterminer $g'(x)$ pour $x \in K$.

b) Soit h la fonction définie sur $]\dfrac{\pi}{3}, \pi]$ par $h(x) = g(\cos x)$.

Montrer que h est dérivable et calculer $h'(x)$.

3) a) En utilisant le théorème des accroissements finis sur $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ pour la fonction g, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que :

$(1-\alpha)^2 (1-2\alpha) = \dfrac{1}{4\pi^2}$.

b) Trouver la limite éventuelle de $\dfrac{g(\alpha+t) - g(\alpha-t)}{t}$ quand t tend vers 0.

CORRIGES

1 Soit $f(x)=x^4-4x^2+1$ avec $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$

1) La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[0,\sqrt{2}\right]$ et on a pour tout $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$, $f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$

d'où le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1		-3

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\sqrt{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0,\sqrt{2}\right]$ sur $f\left(\left[0,\sqrt{2}\right]\right)=[-3,1]$.

2) On a pour tout $y\in[-3,1]$, il existe un unique $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ tel que $f(x)=y \Leftrightarrow x^4-4x^2+1=y$.

$\Leftrightarrow x^4-4x^2+4=y+3 \Leftrightarrow (x^2-2)^2=y+3$.

$\Leftrightarrow \left|x^2-2\right|=\sqrt{y+3}$ or $x\in\left[0,\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow 0\le x\le\sqrt{2} \Leftrightarrow 0\le x^2\le 2$

d'où $x^2-2\le 0$ et par suite $\left|x^2-2\right|=2-x^2$

donc $2-x^2=\sqrt{y+3} \Leftrightarrow x^2=2-\sqrt{y+3}$ or $x>0$

d'où $x=\sqrt{2-\sqrt{y+3}}$ et par suite $f^{-1}(y)=\sqrt{2-\sqrt{y+3}}$

3) Soit $g(x)=f(x)+4x-\sqrt{5}$ avec $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

La fonction g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[1,\sqrt{2}\right]$ et on a pour tout $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$

$g'(x)=4x^3-8x+4=4(x^3-2x+1)=4(x-1)(x^2+x-1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x^2+x-1=0$

$x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	1 $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}$
$x-1$	+
x^2+x-1	+
$g'(x)$	+

d'où

x	1 $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$\nearrow$

g est continue sur $\left[1,\sqrt{2}\right]$ et on a :

$g(1)=2-\sqrt{5}<0$; $g(\sqrt{2})=-3+4\sqrt{2}-\sqrt{5}>0$ d'où $g(1)\cdot g(\sqrt{2})<0$

donc il existe $\alpha\in\left]1,\sqrt{2}\right[$ tel que $g(\alpha)=0$ et comme g est strictement

croissante sur $\left[1,\sqrt{2}\right]$ donc g est une bijection sur $\left[1,\sqrt{2}\right]$ d'où l'unicité de α.

2 1) $f(0)=1$, $f'(x)=r(1+x)^{r-1}$ et $f'(0)=r$

L'équation de la tangente au point d'abscisse O est

$y=f'(0)\,x+f(0) \Rightarrow y=r\,x+1$.

2) L'approximation affine de f voisin de 0 est $f(x)\simeq r\,x+1=T(x)$

Soit $(1+x)^r \simeq r\,x+1$ donc $(1{,}002)^7=(1+0{,}002)^7=7\times 0{,}002+1=1{,}014$

et avec une calculatrice $(1{,}002)^7=1{,}0140842$.

3 1) $f(x)=x^3+x^2+x-1$.

a) f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+2x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et par suite f est une bijection sur IR

Montrons l'existence de la solution α pour l'équation $f(x)=0$

On a : f est continue sur $[0,1]$

$f(0)=-1$; $f(1)=2$ et par suite $f(0)\cdot f(1)<0$

Donc il existe $\alpha\in\left]0,1\right[$ tel que $f(\alpha)=0$ et comme f est une bijection d'où l'unicité de α et par suite l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,1\right[$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (E)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x}\geq 0 \\ x^2=\dfrac{1-x}{1+x} \end{cases} \quad (1)$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\dfrac{1-x}{1+x}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

Le système (1) équivaut à $\begin{cases} x \in]-1,1] \\ x \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{1-x}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x^2 = \dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$

$x^2 = \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow x^2 + x^3 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ avec $x \in [0,1]$

donc d'après (a) α est la seule solution de l'équation (E) car $\alpha \in]0,1[$.

2) a) $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ pour tout $x \in [0,1]$.

$Dg = [0,1]$

$x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ continue et positive sur $[0,1]$ donc $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est continue sur $[0,1]$.

• $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable et strictement positive sur $[0,1[$

d'où $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est dérivable sur $[0,1[$ et on a pour tout $x \in [0,1[$

$$g'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$$

d'où $g'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} < 0\ ;\ \forall x \in [0,1[$

et par suite g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

On a : g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [0,1]$

soit h sa bijection réciproque.

b) On a pour tout $y \in [0,1]$, il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que

$g(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ or $y \geq 0$ donc $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y^2(1+x) = 1 - x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$ d'où $h(y) = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$

ou encore $h(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1]$.

3) Soit $\beta \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\alpha = \cos 2\beta$.

Soit $K(x) = tgx - \cos 2x$, montrons que β est l'unique solution dans $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ de l'équation $k(x) = 0$.

$x \longmapsto tgx$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$ en particulier sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

$x \longmapsto \cos 2x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

donc $x \longmapsto k(x)$ est continue et dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et on a pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; $k'(x) = 1 + tg^2x + 2\sin 2x > 0$ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

La fonction $K(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $K\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[K(0), K\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [-1,1]$

Or $0 \in [-1,1]$ donc il existe un unique $c \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $K(c) = 0$

$\Leftrightarrow tgc - \cos 2c = 0 \Leftrightarrow tgc = \cos 2c = \dfrac{1 - tg^2c}{1 + tg^2c} = h(tgc)$.

Or h est la fonction réciproque de g donc $g(tgc) = tgc \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1 - tgc}{1 + tgc}} = tgc$

d'après 1) b) nécessairement $tgc = \alpha \Leftrightarrow \cos 2c = \alpha$

or $\alpha = \cos 2\beta$ d'où $\cos 2c = \cos 2\beta$

or c et $\beta \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ donc $C = \beta$

et par suite β est l'unique solution de l'équation $tgx - \cos 2x = 0$.

4

1) $Df = \mathbb{R}$.

- $x \longmapsto 2 - x$ est continue et positive sur $\left]-\infty, 0\right[$

donc $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ est continue sur $\left]-\infty,0\right[$ et $x \longmapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$ d'où f est continue sur $\left]-\infty,0\right[$.

- $f(x)=4x^3+x^2+x-1$ polynôme donc continue sur $\left[0,+\infty\right[$
et $\lim\limits_{0^+} f(x)=f(0)=-1$.
- $\lim\limits_{0^-} f(x)=\lim\limits_{0^-} x-\sqrt{2-x}=-\sqrt{2}\neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2) $x \longmapsto 2-x$ dérivable et strictement positive sur $\left]-\infty,0\right[$
alors $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $\left]-\infty,0\right[$ et $x \longmapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où f est dérivable sur $\left]-\infty,0\right[$ et $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$
sur $\left[0,+\infty\right[$ f est dérivable et $f'(x)=12x^2+2x+1$
f est discontinue en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

$$\begin{cases} f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x<0 \\ f'(x)=12x^2+2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

3) La restriction de f à l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ est continue et strictement croissante donc f réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur $f(\left]0,+\infty\right[)=\left]-1,+\infty\right[$ or $0\in\left]-1,+\infty\right[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]-1,+\infty\right[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,+\infty\right[$.
$f(0)=-1$ et $f(1)=5$ d'où $f(0)\cdot f(1)<0$ donc $\alpha\in\left]0,1\right[$

4) • g est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,0\right[$ donc g réalise une bijection de $\left]-\infty,0\right[$ sur $g(\left]-\infty,0\right[)=J$
$\lim\limits_{-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty} x-\sqrt{2-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{0^-} f(x)=-\sqrt{2}$
donc J= $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[$.

• $\begin{cases} g^{-1}(x)=y \\ x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}$

$g(y)=x \Leftrightarrow y-\sqrt{2-y}=x \Leftrightarrow \sqrt{2-y}=y-x$

ou encore $y-x\geq 0$ et $2-y=(y-x)^2$ soit $y^2-(2x-1)y-2+x^2=0$
et $y-x>0$

$\Delta=(2x-1)^2-4(-2+x^2)=-4x+9>0$ car $x<-\sqrt{2}<0$

$$y' = \frac{2x - 1 + \sqrt{9 - 4x}}{2} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{2x - 1 - \sqrt{9 - 4x}}{2}$$

Vérifions la condition $y - x \geq 0$:

pour $y'' = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{9 - 4x}}{2}$ on a $y'' - x = \dfrac{-1 - \sqrt{9 - 4x}}{2} < 0$

donc y'' à rejeter.

Pour $y' = \dfrac{2x - 1 + \sqrt{9 - 4x}}{2}$ on a $y' - x = \dfrac{-1 + \sqrt{9 - 4x}}{2}$

on a $x < -\sqrt{2}$ équivaut à $-4x > 4\sqrt{2}$

ou encore $-4x + 9 > 4\sqrt{2} + 9$

Soit $(-1) + \sqrt{-4x + 9} > \sqrt{4\sqrt{2} + 9} + (-1) > 0$ donc $y' - x > 0$

finalement $g^{-1}(x) = \dfrac{-1 + 2x + \sqrt{9 - 4x}}{2}$

5) $\forall x \in \left]-\pi, 0\right[$, $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = f \circ U(x)$

on pose $U(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ d'où $h = f \circ U$

U est dérivable sur $\left]-\pi, 0\right[$

f est dérivable sur $\left]-\infty, 0\right[$

et $U(x) = \dfrac{1}{\sin x} < 0$ d'où $U(x) \in \left]-\infty, 0\right[$.

donc h est dérivable sur $\left]-\pi, 0\right[$

$$h'(x) = U'(x) \cdot f'(U(x)) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2 - \dfrac{1}{\sin x}}} + 1 \right)$$

d'où $h'(x) = -\operatorname{cotg} x \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2\sin^2 x - \sin x}} \right)$

5 1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + x + \dfrac{1}{2}$.

$x \longmapsto x^2 - x + 1$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

d'où $x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $x \longmapsto x + \dfrac{1}{2}$

dérivable sur $\mathbb{R}$ par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+1$

$$f'(x)=\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$f'(x)=0$ équivaut à $2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}=0$ Soit $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}-x$

Ou encore $x^2-x+1=\dfrac{1}{4}-x+x^2$ et $\dfrac{1}{2}-x\geq 0$

D'où $1=\dfrac{1}{4}$ impossible donc $f'(x)\neq 0$.

f' est continue sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)\neq 0$ donc f' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ celui de $f'(0)=\dfrac{1}{2}>0$ donc $f'(x)>0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{2x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x)=\lim_{-\infty}\sqrt{x^2-x+1}+x+\frac{1}{2}=\lim_{-\infty}\frac{(x^2-x+1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{-\infty}\frac{x\left(-2+\frac{3}{4x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)}=1$$

2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1,+\infty[=J$.

$\forall x\in]1,+\infty[$ il existe qu'un seul $y\in\mathbb{R}$ tel que

$f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-y+1}+y+\dfrac{1}{2}=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-y+1}=x-y-\dfrac{1}{2}$

Ou encore $y^2-y+1=\left(x-y-\dfrac{1}{2}\right)^2$

D'où $y^2 - y + 1 = \frac{1}{4} + x^2 + y^2 - 2xy - x + y$

$y(-2+2x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ donc $y = \dfrac{x^2 - x - \frac{3}{4}}{2x-2}$

$\forall x \in]1, +\infty[$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - x - \frac{3}{4}}{2x-2}$.

3) $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{f'(0)} = 2$.

4) a) $x \longmapsto tgx$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = (1 + tg^2 x) f'(tgx) > 0$

car $1 + tg^2 x > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} tgx = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} g(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tgx = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6 1) Soit $h(x) = f(x) - (x+1)$, h continue sur $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$ et on a :

$h(-1) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0$ et $h\left(-\frac{2}{3}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que $h(x) = 0$

admet une solution $\alpha \in \left]-1,-\frac{2}{3}\right[$ $h(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha+1$

D'où l'équation $f(x)=x+1$ admet une solution $\alpha \in \left]-1,-\frac{2}{3}\right[$.

2) f est continue, dérivable sur $[-1,0]$ et $f'(x)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}x\cdot\cos\frac{\pi}{4}x$

$-1 \le x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}x \le 0$ donc $\cos\frac{\pi}{4}x > 0$ et $\sin\frac{\pi}{4}x \le 0$

Donc $f'(x) \le 0$ d'où :

x	-1		0
$f'(x)$	$-$		0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

• f est continue et strictement décroissante sur $[-1,0]$ et $f(-1)=\frac{1}{2}$

et $f(0)=0$ alors f réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

3) a) D'après la 1°) question $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}$ et $-\frac{2}{3}\in[-1,0]$

d'où $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{3}$.

f est dérivable en $-\frac{2}{3}$ et $f'\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\pi\sqrt{3}}{8}\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{4}$ et $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{-8}{\pi\sqrt{3}}$.

b) $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{f^{-1}(y)}{y}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$ et $f'(x)<0$ et on a : $f^{-1}(0)=0$

d'où f^{-1} n'est pas dérivable en 0.

4) f^{-1} n'est pas dérivable en 0.
f est dérivable sur $[-1,0[$ et pour tout $x\in[-1,0[$ on a : $f'(x)\neq 0$

alors f^{-1} est dérivable sur $f([-1,0[) = \left]0,\frac{1}{2}\right]$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$;

on pose $f^{-1}(y) = x$ d'où $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{2}{\pi \sin\frac{\pi}{4}x \cos\frac{\pi}{4}x}$

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{4}x = y \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}x = \pm\sqrt{y}$

or $\sin\frac{\pi}{4}x < 0$ donc $\sin\frac{\pi}{4}x = -\sqrt{y}$.

On sait que $\cos^2\frac{\pi}{4}x = 1 - \sin^2\frac{\pi}{4}x = 1 - y$

donc $\cos\frac{\pi}{4}x = \pm\sqrt{1-y}$ or $\cos\frac{\pi}{4}x > 0$ d'où $\cos\frac{\pi}{4}x = \sqrt{1-y}$

par suite $(f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{-\pi\sqrt{y}\cdot\sqrt{1-y}}$ donc $(f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{-\pi\sqrt{y-y^2}}$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}} = \frac{-8}{\pi\times\sqrt{3}}.$$

7 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2-2x \geq 0\} =]-\infty, 1]$

$x \longmapsto 2-2x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty,1[$

donc f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1}\frac{(2-2x)^{\frac{1}{3}}}{x-1} = \lim_{1} 2^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{-2}{3}} = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 1 d'où $D_{f'} =]-\infty,1[$.

2) $\forall x \in]-\infty,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{3}(2-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2) = \dfrac{-2}{3(2-2x)^{\frac{2}{3}}} < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty}(2-2x)^{\frac{1}{3}} = +\infty$. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(2-2x)^{\frac{1}{3}} = 0$.

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

3) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$

donc f réalise une bijection de $\left]-\infty,1\right]$ sur $\left[0,+\infty\right[=J$.

4) a) f est dérivable sur $\left]-\infty,1\right[$ et $f'(x)\neq 0$ alors g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(y)-g(0)}{y}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=0$

car $\lim\limits_{1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$ donc g est dérivable en 0

d'où $D_{g'}=\left[0,+\infty\right[$.

b) $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ $g'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ on pose

$=\dfrac{1}{f'(y)}=-\dfrac{3}{2}(2-2y)^{\frac{2}{3}}$

$f^{-1}(x)=y$

$x=f(y)$

$x=(2-2y)^{\frac{1}{3}}$

d'où $g'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$

et on a $g'(0)=0$.

c) $\begin{cases}f^{-1}(x)=y\\ x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\ y\in\left]-\infty,1\right]\end{cases}$

$f(y)=x \Leftrightarrow (2-2y)^{\frac{1}{3}}=x \Leftrightarrow 2-2y=x^3 \Leftrightarrow y=\dfrac{2-x^3}{2}$.

$\forall x\in\left[0,+\infty\right[$ $g(x)=1-\dfrac{1}{2}x^3$.

8

1) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\pi x}$

On a : $\dfrac{1}{2}<x\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<\pi x\leq\pi \Rightarrow -1\leq\cos\pi x<0$

donc $\cos\pi x\neq 0$ sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$, $x\longmapsto\cos\pi x$ dérivable et non nul sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$ donc f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$.

2) Pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right]$; $f'(x)=\dfrac{2\cos\pi x\sin\pi x}{\cos^4\pi x}=\dfrac{2\sin\pi x}{\cos^3\pi x}$

$x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \Leftrightarrow \pi x \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right] \Rightarrow \cos \pi x < 0$ et $\sin \pi x \geq 0$

d'où $f'(x) \leq 0$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \pi x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-$		0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

$f(1) = 1$; $\lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \cos \pi x = 0$.

3) f est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2},1\right]$

donc f réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2},1\right]$ sur $\left[1,+\infty\right[= J$.

4) a) • On a : $f(1) = 1 \Leftrightarrow g(1) = 1$

On sait que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$

$\lim\limits_{y\to 1} \frac{g(y)-g(1)}{y-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} = -\infty$ donc g n'est pas dérivable en 1.

- $g\left(\frac{4}{3}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \pi x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \cos^2 \pi x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos \pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ or $\cos \pi x < 0$

donc $\cos \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \pi x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\pi x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6} + 2k$ ou $x = \frac{-5}{6} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ or $x \in \left]\frac{1}{2},1\right]$ donc $x = \frac{5}{6}$.

f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},1\right]$ donc f est dérivable en $\frac{5}{6}$.

$f'\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \neq 0$ donc g est dérivable en $\frac{4}{3}$

et $g'\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{-3\sqrt{3}}{8}$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{f est dérivable sur } \left]\frac{1}{2},1\right[\\ \text{pour tout } x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\ f'(x)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\text{g est dérivable sur }]1,+\infty[\\ \text{et } g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\end{array}$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(y)}$ on pose $g(x)=y$ d'où $g'(x)=\frac{\cos^3\pi y}{2\sin\pi y}$

$g(x)=y \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=\frac{1}{\cos^2\pi y} \Leftrightarrow \cos^2\pi y=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2\pi y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \sin^2\pi y=1-\frac{1}{x}$

On sait que $\cos\pi y<0$ et $\sin\pi y>0$ donc $\cos\pi y=-\sqrt{\frac{1}{x}}$

et $\sin\pi y=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ d'où $g'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

9 1) a) f est continue et dérivable sur $]0,2[$.

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\left[1+tg^2\frac{\pi}{2}(x+1)\right]>0$ donc f est strictement croissante sur $]0,2[$ et continue donc f réalise une bijection de $]0,2[$ sur

$f<]0,2[>=\left]\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{2^-}f(x)\right[=J$

$\lim_{0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}tg\frac{\pi}{2}(x+1)=-\infty$ car $\lim_{0^+}\frac{\pi}{2}(x+1)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$

$\lim_{2^-}f(x)=\lim_{2^-}tg\frac{\pi}{2}(x+1)=+\infty$ car $\lim_{2^-}\frac{\pi}{2}(x+1)=\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$

donc $J=\mathbb{R}$.

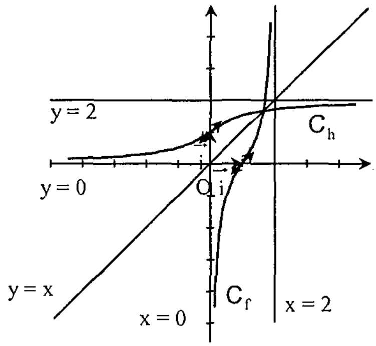
b) f est continue sur $]0,2[\ \Rightarrow$ h est continue sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur $]0,2[$

$\Rightarrow$ h est strictement croissante
sur $\mathbb{R}$

$C_h = S_\Delta(C_f)$; $\Delta : y = x$.

- $x = 0$ et $x = 2$ sont les asymptotes de C_f.
- $y = 0$ et $y = 2$ sont asymptotes de C_h.



2) $h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow tg\frac{\pi}{2}(x+1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(x+1) = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = 1 = -\frac{1}{3} + 2k$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} + 2k$, $k \in Z$ or $x \in]0,2[$ donc $x = \frac{2}{3}$ donc $h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

f est dérivable en $\frac{2}{3}$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} tg^2 \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \neq 0$

donc h est dérivable en $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $h'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}$.

3) a) $h'(x) = \frac{1}{f'(h(x))}$ on pose $h(x) = y$ ou encore $f(y) = x$

$h'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\left(1 + tg^2 \frac{\pi}{2}(y+1)\right)}$ et $tg\frac{\pi}{2}(y+1) = x$

d'où $h'(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$.

b) $p : IR^* \longrightarrow IR$; $x \longmapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

f est dérivable sur $]0,2[$ et pour tout $x \in]0,2[$ $f'(x) \neq 0$ donc h est dérivable sur IR .

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur IR^* d'où p est dérivable sur IR^* ;

$p'(x) = h'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) h'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$p'(x)=h'(x)-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{\pi\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{\pi(1+x^2)}-\frac{2}{\pi(x^2+1)}=0$$

donc p(x) est une constante, $p(x)=c$.

$p(1)=h(1)+h(1)=2h(1)$.

$h(1)=x \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow tg\frac{\pi}{2}(x+1)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(x+1)=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{2}+2k \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+2k$$

Or $x\in\left]0,2\right[$ donc $x=\frac{3}{2}$ d'où $h(1)=\frac{3}{2}$; $p(x)=2h(1)=3$.

10 1) a) f est dérivable sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x)=\cos x\geq 0$

$f'(x)=0$ équivaut à $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}$

donc f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ d'où f réalise une bijection de $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ par suite f^{-1} existe.

b) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x$ équivaut à $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ or $x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

d'où $x=\frac{\pi}{3}$ ainsi $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\pi}{6}$ et $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$

c) $h(a)=f^{-1}(a)+f^{-1}(-a)$

On pose $f^{-1}(a)=\alpha$ et $f^{-1}(-a)=\beta$ avec α et $\beta\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

ou encore $a=\sin\alpha$ et $-a=\sin\beta$

donc $\sin\alpha=\sin(-\beta)$ équivaut $f(\alpha)=f(-\beta)$

or f est une bijection d'où $\alpha=-\beta$ ou encore $\alpha+\beta=0$

soit $f^{-1}(a)+f^{-1}(-a)=0$ ainsi $h(a)=0$

d) $\sin(f^{-1}(x))=f(f^{-1}(x))=x$

$\cos^2\left[f^{-1}(x)\right]+\sin^2\left[f^{-1}(x)\right]=1$ or $\cos\left[f^{-1}(x)\right]\geq 0$

d'où $\cos\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt{1-x^2}$.

2) a) g est dérivable sur $[0,\pi]$ et $g'(x)=-\sin x\leq 0$

$g'(x)=0 \iff x=0$ ou $x=\pi$

g est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

donc g réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

ainsi g^{-1} existe et elle est définie sur $[-1,1]$.

b) $\cos(g^{-1}(x))=g\circ g^{-1}(x)=x$

on sait que $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $x\in[0,\pi]$ alors $\sin x\geq 0$

par suite $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ ainsi $\sin\left[g^{-1}(x)\right]=\sqrt{1-x^2}$

c) $g^{-1}(x)=\alpha$ et $g^{-1}(-x)=\beta$ avec α et $\beta\in[0,\pi]$

$x=g(\alpha)$ et $-x=g(\beta)$ ou encore $x=\cos\alpha$ et $-x=\cos\beta$

d'où $-\cos\alpha=\cos\beta$ soit $\cos\beta=\cos(\pi-\alpha)$

donc $\beta=\pi-\alpha$ par suite $g^{-1}(-x)=\pi-g^{-1}(x)$

d) $\cos x=a$ ou encore $\cos x=\cos(g^{-1}(a))$

équivaut à $x=g^{-1}(a)+2k\pi$ ou $x=-g^{-1}(a)+2k\pi$ avec $k\in Z$

3) a) On a : $-\frac{\pi}{2}\leq f^{-1}(x)\leq\frac{\pi}{2}$

ou encore $\frac{\pi}{2}\geq -f^{-1}(x)\geq -\frac{\pi}{2}$ en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ on obtient : $\pi\geq\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\geq 0$

b) $\cos\left[\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\right]=\sin\left[f^{-1}(x)\right]=x$.

c) Pour montrer que $f^{-1}(x)+g^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$ il suffit de prouver que

$\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$

$g\left(\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\right]=x$

$g(g^{-1}(x))=x$ D'où $g\left(\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)\right)=g(g^{-1}(x))$ or $\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)$ et

$g^{-1}(x)\in[0,\pi]$ et g est une bijection donc $\frac{\pi}{2}-f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$

11 **A/** 1) a) f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

et $f'(x)=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

or $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ donc $x=-\frac{\pi}{4}$.

- On a $-1\le\sin 2x\le 1$ donc $\sin 2x+1\ge 0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}+1$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+1$

b) On remarque que les deux droites ont le même coefficient directeur 1.

$$f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin 2x_0=1\\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x_0=0\\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x_0=k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x_0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases} \Leftrightarrow x_0=0 \text{ ou } x_0=\frac{\pi}{2} \text{ ou } x_0=-\frac{\pi}{2}$$

en $x_0=0$ le point O (0, 0) et $T_0: y=f'(0)x+f(0)$ d'où $T_0: y=x$

en $x_0=\frac{\pi}{2}$ le point $A\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+1\right)$ et $T_{\frac{\pi}{2}}: y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d'où $T_{\frac{\pi}{2}}: y=x+1$

en $x_0=-\frac{\pi}{2}$ le point $B\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+1\right)$ et $T_{-\frac{\pi}{2}}: y=x+1$

2) a) φ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi'(x)=-1+\sin 2x$

sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $-1\le\sin 2x\le 1$ donc $\sin 2x-1\le 0$

- $\sin 2x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$	$\searrow$			$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

b) $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ alors Si $x < \dfrac{\pi}{4}$ et φ strictement décroissante

alors $\varphi(x) > \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\varphi(x) > 0$.

Si $x > \dfrac{\pi}{4}$ et φ strictement décroissante alors $\varphi(x) < \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

d'où $\varphi(x) < 0$.

c) $T_{\frac{\pi}{4}} : y = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ d'où $T_{\frac{\pi}{4}} : y = 2x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$

Position de C et $T_{\frac{\pi}{4}}$:

$$f(x) - y = x + \sin^2 x - 2x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = -x + \sin^2 x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \varphi(x)$$

Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, $\varphi(x) > 0$ donc $f(x) > y$ d'où C est au-dessus de $T_{\frac{\pi}{4}}$

Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) < 0$ donc C est au-dessous de $T_{\frac{\pi}{4}}$.

B/ 1) g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 2\cos 2x$

$$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2x \ge 0$$

$$g'(x) = 0 \iff \cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

or $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
g'(x)	0	+	0
g(x)	0	$\nearrow$	2

g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

donc g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,2] = J$.

2) $g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow G(0) = -\frac{\pi}{4}$; $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow G(2) = \frac{\pi}{4}$;

$g(0) = 1 \Leftrightarrow G(1) = 0$.

3) a) g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et $g'(x) \neq 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

alors G est dérivable sur $]0,2[$.

Dérivable en 0 de G :

$$\lim_{y \to 0} \frac{G(y) - G(0)}{y} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\dfrac{g(x) - g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}}} = +\infty \text{ car } g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\lim_{y \to 2} \frac{G(y) - G(2)}{y - 2} = +\infty \text{ car } g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

donc G n'est pas dérivable ni en 0 ni en 2 ; d'où $K =]0,2[$.

b) Pour tout $x \in]0,2[$, $G'(x) = \dfrac{1}{g'(G(x))} = \dfrac{1}{g'(y)}$ avec $y = G(x)$

$G'(x) = \dfrac{1}{2\cos 2y}$ avec $y = G(x) \Leftrightarrow g(y) = x$

$g(y) = x \Leftrightarrow 1 + \sin 2y = x \Leftrightarrow \sin 2y = x - 1$

donc $\sin^2 2y = (x-1)^2$ or $\sin^2 2y = 1 - \cos^2 2y$

d'où $1 - \cos^2 2y = (x-1)^2$ par suite $\cos^2 2y = 1 - (x-1)^2$

$\Leftrightarrow \cos 2y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ ou $\cos 2y = -\sqrt{1-(x-1)^2}$

or $y \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ ou encore $2y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos 2y > 0$

Ainsi $\cos 2y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

Par suite $G'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-(x-1)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+2x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(2-x)}}$

4) a) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x-1}{2} - G(x) + \frac{1}{2} + G(0)}{x}$

$= \lim\limits_{0}\dfrac{1}{2} - \dfrac{G(x)-G(0)}{x} = -\infty$

Donc h n'est pas dérivable en 0.

• $\lim\limits_{2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim\limits_{2}\dfrac{1}{2} - \dfrac{G(x)-G(2)}{x-2} = -\infty$

Donc h n'est pas dérivable en 2.

b) $h(x) = \dfrac{x-1}{2} - G(x)$ est dérivable sur $]0,2[$.

$h'(x) = \dfrac{1}{2} - G'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x(2-x)}} = \dfrac{\sqrt{x(2-x)}-1}{2\sqrt{x(2-x)}}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} = 1 \Leftrightarrow x(2-x) = 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Si $x \in]0,1[$, h' est continue et $h'(x) \neq 0$.

Donc h' garde un signe constant d'où le signe de $h'(x)$ est le signe de

$h'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} < 0$ d'où $h'(x) < 0$.

Si $x \in]1,2[$ h' est continue et $h'(x) \neq 0$ donc h' garde un signe constant est celui de $h'\left(\frac{3}{2}\right)$ or $h'\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} < 0$ donc $h'(x) < 0$

x	0		1		2
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\searrow$			$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

$h(0)=-\frac{1}{2}-G(0)=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ et $h(2)=\frac{1}{2}-G(2)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

12 1) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)=\frac{\pi\cos\pi x}{(1+\sin\pi x)^2}$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ou encore $-\frac{\pi}{2}<\pi x<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos\pi x>0$

donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et comme elle est continue

d'où f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur $\left]\lim\limits_{-\frac{1}{2}} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=J=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

b) $g(-1)=x \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\sin\pi x}=-1 \Leftrightarrow \sin\pi x=-\frac{1}{2}$

or $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ donc $x=-\frac{1}{6}$

$g(0)=0$; $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$; $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ et $g\left(-1-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{4}$

2) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ alors g est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[=K$.

$\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ $g'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ on pose $f^{-1}(x)=y$

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{(1+\sin\pi y)^2}{\pi\cos\pi y}$ et $f(y)=x$

$f(y)=x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\sin\pi y}=x \Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{1+\sin\pi y}$

ou encore $1+\sin\pi y=\frac{1}{1-x}$ d'où $\sin\pi y=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$

comme $\cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y = 1$ alors $\cos^2 \pi y = 1 - \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$

or $\pi y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos \pi y \geq 0$ donc $\cos \pi y = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1-2x}{(1-x)^2}}$

par suite $g'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2}{\pi \cdot \dfrac{\sqrt{1-2x}}{(1-x)}} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-2x}\,(1-x)}$, $\forall x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

b) On pose $U(x) = \cos x$, $h(x) = g \circ U(x)$

• U est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$, g est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

• $\forall x \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ on a $-1 \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$ d'où $U(x) \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

par suite h est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

et $h'(x) = U'(x) \cdot g'(U(x)) = -\dfrac{\sin x}{\pi\sqrt{1-2\cos x}\,(1-\cos x)}$

3) a) • f est continue sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ alors g est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

donc g est continue sur $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$. et g est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$

alors il existe un réel $\alpha \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = \dfrac{g\left(\dfrac{1}{2}\right) - g\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}} = 2$

car $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-2\alpha}\,(1-\alpha)} = 2$ ou encore $\sqrt{1-2\alpha}\,(1-\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}$

Soit $(1-2\alpha)(1-\alpha)^2 = \dfrac{1}{4\pi^2}$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(\alpha+t) - g(\alpha-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{g(\alpha+t) - g(\alpha)}{t} + \dfrac{g(\alpha-t) - g(\alpha)}{-t}\right]$

1) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)=\frac{\pi\cos\pi x}{(1+\sin\pi x)^2}$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ou encore $-\frac{\pi}{2}<\pi x<\frac{\pi}{2}$ alors $\cos\pi x>0$

donc f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et comme elle est continue

d'où f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur

$\left]\lim\limits_{-\frac{1}{2}} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=J=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

b) $g(-1)=x \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\sin\pi x}=-1 \Leftrightarrow \sin\pi x=-\frac{1}{2}$

or $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ donc $x=-\frac{1}{6}$

$g(0)=0$; $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$; $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ et $g\left(-1-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{4}$

2) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ alors g est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[=K$.

$\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ $g'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ on pose $f^{-1}(x)=y$

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{(1+\sin\pi y)^2}{\pi\cos\pi y}$ et $f(y)=x$

$f(y)=x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\sin\pi y}=x \Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{1+\sin\pi y}$

ou encore $1+\sin\pi y=\frac{1}{1-x}$ d'où $\sin\pi y=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$

comme $\cos^2\pi y+\sin^2\pi y=1$ alors $\cos^2\pi y=1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

On sait que $\pi y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\pi y\geq 0$

Donc $\cos \pi y = \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1-2x}{(1-x)^2}}$

Par suite $g'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2}{\pi \cdot \dfrac{\sqrt{1-2x}}{(1-x)}} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-2x}\,(1-x)}$, $\forall x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

b) On pose $U(x) = \cos x$, $h(x) = g \circ U(x)$

• U est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$, g est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

• $\forall x \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ on a $-1 \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$ d'où $U(x) \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

par suite h est dérivable sur $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

et $h'(x) = U'(x) \cdot g'(U(x)) = -\dfrac{\sin x}{\pi\sqrt{1-2\cos x}\,(1-\cos x)}$

3) a) • f est continue sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ alors g est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$

Donc g est continue sur $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$. et g est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$

Alors il existe un réel $\alpha \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = \dfrac{g\left(\dfrac{1}{2}\right) - g\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}} = 2$

Car $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{6}$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-2\alpha}\,(1-\alpha)} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-2\alpha}\,(1-\alpha) = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow (1-2\alpha)(1-\alpha)^2 = \frac{1}{4\pi^2}$$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{g(\alpha+t) - g(\alpha-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{g(\alpha+t) - g(\alpha)}{t} + \dfrac{g(\alpha-t) - g(\alpha)}{-t}\right]$

$$= g'(\alpha) + g'(\alpha) = 2\,g'(\alpha) = 4$$

Chapitre IV
Etude de fonctions

Soit f une fonction, D son domaine de définition et C sa courbe

Représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Parité :

■ f est paire $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in D$ on a : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.

■ f est impaire $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in D$ on a : $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

■Conseil :Si f est paire ou impaire, le domaine d'étude est réduit à : $D \cap [0, +\infty[$

■ Interprétation géométrique :

Si f est paire alors C présente une symétrie par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.

Si f est impaire alors C présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

2) Périodicité :

■Définition : f est périodique de période T si et seulement si pour tout $x \in D$, on a : $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

■ Conseil : Si f est de période T, l'ensemble d'étude est réduit à un intervalle d'amplitude T contenu dans D.

■ Conséquence graphique :

La courbe de C de f s'obtient à partir de la portion de la courbe tracée sur l'intervalle par des translations successives de vecteur $k\vec{i}$ où k est un entier relatif.

3) Centre de symétrie :

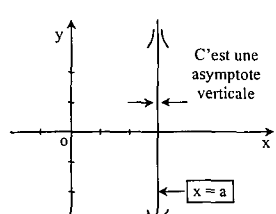
$A(a, b)$ est un centre de symétrie pour C si et seulement si pour tout $x \in D$.
$2a - x \in D$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

4) Axe de symétrie :

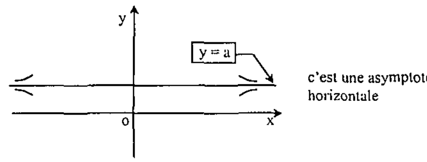
$\Delta : x = a$ est un axe de symétrie pour C si et seulement si pour tout $x \in D$,
$2a - x \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

5) Branches infinies :

■ Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à C_f quand $x \longrightarrow a$;



■ Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation : $y = a$ est une asymptote à C_f quand $x \longrightarrow \infty$;



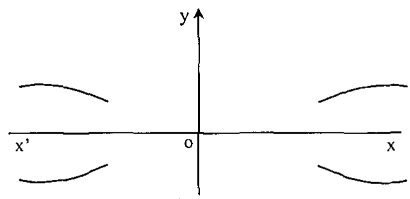
■ Si $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ et si la fonction s'écrit de la forme :

$f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ alors la droite d'équation :

$y = ax + b$ est une asymptote à C_f quand $x \longrightarrow \infty$.

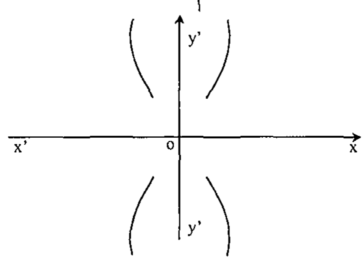
Si non : on calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

<u>1^er cas</u> : Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ dans ce cas la branche infinie est une branche parabolique de direction $(x \circ x')$.



<u>2^ème cas</u> : Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \{+\infty, -\infty\}$

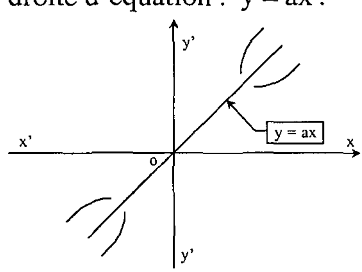
dans
ce cas, la branche infinie est une branche parabolique de direction $(y' \circ y)$.



<u>3^ème cas</u> : Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, on calcule $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] \cdot (a \neq 0)$

a) Si $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote à C_f au voisinage de ∞.

b) Si $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] \in \{+\infty, -\infty\}$ alors la branche infinie est une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = ax$.



ENONCES

1 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ repère orthonormé.

Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chaque cas :

a) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1}$ b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$ d) $f(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) On désigne par (T) la tangente à (C) en O.

Etudier la position de (C) par rapport à (T).

Déduire que O est un point d'inflexion de (C).

3) a) Déterminer les asymptotes à (C).

b) Construire (C).

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

Montrer que f^{-1} est dérivable sur J est calculer $(f^{-1})'(0)$.

3 On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D.

c) Etudier les variations de f.

2) Montrer que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f rencontre l'axe des abscisses en un seul point dont on déterminera son abscisse. En déduire le signe de $f(x)$.

3) a) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente T en I. Que peut-on déduire ?

c) Construire $(\mathbb{C})$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans D une solution unique α.

Vérifier que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$

4 Soit la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ de courbe représentative (ζ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm).

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f sur IR.

2) a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) en $x_0 = 2$.

b) Etudier la position relative de (T) et (ζ).

3) Démontrer que $\Omega(2\,;-1)$ est le centre de symétrie de (ζ).

4) Représenter graphiquement (ζ) et (T).

5) Justifier que $f(x) = 0$ admet trois racines $x_1 < x_2 < x_3$.

6) Discuter graphiquement de l'existence et du signe des solutions de $f(x) = m$ $(m \in \mathbb{R})$.

5 Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = x+1+\sqrt{x^2+2x}$ et (ζ) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et à gauche en -2.

c) Donner le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que la courbe (ζ) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$.

b) Etudier la position de (ζ) par rapport à (D) relativement à $\mathbb{R}_+$.

c) Construire la courbe (ζ)

6 Soit la fonction numérique définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm).

1) a) Démontrer que la droite (D) : $2y - x + 2 = 0$ est une asymptote à ζ en $+\infty$.

b) Justifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$; $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \le 1$.

En déduire la position relative de ζ et D sur $[1,+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

b) Interpréter ce résultat en terme de dérivabilité (à droite) pour f en $x_0 = 1$.

3) Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit $g(x) = x^2\sqrt{x^2-1} - 2$ définie sur $]1,+\infty[$.

a) Calculer $g(\sqrt{2})$.

b) *Montrer que g est strictement* croissante sur $]1,+\infty[$.

c) Déduire de ce qui précède , le signe de g sur $]1,+\infty[$.

4) a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f' est du signe de g sur $]1,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1,+\infty[$.

5) Représenter graphiquement la courbe (ζ) .

7 On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie pour la Courbe de f.

Soit g la restriction de f à $[2,+\infty[$.

3) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de g.

4) *Montrer que la courbe* (ζ') *de g admet une asymptote* quand x tend vers $+\infty$ Dont on donnera une équation.

5) Préciser la demi tangente à la courbe (ζ') au point d'abscisse 2.

Tracer la courbe (ζ') de g.

6) a) Montrer que g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Expliciter la fonction réciproque g^{-1} de la fonction g.

c) Tracer la courbe de g^{-1} *dans le même repère que la courbe* (ζ') de g.

8 Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x} - x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(ζ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point (-1).

2) Montrer que la courbe (ζ) admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 que l'on déterminera.

3) Etudier les variations de f et tracer la courbe (ζ).

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty,-1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera. Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.

b) Tracer la courbe (ζ') de g^{-1} dans un même repère $(O, \vec{i},\vec{j})$.

5) Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une seule solution réelle α.

c) Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

d) En déduire que (ζ) rencontre la droite Δ : y = x en un seul point.

9 Soit la fonction $f : IR \to IR ; x \mapsto x+\sqrt{x^2-2x}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les limites aux bornes de D_f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et 2.

c) Etudier les variations de f.

2) Soit (ζ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$ et soit la fonction g définie par $g(x) = x-\sqrt{x^2-2x}$, et on désigne par (ζ') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que (ζ) admet deux asymptotes à déterminer.
Vérifier que leur point d'intersection Ω a pour coordonnées (1, 1).

b) Montrer que (ζ') est le y symétrique de (ζ) par rapport à Ω.

3) Soit (H) la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 2x = 0$ dans le repère $(O, \vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $H = (\zeta) \cup (\zeta')$ b) Construire (H).

10 1) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{4-x}$ et construire sa courbe représentative (Γ) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i},\vec{j})$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}+\sqrt{4-x}$

a) Etudier la position de la courbe représentative (ζ) de f par rapport à (Γ).

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α dans l'intervalle $]-\infty,4]$ et vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[$.

d) Construire la courbe (ζ) dans le même repère $(O, \vec{i},\vec{j})$.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans$]0,4]$ une solution unique x_0.
Vérifier que $x_0 \in]\frac{7}{4};\frac{9}{4}[$.

4) On pose h (x) = f(4 cos x) pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}[$.

a) Démontrer que la fonction h réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note h^{-1} la fonction réciproque de h.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} en $\frac{1}{4}$.

c) Calculer $h(\frac{\pi}{3})$ et déterminer le nombre dérivée de h^{-1} en $(\frac{1}{2}+\sqrt{2})$.

11 Soit f la fonction définie par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle$]1, +\infty[$.
   a) Montrer que g est une bijection de $]1+\infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera (on note g^{-1} sa réciproque).
   b) Etudier la continuité et le sens de variation de la fonction g^{-1}.
   c) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$
   d) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(\frac{2}{3})$.
4) a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle$]1,+\infty[$ une solution unique α.
   b) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes respectives ζ_g et $\zeta_{g^{-1}}$.
5) Soit h la fonction définie sur$]0,\frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{cases} h(x)=g\left(\frac{1}{\cos x}\right) \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ h(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$
   a) Montrer que h est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.
   c) Déterminer l'expression de $h(x)$ pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$.

CORRIGES

1 a) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1}$; $D_f = [-1, +\infty[$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x+1} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$.

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{+\infty} 1+\sqrt{x+1} = +\infty$

donc ζ_f admet une Branche parabolique de direction la droite y = 1.

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$; $D_f = IR$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} 1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{+\infty} 1+\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{+\infty} 1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim\limits_{+\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

donc y = 2x est une asymptote au voisinage de $+\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

Donc y = 0 est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

c) $f(x) = x\sqrt{x-1}$ et $D_f = [1, +\infty[$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et * $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

donc ζ_f admet une Branche parabolique de direction (yy') en $+\infty$.

d) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f = IR$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

On déduit que y = x est une asymptote ζ_f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = +\infty$

b) $x \longmapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur IR

donc $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur IR est par suite

$x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur IR donc $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur IR et on a pour tout $x \in$ IR :

$$f'(x) = 1+\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = 1+\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0 .$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) $T : y = f'(0)\cdot x + f(0)$.

$f(0)=0$ et $f'(0)=2$ d'où $T : y = 2x$.

$$f(x)-2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x = \frac{x\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(-x^2)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

donc le signe de $f(x)-2x$ est celui de $(-x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-2x$	$+$	0	$-$
Position de (C) par rapport à (T)	(C) est au-dessus de (T)		(C) est au-dessous de (T)

On a $C \cap T = \{O(0,0)\}$.comme la courbe (C) traverse la tangente en O d'où O est un point d'inflexion pour (C)

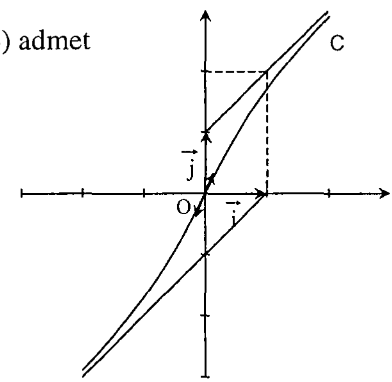
3) a) • On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie au voisinage de $(-\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1.$$

Donc la droite (D) d'équation : $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$.



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

4) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f<\mathbb{R}>=\mathbb{R}$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)\neq 0$; donc f^{-1} est dérivable sur $J=f<\mathbb{R}>=\mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

3

1) a) $D=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } 1-x^2>0\}=]-1,1[$

b) $x\longmapsto 1-x^2$ continue dérivable et strictement positive sur $]-1,1[$

Alors $x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ continue et dérivable sur $]-1,1[$

d'où f est continue et dérivable sur $]-1,1[$.

c) $\forall x\in]-1,1[,\ f'(x)=\dfrac{-\sqrt{1-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=\dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$

donc f est strictement décroissante sur $]-1,1[$.

2) $f(x)=0$ équivaut à $\sqrt{1-x^2}=x$ ou encore $1-x^2=x^2$ et $x\geq 0$

soit $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ d'où C rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse $\sqrt{\frac{1}{2}}$

si $x\in\left]-1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ alors $f(x)\geq 0$ et si $x\in\left[\sqrt{\frac{1}{2}},1\right[$ alors $f(x)\leq 0$

3) a) $\forall x\in]-1,1[,-x\in]-1,1[$ $\quad f(-x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$2-f(x)=2-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=f(-x)$$

donc $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour C

b) $T: y=f'(0)x+f(0)$ ou encore $T: y=-x+1$

$$f(x)-(-x+1)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+x-1=x\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

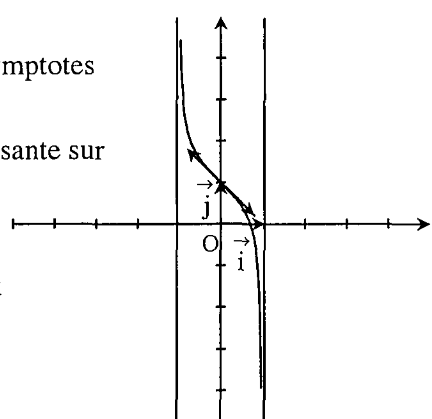
$$=\frac{-x^3}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

x	-1	0	1
$-x$	+	0	−
Position C et T	C au dessus de T		C au dessous de T

On en déduit que I est un point d'inflexion.

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

donc $x=-1$ et $x=1$ sont les asymptotes de C.



4) a) f est continue et strictement décroissante sur $]-1,1[$ donc f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=x$

ou encore $1-x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ équivaut à

$(1-x)^2 = \dfrac{y^2}{1-y^2}$ et y et $1-x$ ont le même signe par suite $y^2 = \dfrac{(1-x)^2}{1+(1-x)^2}$

soit $|y| = \dfrac{|1-x|}{\sqrt{1+(1-x)^2}}$ comme y et $1-x$ ont le même signe

Alors $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}$ ainsi $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

5) a) On pose $g(x) = f(x) - x$

g est dérivable sur $]-1,1[$ et $g'(x) = f'(x) - 1$ comme $f'(x) < 0$

Alors $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-1,1[$ comme g est continue sur $]-1,1[$

par suite g réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $g(]-1,1[) = \mathbb{R}$

car $\lim\limits_{-1^+} g(x) = \lim\limits_{(-1)^+} f(x) - x = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} g(x) = -\infty$

or $0 \in \mathbb{R}$, alors il admet qu'un seul antécédent $\alpha \in]-1,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ ou encore $f(\alpha) = \alpha$

$g(0) = f(0) = 1 > 0$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 0$ donc $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

b) • f est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

• f est dérivable sur

• $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \dfrac{3}{4} \leq 1 - x^2 \leq 1$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$

Alors $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \leq (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \leq 1$ donc $\dfrac{-8\sqrt{3}}{9} < 1 \leq \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

D'où $|f'(x)| \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

D'après le théorème des accroissements finis sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

on a pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$

$|f(x) - f(\alpha)| \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$ comme $f(\alpha) = \alpha$ $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$.

4 1) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$, de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) $f(2) = -1$ et $f'(2) = 3$ d'où l'équation de la tangente (T) à (ζ) en $x_0 = 2$ est $T : y = 3x - 7$.

b) $f(x) - (3x-7) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = -(x-2)^3$.

Pour $x > 2$; $-(x-2)^3 < 0$ donc ζ est au dessous de T.

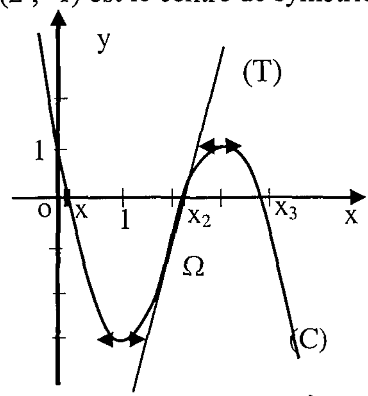
Pour $x < 2$; $-(x-2)^3 > 0$ donc ζ est au dessus de T.

3) On a : $f(4-x) = -(4-x)^3 + 6(4-x)^2 - 9(4-x) + 1 = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

D'autre part $-2 - f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ d'où $f(4-x) = -2 - f(x)$.

Donc $\Omega(2\,;-1)$ est le centre de symétrie de (ζ).

4)



5) f est une fontction continue sur IR en particulier sur $[0{,}1;0{,}2]$ et $f(0{,}1) \times f(0{,}2) < 0$ $\Big\}$ donc d'après le théoème des valeurs intermédiaires il existe $x_1 \in]0{,}1;0{,}2[$ tel que $f(x_1) = 0$

avec le même raisonnement on relève que :

* $x_2 \in]2{,}3\,;2{,}4[$ tel que $f(x_2) = 0$. * $x_3 \in]3{,}5\,;3{,}6[$ tel que $f(x_3) = 0$.

6) Les solutions, si elles existent de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (ζ) avec la droite variable d'équation $\Delta_m : y = m$.

1^er cas : si $m > 1$; l'équation admet une solution négative.

2^ème cas : si $m = 1$; $x = 0$ et $x = 3$.

3^ème cas : si $m \in]-3,1[$; il y a 3 solutions positives.

4^ème cas : si $m = -3$; $x = 1$ et $x = 4$.

5^ème cas : si $m \in]-\infty,-3[$; il y a une solution positive.

5

1) a) $D_g = \{x \in IR, \text{ tel que } x^2 + 2x \geq 0\} =]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\dfrac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}} = +\infty$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} 1+\dfrac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}} = -\infty$

Donc g n'est pas dérivable à gauche en -2.

c) La fonction $x \mapsto x^2 +2x$ est dérivable et strictement positive sur :
$I =]-\infty, -2[\cup]0,+\infty[$. Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$ est dérivable sur I et $x \mapsto x+1$ est dérivable sur IR en particulier sur I d'où g est dérivable sur I

et pour tout $x \in I$ on a $g'(x) = 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$.

* Si $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ alors $x \in]0,+\infty[$.
Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
* Si $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ alors $x \in]-\infty, -2[$.

$g'(x)= \dfrac{-1}{\left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right].\sqrt{x^2+2x}} < 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
g'(x)		$-$	‖		‖	$+$	
g(x)	0	↘	-1 ‖		‖ 1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+1-\sqrt{x^2+2x}} = 0$

2) a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc la courbe (ζ) admet une branche infinie,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}})=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-4x}{1-x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4+\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{1}{x}-1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)} = 2.$

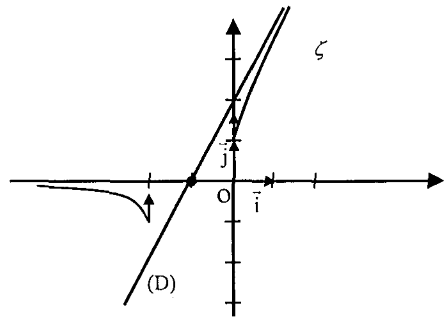
Donc la droite (D) d'équation : $y = 2x +2$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

b) Pour tout $x \in IR_+$; $g(x) - y = \sqrt{x^2+2x}-x-1 = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} < 0$.

Donc (ζ) est au dessous de la droite (D) pour tout $x \in IR_+$

c) • $y = 0$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

• La courbe (ζ) admet deux demi tangentes verticale aux points d'abscisse $x = -2$ et $x = 0$.



6 1) a) Pour démontrer que la droite d'équation : $2y - x + 2 = 0$ ou encore $y = \frac{1}{2}x - 1$ est une asymptote à ζ étudions :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\frac{1}{2}x-1)) = \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})} = 0^+$$

Donc la droite D est une asymptote oblique à la courbe ζ en $+\infty$.

b) Pour tout $x \in [1,+\infty[$; $\sqrt{x^2-1} \le x$ donc $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \le \frac{x}{x} \le 1$

c'est – à –dire que $1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \ge 0$ où encore que $f(x) - (\frac{1}{2}x-1) \ge 0$

Donc pour tout $x \in [1,+\infty[$, ζ est au dessus de D.

2) a) $$\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h-\frac{\sqrt{1+2h+h^2-1}}{1+h}-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^+}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{h^2+2h}}{h(1+h)}) = \lim_{h\to0^+}(\frac{1}{2}-\frac{h(h+2)}{h(1+h)\sqrt{h^2+2h}}) = \lim_{h\to0^+}(\frac{1}{2}-\frac{h+2}{(1+h)\sqrt{h^2+2h}}) = -\infty$$

b) Comme $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ n'a pas de limite finie quand h tend vers 0, f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$, mais on interprète ce résultat à l'aide d'une demi tangente verticale au point $(1 ; \frac{1}{2})$.

3) Etude de la fonction auxiliaire : $g(x) = x^2\sqrt{x^2-1} - 2$ sur$]1 ; +\infty[$.

a) $g(\sqrt{2}) = 0$

b) $$g'(x) = x^2\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 2x\sqrt{x^2-1} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} + 2x\sqrt{x^2-1}$$

$g'(x) = \frac{x(3x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x > 1$, $3x^2 - 2 > 0$ donc $g'(x) > 0$

D'où g est strictement croissante sur$]1 ; +\infty[$.

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

c) On déduit le signe de g à partir du tableau précédent :

* Si $x > \sqrt{2}$ alors $g(x) > g(\sqrt{2})$ donc $g(x) > 0$.

* Si $x < \sqrt{2}$ alors $g(x) < g(\sqrt{2})$ donc $g(x) < 0$.

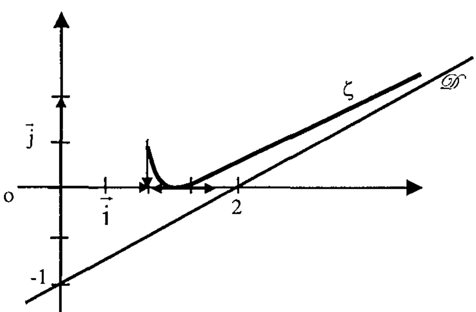
4) a) $$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Soit $f'(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}-2}{2x^2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5)



7 1) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

$D_f= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } x^2 -3x+2 \geq 0\} =]-\infty, 1] \cup [2,+\infty[$.

2) $x \in]-\infty,1] \cup [2,+\infty[\Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2 \Leftrightarrow -x > -1 \text{ ou } -x < -2$

$\Leftrightarrow 3-x > 2 \text{ ou } 3-x < 1 \Leftrightarrow 3-x\in]-\infty,1] \cup [2,+\infty[\Leftrightarrow 3 - x \in D_f$.

$f(3-x) = \sqrt{(3-x)^2-3(3-x)+2}=\sqrt{x^2-3x+2}=f(x)$

donc $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie .

3) $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est une fonction dérivable et strictement positive sur $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ en particulier sur $]2,+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ est dérivable sur $]2,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]2,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} > 0 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2} = +\infty ; f(2) = 0$$

x	2		+∞
g'(x)	‖	+	
g(x)	0	↗	+∞

4) On a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc ζ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-3x+2}-x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-3+\frac{2}{x})}{x\left[\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right]} = -\frac{3}{2}$$

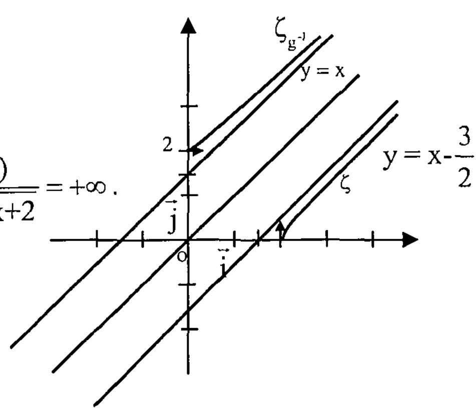
Donc la courbe (ζ') admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation :

$$y = x - \frac{3}{2}$$

5)
$$\lim_{x\to2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)\sqrt{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)\sqrt{x^2-3x+2}} = +\infty .$$

Donc g n'est pas dérivable en 2 et la courbe (ζ') admet une demi tangente verticale dirigé vers le haut au point (2,0)



6) a) g est continue est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ donc elle réalise une

bijection de $[2,+\infty[$ sur $g<[2,+\infty[> = [0,+\infty[$.

b) Soit $x \in [0,+\infty[$, cherchons $y \in [2,+\infty[$ tel que $g^{-1}(x) = y$.

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2-3y+2} \Leftrightarrow x^2 = y^2-3y+2$

$\Leftrightarrow y^2-3y+2-x^2 = 0.$

$\Delta = 9-4(2-x^2) = 1+4x^2 > 0$

Donc $y = \dfrac{3-\sqrt{1+4x^2}}{2} < \dfrac{3}{2}$ donc $y \notin [2,+\infty[$

Ou $y = \dfrac{3+\sqrt{1+4x^2}}{2} \geq 2$ donc $g^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{1+4x^2}}{2}$

c) La courbe de g^{-1} est la symétrique de celle de g par rapport à la première bissectrice.

8 $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x}-x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Pour étudier la continuité et la dérivabilité de f en (-1) il est nécessaire de les étudier à droite et à gauche de (-1).

* Continuité de f en -1 :

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} (\sqrt{x^2+x}-x-1) = 0 = f(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0.$

On a $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1)$ donc f est continue en (-1) .

* Dérivabilité de f en -1 :

• $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x^2+x-(x+1)^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+x}+x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+x}+x+1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+x}+x+1} = -\infty.$

Donc f n'est pas dérivable a gauche en -1.

• $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x^2+1)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 0$ d'où f est dérivable à droite en -1.

Donc f n'est pas dérivable en -1.

2) * $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1$

Donc la droite Δ_1 d'équation : $y = 1$ est une asymptote à la courbe (ζ)au voisinage de $(+\infty)$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x}-x-1) = +\infty$

Donc la courbe (ζ) admet une branche infinie au voisinage de $(-\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}) = -2$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x)+2x] = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x-1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}-x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{3}{2}$$

Donc la droite Δ_2 d'équation : $y = -2x-\frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe(ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

3) * Si $x \in]-\infty,-1]$; $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x-1$

$x \mapsto \sqrt{x^2+x}-x-1$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ en particulier sur $]-\infty,-1[$ et on a pour tout $x \in]-\infty,-1[$

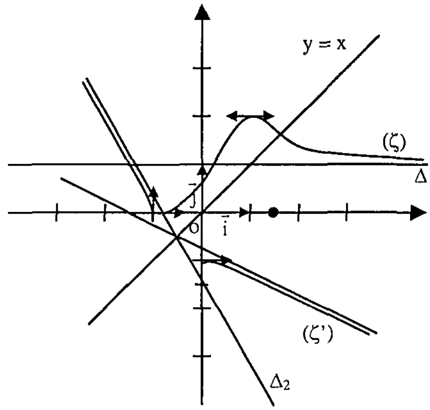
$$f'(x)= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1 < 0 \text{ car } 2x+1 < -1$$

* Si $x \in]-1,+\infty[$; $f(x)= \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ est dérivable sur IR en particulier sur $]-1,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2x^2+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1



4) a) La fonction g est la restriction de la fonction f sur $I =]-\infty,-1]$ est une fonction continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de I sur $g<]-\infty,-1]> = [0,+\infty[$.

b) $\zeta' = S_\Delta(\zeta)$ avec $\Delta : y = x$

5) $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

a) $D_h = \mathbb{R}$; h est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$h'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	0	+	
h(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$

b) D'après les variations de h on a : pour tout $x \in]-\infty, 1[$; $h(x) < 0$ donc $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1[$ la restriction de la fonction h sur $[1,+\infty[$ est une fonction continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.

$0 \in [-2,+\infty[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle $\alpha \in [1,+\infty[$.

c) $\left.\begin{array}{l} h(\frac{3}{2}) = -\frac{11}{8} ; h(2) = 1 \\ \text{h est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{en particulier sur } [\frac{3}{2},2] \end{array}\right\}$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

d) * Si $x \in]-\infty,-1]$.

Soit $M(x, y) \in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x} - x - 1 = x \\ y = x \end{cases}$

$$\sqrt{x^2+x} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x = (2x+1)^2 \\ x^2+x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3x+1 = 0 \text{ n'a pas de solution} \\ x^2+x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

* Si $x \in]-1,+\infty[$.

Soit $M(x, y) \in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} = x$ et $y=x$.

$x^2 +2x +1 = x^3 +x \Leftrightarrow x^3-x^2-x-1= 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$

cette équation admet une seule solution d'après 5) b)

Donc $\zeta \cap \Delta = \{1\text{point}\}$.

9

$f(x) = x + \sqrt{x^2-2x}$

1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 -2x \geq 0\}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f =]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x^2-2x}) = +\infty$$

b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}+1 = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{x(x-2)}{x.\sqrt{x^2-2x}}\right) = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\left(1+\frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}\right) = 1+\infty = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 2$.

c) f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

* si $x \in]2,+\infty[\Leftrightarrow x - 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$

* si $x \in]-\infty,0[\Leftrightarrow x - 1 < 0$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{>0}\underbrace{\sqrt{\left(\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\right)}}_{0}} < 0$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0		2	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc la droite Δ_1 : y=1 est une asymptote horizontale au voisinage de(-∞).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty} (-x+\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = -1$$

Donc la droite Δ_2 : y = 2x - 1 est une asymptote oblique à la courbe (ζ) au voisinage de (+∞).

Soit $\Omega(x,y) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ donc $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{\Omega(1,1)\}$

b) Montrons que $(\zeta') = S_\Omega(\zeta)$.

Soit M(x,y) ∈ P et M'(x', y') ∈ P.

$$S_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow M*M' = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+x'}{2} = 1 \\ \dfrac{y+y'}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-x' \\ y = 2-y' \end{cases}$$

$M(x, y) \in \zeta \Leftrightarrow y = x+\sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow 2 - y' = 2-x' + \sqrt{(2-x')^2-2(2-x')}$

$\Leftrightarrow -y' = -x' + \sqrt{x'^2-2x'} \Leftrightarrow y' = x'-\sqrt{x'^2-2x'}$

$\Leftrightarrow M'(x', y') \in (\zeta)$ d'où $S_\Omega(\zeta) = \zeta'$.

3) $H = \{M(x,y)$ tel que $y^2 - 2xy + 2x = 0\}$

$M(x, y) \in H \Leftrightarrow y^2 - 2xy + 2x = 0 \Leftrightarrow (y-x)^2 - x^2 + 2x = 0$

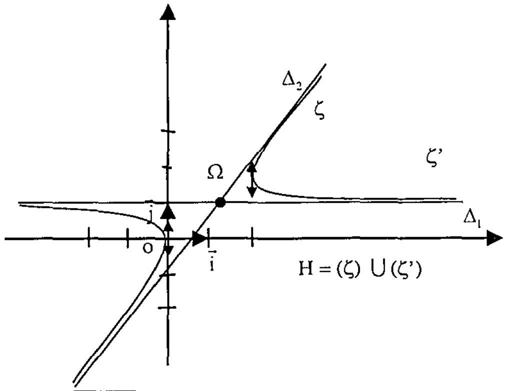
$$\Leftrightarrow (y-x)^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ |y-x| = \sqrt{x^2-2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[\\ y - x = \sqrt{x^2-2x} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[\\ y - x = -\sqrt{x^2-2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[\\ y = x + \sqrt{x^2-2x} = f(x) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[\\ y = x - \sqrt{x^2-2x} = g(x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M(x, y) \in \zeta$ ou $M(x, y) \in \zeta' \Leftrightarrow M(x, y) \in \zeta \cup \zeta'$ d'où $H = \zeta \cup \zeta'$.

b) La courbe (ζ) admet aux points (0,0) et (2,2) deux demi tangentes verticales dirigées vers le haut.



10 1) $g(x) = \sqrt{4-x}$; $Dg = \{x \in IR$, tel que $4-x \geq 0\} =]-\infty, 4]$.
La fonction g est continue sur $]-\infty,4]$ et dérivable sur $]-\infty,4[$
et on a pour tout $x \in]-\infty,4[$.

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} < 0$$

x	$-\infty$	4
g'(x)	-	||
g(x)	$+\infty$ ↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{4-x}{x^2}} = 0$

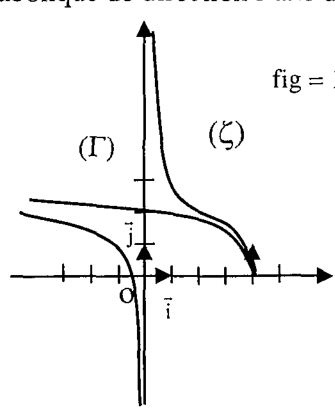
(car $\sqrt{x^2} = -x$ au voisinage de $-\infty$).
Donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ($-\infty$).

* Dérivable à gauche en $x_0 = 4$

$$\lim_{x\to4^-} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x\to4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to4^-} -\sqrt{\frac{4-x}{(4-x)^2}} = \lim_{x\to4^-} -\frac{1}{\sqrt{4-x}} = -\infty$$

d'où la courbe (Γ)admet à gauche au point A(4, 0) une demi tangente de vecteur directeur $\vec{j}$



2) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x}$; $D_f =]-\infty, 0[\cup]0,4]$

a) $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x}$

x	$-\infty$	0	4
$f(x)-g(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
Position de (ζ) par rapport à (Γ)	(Γ) est au dessus de (ζ)		(Γ) est au dessous de (ζ)

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{4-x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,4[$ et on a pour tout x $\in]-\infty,0[\cup]0,4[, f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}<0$

x	$-\infty$		0		4
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $f(4)=\dfrac{1}{4}$

c) D'après les variations de f on a :

* Pour tout x $\in]0,4]$; $f(x)>0$ donc $f(x)\neq0$ pour tout x $\in]0,4]$

* f est définie , continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$

Donc f réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $f<]-\infty, 0[>=$ IR

$0\in f<]-\infty, 0[>$ donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty, 0[$ une solution unique α.

<u>Conclusion :</u> L'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,4]$ une seule solution α

* $f(-\frac{1}{2})=-2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>0$ et $f(-\frac{1}{3})=-3+\sqrt{\dfrac{13}{3}}<0$

donc $f(-\frac{1}{2}).f(-\frac{1}{3})<0$ d'où $\alpha\in]-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}[$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{4-x}}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x(\frac{4}{x}-1)}{x\sqrt{4-x}})=0$

donc la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $(-\infty)$.

- *y = 0 est une asymptote à (ζ).*
- Dérivabilité en $x_0=4$.

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{4-x}-\frac{1}{4}}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\left[-\frac{1}{4x}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right]=-\infty$$

Donc la courbe (ζ) admet à gauche au point $(4,\frac{1}{4})$ une demie tangente de vecteur directeur $\vec{j}$.(voir Fig 1)

3) $f(x)= x \Leftrightarrow f(x) -x = 0$.

On pose $k(x)=f(x)-x$; pour tout $x \in]0,4]$.

Pour tout $x \in]0,4[$; $k'(x) = f'(x) -1 < 0$.

K est une fonction continue et strictement décroissante sur]0,4] donc elle réalise une bijection de]0,4] sur $k<]0,4]> - [k(4) ; \lim_{x\to0^+} k(x)[= [-\frac{15}{4};+\infty[$.

$0 \in k <]0, 4] >$ donc il existe un unique $x_0 \in]0,4]$ tel que $k(x_0)= 0$.

<u>Conclusion :</u> L'équation $f(x) = x$ admet dans]0,4] une unique solution x_0.

•$f(\frac{7}{4})=\frac{29}{14}$ d'où $k(\frac{7}{4})=\frac{29}{14}-\frac{7}{4}=\frac{9}{28}$.

$$f(\frac{9}{4})=\frac{4}{9}+\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}+\frac{\sqrt{7}}{2}\text{ d'où } k(\frac{9}{4})=\frac{-65+9\sqrt{7}}{36}<0$$

$k(\frac{7}{4}).k(\frac{9}{4})<0$ donc $x_0\in]\frac{7}{4},\frac{9}{4}[$.

4) a) $h(x) = f(4 \cos x)$; pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$

Pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$; $4\cos x\in]0,4]$ donc h est définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

* $u : x \mapsto 4 \cos x$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et f est dérivable sur]0,4[;

pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$; $u(x) \in]0,4[$.

Donc $x \mapsto h(x) = f(U(x))$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

et on a, pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$; $h'(x) = -4 \sin x\, f'(4 \cos x) >0$.

La fonction h est continue, et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

Donc elle réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $h < [0,\frac{\pi}{2}[>$

$= [h(0)\ ;\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x)[= [\frac{1}{4}, +\infty[$ car $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) Etudions d'abord la dérivabilité de h en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(4\cos x)-\frac{1}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{4\cos x}+\sqrt{4(1-\cos x)}-\frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{4\cos x}(\frac{1-\cos x}{x})+2\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}).$$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1-\cos x}{x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1-\cos x}{x^2}) = \frac{1}{2}$, d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \sqrt{2}$

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = \sqrt{2}$ par suite h^{-1} est dérivable en $h(0) = \frac{1}{4}$ et on a : $(h^{-1})'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $h(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$; $h(x) = \frac{1}{4\cos x} + \sqrt{4(1-\cos x)}$

$= \frac{1}{4\cos x} + 2\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ car $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

Or pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$; $\sin\frac{x}{2} > 0$ donc $h(x) = \frac{1}{4\cos x} + 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

$h'(x) = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$; pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

$h'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ d'où $(h^{-1})'(\frac{1}{2}+\sqrt{2}) = \frac{1}{h'(\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{2}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3}).$

11 $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1) $D_f = \{x \in IR$ tel que $x^2 - 1 > 0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [-1 - \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}] = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [-1 + \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}] = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}] = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1^-)} f(x) = -\infty$.

2) $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positif sur l'intervalle

$]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur cette intervalle .

Donc $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$.

et on a , pour tout $x \in]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$

d'où $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0$ pour tout $x \in]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$.

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
f '(x)		-	||	||	-	
f(x)	-2	↘	$-\infty$ ||	|| $+\infty$	↘	0

3) a) La fonction f est continue, définie et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur :
$g <]1,+\infty[> = f<]1,+\infty[> =]0,+\infty[= IR_+^* = I$.

b) g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ d'où g^{-1} est continue et strictement décroissante sur I.

c) Pour tout $x \in I$, il existe un seul $y \in]1, +\infty[$ tel que $g(y) = x$.

$g(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} = x+1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{y^2-1} = (x+1)^2$

$y^2 = (y^2 -1)(x+1)^2 \Leftrightarrow y^2(1-(x+1)^2 = -(x+1)^2$

$\Leftrightarrow y^2(-2x-x^2) = -(x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{(x+1)^2}{2x+x^2}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{2x+x^2}}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{2x+x^2}}$

or $y \in]1,+\infty[$ donc $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{2x+x^2}} = \dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x+x^2}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}$

(car $x+1 > 0$ pour $x \in I$) donc pour tout $x \in IR_+^*$

On a : $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}$.

d) g est dérivable sur $]1,+\infty[$; on a : $g'(x) = -\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \neq 0$, pour tout $x \in]1,+\infty[$ donc la fonction g^{-1} est dérivable sur IR_+^*.

$$\bullet g^{-1}(\frac{2}{3})=\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{5}{4}$$

$$g'(\frac{5}{4})=\frac{-1}{\left(\frac{25}{16}-1\right).\sqrt{\frac{25}{16}-1}}=\frac{-1}{\frac{9}{16}.\sqrt{\frac{9}{16}}}=\frac{-1}{\frac{27}{64}} \text{ donc } g'(\frac{5}{4})=-\frac{64}{27}$$

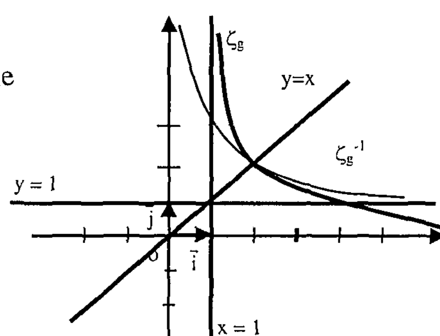
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ g \text{ est dérivable en } \frac{5}{4}\\ g'(\frac{5}{4})=-\frac{64}{27}\neq 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{donc } g^{-1} \text{est dérivable en } g(\frac{5}{4})=\frac{2}{3}\\ \text{et } (g^{-1})'(\frac{2}{3})=\frac{1}{g'(\frac{5}{4})}=-\frac{27}{64}\end{array}$$

4) a) On pose $k(x)= g(x) - x$; pour tout $x \in]1,+\infty[$.
$k'(x) = g'(x) - 1 < 0$; pour tout $x \in]1,+\infty[$.
k est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc k réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $h <]1, +\infty[> =] \lim\limits_{x\to+\infty} k(x), \lim\limits_{x\to1^+} k(x)[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} k(x) = \lim\limits_{x\to1^+} [f(x)-x] = +\infty$ d'où $k <]1, +\infty[> = IR$.

$0 \in IR$, donc il existe un unique $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $k(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow g(\alpha)-\alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$.



<u>Conclusion :</u> L'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]1,+\infty[$ une unique solution α.

b) • $x = 1$ est une asymptote à ζg.
• $y = 0$ est une asymptote à ζg au voisinage de $+\infty$.

5) a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(\frac{1}{\cos x})$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$; $\lim\limits_{X\to+\infty} g(X) = 0$ avec $X = \frac{1}{\cos x}$

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} [g(\frac{1}{\cos x})] = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x) = 0 = h(\frac{\pi}{2})$.

alors h est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) Soit $v : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ par suite $h(x) = g(v(x)) = g \circ v\,(x)$

$x \mapsto v(x)$ est dérivable sur $IR \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in Z\right\}$ en particulier sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$;

$x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in\ ]0, \dfrac{\pi}{2}[$; $V(x) \in]1,+\infty[$

donc $h(x) = g o v\,(x)$ est dérivable sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et on a : pour tout $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$;

$h'(x) = v'(x).\ g'(v(x))$.

$$h'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\left[\frac{-1}{\left(\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2 - 1\right).\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2 - 1}}\right]$$

$$h'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}.\frac{1}{tg^3 x} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}.\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

d'où $h'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$, pour tout $x \in\ ]0, \dfrac{\pi}{2}[$

c) Pour tout $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[; h(x) = g(\dfrac{1}{\cos x}) = -1 + \dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}}$

$= -1 + \dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{|tg x|} = -1 + \dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{tg x}$ (car pour $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ $tg\,x > 0$)

D'où $h(x) = -1 + \dfrac{1}{\sin x}$; pour tout $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$

Chapitre V

Fonctions primitives

■Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Une fonction F définie sur I est une primitive de f lorsque pour tout $x \in I$. $F'(x) = f(x)$.

■ Théorèmes :

Théorème 1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives.

Théorème 2 :

Si F est une primitive de f sur I alors, toute autre primitive G de f sur I s'écrit :
$G(x) = F(x) + c$ avec c étant une constante réelle.

Théorème 3 :

Si f est continue sur I alors il existe qu'une seule primitive F sur I prenant la valeur $F(x_0)$ en x_0.

Théorème 4

Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continue sur I une primitive de $h = \alpha f + \beta g$ est la fonction $H = \alpha F + \beta G$ avec F et G sont des primitives respectives de f et g sur I.

■Tableau des primitives usuelles :

($n \in \mathbb{Z}$, k une constante réelle) et $n \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$.

f(x)	Une primitive F(x)		f(x)	Une primitive F(x)
a $a \in \mathbb{R}$	$ax + k$		$\sin x$	$-\cos x + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$		$\cos x$	$\sin x + k$
x^n $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$		$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$		$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$		$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\,x+k$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+k$		$1+cotg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}$	$-cotg\ x+k$

■ Opérations sur les primitives :

F et G deux primitives de f et g définie sur I, $k \in \mathbb{R}$.

Fonctions	Primitives
$f+g$	$F+G+k$
$\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda F+k$
$f' \cdot f^n$ $n \neq -1 \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}+k$
$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f}+k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+k$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f+k$
$f'f^r$	$k+\frac{1}{r+1}f^{r+1}\quad (r \in \mathbb{Q})$ et $r \neq -1$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer une primitive d'une fonction sur l'intervalle I ?	* On commence par justifier son existence en s'assurant que f est continue sur I puis on cherche a reconnaître une formule de dérivation.
Comment déterminer toutes les primitives d'une fonction f sur un intervalle I ?	* On trouve une puis on ajoute une constante arbitraire
Comment déterminer l'unique primitive F_0 d'une fonction f sur I telle que $F_0(x_0) = Y_0$?	* On trouve une primitive F de f sur I. * On écrit F_0 sous la forme $F_0(x)=F(x)+k$ ou $k \in IR$ * On calcule la constante k pour que $F(x_0) = y_0$ soit vérifiée.

ENONCES

1 Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier cette réponse.

1) Si une fonction admet une primitive sur un intervalle I alors elle admet une infinité de primitive sur I.

2) La fonction f définie sur]-∞ , 0[par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'admet pas de primitive sur]-∞ , 0[.

3) Une primitive sur IR de $f(x) = x\cos x$ est $F(x) = \frac{x^2}{2}\sin x$

2 QCM

Indiquer la bonne réponse a, b ou c.

1) Soit $f(x) = 8x^3+1$ la primitive de f qui est nulle en 1 est :

$\boxed{a}$ $x^4 +1$ $\boxed{b}$ $2x^4 +x -3$ $\boxed{c}$ $3x^4 +1$

2) Soit $f(x) = 6\sin x\cos x$, les primitives de f sont :

$\boxed{a}$ $3\sin^2 x + k$ $\boxed{b}$ $3\cos^2 x + k$ $\boxed{c}$ $3\cos 2x + k$

(avec $k \in$ IR)

3) Soit g définie sur]0,+∞[par $g(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive sur]0,+∞[de la fonction f définie par :

$\boxed{a}$ $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $\boxed{b}$ $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ $\boxed{c}$ $f(x) = 1+ \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) Si F et G sont deux primitives d'une fonction f définie sur IR tel que $F(0) = -1$ et $G(0) = 1$ alors :

$\boxed{a}$ $F(1) = G(1)$ $\boxed{b}$ $F(1) > G(1)$ $\boxed{c}$ $F(1) < G(1)$

5) Si f est dérivable sur IR , g une primitive de f sur IR alors la dérivée de $g \circ f$ est :

$\boxed{a}$ $f' \times f \circ f$ $\boxed{b}$ $f \circ f$ $\boxed{c}$ $f \circ f'$

* Sur l'intervalle précisé, calculer une primitive des fonctions suivantes : (Exercice 3 à 7)

3 a) $f_1(x) = \frac{2}{3}x^6 - 3x^4 + x - 1$; $I = \mathbb{R}$; b) $f_2(x) = 5 - \frac{3}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$

c) $f_3(x) = 5x^4 - 10x + \frac{17}{x^2} - 10$; $I =]-\infty, 0[$; d) $f_4(x) = (3-2x)^{10}$; $I = \mathbb{R}$

4 a) $f(x) = \frac{15}{(1+x)^{16}}$ sur $I =]-1, +\infty[$;b) $g(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 2}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$

c) $h(x)=\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}$; $I=\left]-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[$; d) $k(x)=(x-1)^2(x+2)$; $I=\mathbb{R}$

5

a) $f_1(x)=3\cos x$ sur $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; b) $f_2(x)=\dfrac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$; $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

c) $f_3(x)=\dfrac{\cos x}{1-\cos^2 x}$; $I=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; d) $f_4(x)=\dfrac{-1}{\cos^2 x\mathrm{tg}^2 x}$; $I=\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

e) $f_5(x)=\mathrm{tg}^2 x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$ f) $f_6(x)=\mathrm{tg}^2 3x+\mathrm{tg}^4 3x$; $I=\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right[$

6

1) $f(x)=\dfrac{x}{(2x^2-2)^3}$; $I=]-\infty,-1[$; 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+2)^3}$; $I=]-2,+\infty[$

3) $f(x)=x^2(1+x)^7$; $I=\mathbb{R}$; 4) $f(x)=\cos^n x\cdot\sin x$; $I=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

7

1) $f(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt{x^2+1}}$; $I=[0,1]$ 2) $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^3-3x}}$; $I=[2,+\infty[$

3) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$; $I=]1,+\infty[$; 4) $k(x)=(x^2+1)\sqrt[4]{x^3+3x}$; $I=\mathbb{R}_+$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer un ou plusieurs intervalles sur les quels f admet des primitives (on ne demande pas de calculer ces primitives).

a) $f_1(x)=3x^4+12x^2$; b) $f_2(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{5x-1}}$; c) $f_3(x)=x-1-\dfrac{5}{(x+3)^2}$

d) $f_4(x)=\dfrac{2}{x^3-5x}$; e) $f_5(x)=\dfrac{1}{x}$

9 Soit $f:x\longmapsto\dfrac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$ définie sur $I=[3,+\infty[$.

1) Ecrire f(x) sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$.

2) Calculer les primitives de f sur I.

10 Linéariser $\cos^4 x$ puis déterminer les primitives de $x\longmapsto\cos^4 x$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

11 Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{1+\cos 2x}$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et de $\cos^3 x$

sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

12 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur I et en déduire deux primitives sur I de la fonction g dans chacun des cas suivants:

1) $I=]1,+\infty[$; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ et $g(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}$.

2) $I=]0,+\infty[$; $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\frac{1}{-2x\sqrt{x}}$.

13 Soit $f: x \longmapsto \frac{x^2+3x+3}{(2x+3)^2}$ définie sur $I=\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$

1) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x\in I$;

$f(x)=a+\frac{b}{(2x+3)^2}$

2) En déduire la primitive F de f qui vérifie $F(0)=2$.

14 Déterminer la primitive F de la fonction f prenant la valeur $y_0=F(x_0)$ lorsque $x=x_0$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=3x+\frac{1}{x^2}$; $I=]0,+\infty[$; $x_0=2$ et $y_0=1$

2) $f(x)=x^3(x^4-1)$; $I=\mathbb{R}$; $x_0=0$ et $y_0=-1$

3) $f(x)=2x-3-\frac{1}{x^3}$; $I=]0,+\infty[$; $x_0=1$ et $y_0=0$.

15 Soit $f(x)=\frac{x^2-2}{(x^2-3x+2)^2}$.

1) Vérifier que $(x^2-3x+2)^2=(x-2)^2(x-1)^2$.

2) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

$$f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-1)^2}.$$

3) Déterminer les primitives de f sur $]-\infty,1[$.

4) Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty,1[$ qui vaut $-\frac{5}{6}$ en -2.

16 Soit la fonction f définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=tg^2x-\sin^2 x$.

1) Montrer que pour tout $x\in I$, $f(x)=(tg^2x)\cdot(\sin^2 x)$

2) Montrer que la fonction F définie sur I par :

$F(x)=\frac{1}{4}(4\text{tg}x+\sin 2x-6x)$ est une primitive de f sur I.

3) Déterminer la primitive de f sur I qui prend la valeur 1 en 0.

17 Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ où $a>0$.

1) Montrer que si f est impaire alors les primitives de f sur $[-a,a]$ sont paires.

2) Montrer que si f est paire alors la primitive F de f telle que $F(0)=0$ est impaire.

18 Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive notée F de la fonction f, telle que $F(0)=0$.

2) Montrer que la fonction F est impaire.

3) Soit la fonction G : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$; $x\longmapsto F(\sin x)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$.

b) En déduire que : $\forall\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=x$.

c) Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4) Soit la fonction $H(x)=F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ et calculer $H'(x)$.

CORRIGES

1 1) Vrai : F une primitive de f sur I
$\Rightarrow$ F + constante sont des primitives de I.

2) Faux : $\left(\mathrm{Log}|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$ donc Log |x| est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur]-∞ , 0[

3) Faux : car $F'(x) = \left(\dfrac{x^2}{2}\sin x\right)' = x\sin x + \dfrac{x^2}{2}\cos x \neq f(x)$.

2 1) La réponse est $\boxed{b}$: $(2x^4 + x - 3)' = 8x^3 + 1$ et $2 \times 1^4 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

2) La réponse est $\boxed{a}$: $(3\sin^2 x + k)' = 6\sin x\cos x$.

3) La réponse est $\boxed{a}$: $g'(x) = (x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

4) La réponse est $\boxed{c}$: La fonction F – G = constante
$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) = -2 < 0$ donc $F(1) < G(1)$

5) La réponse est $\boxed{a}$: $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f = f' \times f \circ f$.

3 a) f_1 est une fonction polynôme donc définie et continue sur $\mathbb{R}$ alors f admet des primitives.

F_1 est une primitive de $f_1 \cdot F_1(x) = \dfrac{2}{21}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

b) La fonction $f_2(x) = 5 - \dfrac{3}{x^2}$ est définie et continue sur I donc f_2 admet une primitive F_2 telle que : $F_2(x) = 5x + \dfrac{3}{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

c) La fonction $f_3(x) = 5x^4 - 10x + \dfrac{17}{x^2} - 10$ est continue sur I donc f_3 admet des primitives, F_3 une primitive de f_3 sur I.

$F_3(x) = x^5 - 5x^2 - \dfrac{17}{x} - 10x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

d) f_4 est continue sur I, F_4 une primitive de f_4 sur I.

$$F_4(x) = \frac{1}{11}(3-2x)^{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{22}(3-2x)^{11}.$$

4 a) $f(x) = \dfrac{15}{(1+x)^{16}} = 15(1+x)^{-16}$.

f est continue sur $]-1,+\infty[$ alors elle admet des primitives.

F une primitive de f sur I; $F(x)=-(1+x)^{-15}+k$ d'où $F(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^{15}}+k$

b) $g(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+2}{x^2}=\dfrac{2x^3}{x^2}-\dfrac{5x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}=2x-5+\dfrac{2}{x^2}$.

g est continue sur I, G une primitive de g sur I; $G(x)=x^2-5x-\dfrac{2}{x}+k\,;k\in\mathbb{R}$.

c) $h(x)=\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}$ continue sur I, H une primitive de h, on remarque

que $h(x)$ est de la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ avec $U(x)=x^2+3x+1$

donc $H(x)=-\dfrac{1}{U(x)}+k=-\dfrac{1}{x^2+3x+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

d) k continue sur I, K une primitive de k sur I on développe k(x) :

$k(x)=(x^2-2x+1)(x+2)=x^3-3x+2$;

d'où $K(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

5 a) f_1 est continue sur I, F_1 une primitive de f_1 sur I.

$F_1(x)=3\sin x+k\,;k\in\mathbb{R}$.

b) f_2 est continue sur I, F_2 une primitive de f_2 sur I ; on remarque que f_2 est de la forme : $\dfrac{VU'-V'U}{V^2}$ avec $U(x)=x^2$ et $V(x)=\cos x$

donc $F_2(x)=\dfrac{U(x)}{V(x)}+k=\dfrac{x^2}{\cos x}+k$; $k\in\mathbb{R}$.

c) f_3 continue sur I, F_3 une primitive de f_3 sur I.

$f_3(x)=\dfrac{\cos x}{1-\cos^2 x}$ or $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

d'où $f_3(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; f_3 est de la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ avec $U(x)=\sin x$

d'où $F_3(x)=-\dfrac{1}{U(x)}+k=-\dfrac{1}{\sin x}+k$; $k\in\mathbb{R}$.

d) f_4 continue sur I ; F_4 une primitive de f_4 sur I.

$$f_4(x) = -\frac{1}{\cos^2 x \cdot tg^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \cdot \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

d'où $F_4(x) = \text{cotg}\, x + k$; $k \in \mathbb{R}$

e) f_5 continue sur I, F_5 une primitive de f_5 sur I.

$f_5(x) = (tg^2 x + 1) - 1$ d'où $F_5(x) = tgx - x + k$; $k \in \mathbb{R}$.

f) $f_6(x) = tg^2 3x + tg^4 3x = tg^2 3x(1 + tg^2 3x)$

$f_6(x)$ est de la forme $U^2 \cdot U'$ avec $U(x) = tg3x$

$$f_6(x) = \frac{1}{3}\, 3(1 + tg^2 3x) \cdot tg^2 3x$$

par conséquent une primitive de f_6 est $F_6(x) = \frac{1}{9} tg^3 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

6

1) $f(x) = x(2x^2 - 2)^{-3}$; on pose $U(x) = 2x^2 - 2$ et $U'(x) = 4x$

$f(x)$ s'écrit de la forme $\frac{1}{4} U'(x) \cdot U^{-3}(x)$ d'où F une primitive de f s'écrit :

$$F(x) = \frac{-1}{8} U^{-2}(x) + k = \frac{-1}{8}(2x^2 - 2)^{-2} + k \;;\; k \in \mathbb{R}.$$

2) $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^3} = (x-1)(x+2)^{-3}$. On peut écrire : $x - 1 = (x+2) - 3$

d'où $f(x) = [(x+2) - 3](x+2)^{-3} = (x+2)^{-2} - 3(x+2)^{-3}$

une primitive de f est : $F(x) = -(x+2)^{-1} + \frac{3}{2}(x+2)^{-2} + k$; $k \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{2(x+2)^2} + k.$$

3) $f(x) = x^2(1+x)^7$

On a : $(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$ donc $x^2 = (1+x)^2 - 2x - 1$

ou encore $x^2 = (1+x)^2 - 2(x+1) + 1$ d'où :

$$f(x) = [(1+x)^2 - 2(x+1) + 1](1+x)^7 = (1+x)^9 - 2(x+1)^8 + (1+x)^7$$

F une primitive de f : $F(x) = \frac{1}{10}(1+x)^{10} - \frac{2}{9}(1+x)^9 + \frac{1}{8}(1+x)^8 + k$; $k \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = \cos^n x \cdot \sin x$ on pose $U(x) = \cos x$, $U'(x) = -\sin x$

donc $f(x) = -U^n(x) \cdot U'(x)$, F est une primitive de f ;

$$F(x)=-\frac{1}{n+1}U^{n+1}+k=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x)+k\ ;\ k\in\mathbb{R}.$$

7 1) On pose $U(x)=x^2+1$ alors $U'(x)=2x$.

On sait que $\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ a une primitive qui est $2\sqrt{U(x)}+k$

par conséquent, une primitive de f(x) est :

$$F(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{x^2+1}\right)+k=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}+k\ ;\ k\in\mathbb{R}.$$

2) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{x^3-3x}}$ est de la forme $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$

avec $U(x)=x^3-3x$ par conséquent une primitive de g(x) est

$$G(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(2\sqrt{x^3-3x}\right)+k=\frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x}+k\ ;\ k\in\mathbb{R}.$$

3) De même pour $h(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ avec $U(x)=4x-3$

d'où $H(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-3}+k\ ;\ k\in\mathbb{R}.$

4) $k(x)=(x^2+1)(x^3+3x)^{\frac{1}{4}}$.

On pose $U(x)=x^3+3x$ et $U'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$

Donc $k(x)=\dfrac{1}{3}U'(x)\cdot U^{\frac{1}{4}}(x)$

d'où une primitive de k est $K(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{4}+1}\dfrac{1}{3}\cdot U^{\frac{1}{4}+1}(x)$

par suite $K(x)=\dfrac{4}{15}(x^3+3x)^{\frac{5}{4}}$

8

a) f_1 fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et f_1 admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) f_2 n'est définie et continue que pour les valeurs réelles x telles que

$5x-1>0$ alors f_2 admet des primitives sur $\left]\dfrac{1}{5},+\infty\right[$.

c) f_3 n'étant pas définie et continue quand $x=-3$ alors f_3 admet des primitives sur les deux intervalles $I_1 =]-\infty, -3[$ et $I_2 =]-3, +\infty[$.

d) On a : $x^3 - 5x = x(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

f_4 n'est définie et continue que si $x^3 - 5x \geq 0$.

La fonction f_4 admet des primitives sur les quatre intervalles ;

$I_1 =]-\infty, -\sqrt{5}[$; $I_2 =]-\sqrt{5}, 0[$; $I_3 =]0, \sqrt{5}[$ et $I_4 =]\sqrt{5}, +\infty[$.

e) f_5 est rationnelle définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc f_5 admet des primitives sur les intervalles : $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

9 1) $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-2)^2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)^2 + c}{(x-2)^2}$.

En développant on obtient : $f(x) = \dfrac{ax^3 + (b-4a)x^2 + 4(a-b)x + 4b + c}{(x-2)^2}$

par identification on obtient : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 3$

d'où $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

2) f est continue sur $[3, +\infty[$, F une primitive de f sur I,

$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{x-2} + k$; $k \in \mathbb{R}$.

10 $\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6)$

$= \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8} = f(x)$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

F est une primitive de f d'où $F(x) = \dfrac{1}{32}\sin 4x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{3}{8}x + k$; $k \in \mathbb{R}$.

11 On pose $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos 2x}$; on sait que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

donc $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$ or une primitive de $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ est $\operatorname{tg} x$

ainsi F une primitive de f s'écrit: $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + k$; $k \in \mathbb{R}$.

- On pose $g(x) = \cos^3 x = \cos x(\cos^2 x) = \cos x(1 - \sin^2 x)$

ainsi $g(x) = \cos x - \cos x \cdot \sin^2 x$.

g étant continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, G une primitive de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

alors $G(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+k$; $k\in\mathbb{R}$.

12 1) $f'(x)=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$. On a $f'(x)=g(x)$.

On peut donc prendre deux primitives sur $I=\left]1,+\infty\right[$ de la fonction g(x) par exemple: $G_1(x)=f(x)+1$ et $G_2(x)=f(x)-1 \Rightarrow G_1(x)=\frac{2x}{x-1}$

et $G_2(x)=\frac{2}{x-1}$.

2) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x)=g(x)$

Sur $\left]0,+\infty\right[$, on peut prendre deux primitives de la fonction g, par exemple: $G_1(x)=f(x)+2$ et $G_2(x)=f(x)-3$.

$\Rightarrow G_1(x)=\frac{1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+3x}{x}$ et $G_2(x)=\frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2x}{x}$

13 1) $\frac{x^2+3x+3}{(2x+3)^2}=\frac{a(2x+3)^2+b}{(2x+3)^2}=\frac{4ax^2+12ax+9a+b}{(2x+3)^2}$

Par identification, on obtient: $a=\frac{1}{4}$ et $b=\frac{3}{4}$ d'où $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2x+3)^2}$.

2) F est une primitive de f sur I, $F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{8(2x+3)}+k$

$F(0)=2 \Leftrightarrow -\frac{3}{24}+k=2 \Rightarrow k=\frac{17}{8}$ d'où $F(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{8(2x+3)}+\frac{17}{8}$

14 1) Toute primitive de f sur $\left]0,+\infty\right[$ est définie par $F(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{x}+k$.

La primitive qui prend la valeur 1 pour $x=2$ est celle qui vérifie $F(2)=1$.

$F(2)=1 \Leftrightarrow 6-\frac{1}{2}+k=1 \Leftrightarrow k=\frac{-9}{2}$ d'où $F(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}-\frac{9}{2}$.

2) On peut écrire $f(x)=\frac{1}{4}(4x^3)(x^4-1)$, on obtient : f(x) est de la forme :

$\frac{1}{4}U'(x)\cdot U(x)$ avec $U(x)=x^4-1$ et $U'(x)=4x^3$, une primitive de f est donc : $F(x)=\frac{1}{8}U^2(x)+k=\frac{1}{8}(x^4-1)^2+k\ ;\ k\in\mathbb{R}$.

Mais $F(0)=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}+k=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{9}{8}$ d'où $F(x)=\frac{1}{8}(x^4-1)^2-\frac{9}{8}$

3) Une primitive de $f(x)=2x-3-\frac{1}{x^3}$ sur I est $F(x)=x^2-3x+\frac{1}{2x^2}+k$

$F(1)=0 \Leftrightarrow -2+\frac{1}{2}+k=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$ d'où $F(x)=x^2-3x+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$.

15 1) $(x-2)^2(x-1)^2=[(x-2)(x-1)]^2=[x^2-3x+2]^2$.

2) $f(x)=\frac{x^2-2}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{x^2-2}{(x-2)^2(x-1)^2}$

$$f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+b(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-2a-4b)x+a+4b}{(x-2)^2(x-1)^2}.$$

Par identification on obtient: $b=-1$ et $a=2$ d'où $f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$

3) Les primitives de f sont : $-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+k\ ;\ k\in\mathbb{R}$.

4) F une primitive de f donc $F(x)=\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+k$.

$F(-2)=\frac{-5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+k=-\frac{5}{6}$ d'où $k=-1$ donc $F(x)=\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{x-1}-1$

16 1) $f(x)=tg^2x-\sin^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\sin^2x=\sin^2x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)$

$$=\sin^2x\left(\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\right)=\sin^2x\cdot\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\sin^2x\cdot tg^2x.$$

2) $F(x)=\frac{1}{4}(4tgx+\sin 2x-6x)$ dérivable sur I et

$$F'(x)=\frac{1}{4}\left[4(1+tg^2x)+2\cos 2x-6\right]=1+tg^2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}$$

$$=tg^2x+\frac{1}{2}(\cos 2x-1)=tg^2x+\frac{1}{2}(-2\sin^2x)=f(x)$$

donc F est une primitive de f.

3) Les primitives de f sont :

$F_a(x)=\frac{1}{4}(4\text{tg}x+\sin 2x-6x)+a$ avec $a\in\mathbb{R}$ or $F_a(0)=1\Leftrightarrow a=1$

d'où la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0

c'est $\frac{1}{4}(4\text{tg}x+\sin 2x-6x)+1$.

17 1) On pose $\varphi(x)=F(x)-F(-x)$ avec F est une primitive de f.

φ est dérivable sur $[-a,a]$ et $\varphi'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)$

comme f est impaire alors on a $f(-x)=-f(x)$ par suite $\varphi'(x)=0$

donc $\varphi(x)=\varphi(0)=F(0)-F(0)=0$ d'où $F(x)=F(-x)$ donc F est paire.

2) On pose $p(x)=F(x)+F(-x)$ où F vérifie $F'(x)=f(x)$ et $F(0)=0$

$p'(x)=F'(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)$ comme f est paire

alors $p'(x)=0$ par suite $p(x)=p(0)=F(0)+F(0)=0$

d'où $\forall\ x\in[-a,a]$; $F(-x)=-F(x)$ par suite F est impaire.

18 1) $x\longmapsto 1-x^2$ continue et strictement positive sur $]-1,1[$.

Alors $x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$

donc il existe qu'une seule primitive F telque $F(0)=0$.

2) $\forall\ x\in]-1,1[$ on a $-x\in]-1,1[$, on pose

$p(x)=F(-x)+F(x)$ alors $p'(x)=-f(-x)+f(x)=0$ car

$f(-x)=f(x)$ donc $p'(x)=0$, par suite $p(x)=p(0)=F(0)+F(0)=0$

donc $F(-x)=-F(x)$ on en déduit que F est impaire.

3) a) $x\longmapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

F est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin x\in]-1,1[$

Alors G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $G'(x)=\cos x\cdot F'(\sin x)=\cos x\cdot f(\sin x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}$

or $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $G'(x)=1$

b) $\forall\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x)=1$ alors $G(x)=x+C$ avec $C\in\mathbb{R}$

d'une part $G(0)=C$ d'autre part $G(0)=F(0)=0$

donc $C=0$ on déduit que $G(x)=x$.

c) $F\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=G\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$ et $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=F\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=F\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=G\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

4) • $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Donc $x\longmapsto\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

• F est dérivable sur $]-1,1[$.

• Vérifions que $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\in]-1,1[$.

On sait que pour $x>0$ et $x\neq 1$ on a $\left(\sqrt{x}-1\right)^2>0$ et $\left(\sqrt{x}+1\right)^2>0$

Donc $x-2\sqrt{x}+1>0$ et $x+2\sqrt{x}+1>0$

$x+1>2\sqrt{x}$ et $2\sqrt{x}>-x-1\Leftrightarrow -x-1<2\sqrt{x}<x+1$ or $x+1>0$

$-1<\frac{2\sqrt{x}}{x+1}<1$ donc $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\in]-1,1[$ pour tout $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

Donc H est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

$$H'(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \text{comme} \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}=\frac{1+x}{\sqrt{(1-x)^2}}=\frac{1+x}{|1-x|}$$

d'où $H'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{|1-x|}=\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|}$

Si $x\in]0,1[$ alors $H'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

Si $x\in]1,+\infty[$ alors $H'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}$

Chapitre VI

Fonctions Logarithmes

■ Définition :

La fonction **Logarithme népérien**, notée « **Log** » ou « **Ln** » est la primitive de fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur]0 , +∞[qui s'annule en 1 .

■ Conséquences :

Log est définie et dérivable sur]0 ; +∞[pour tout $x \in]0 ; +\infty[$

$(\text{Log}(x))' = \frac{1}{x}$ et $\text{Log}1 = 0$

■ Propriétés algébriques :

Pour tout réels a et b strictement positifs, on a :

- $\boxed{\text{Log}(ab) = \text{Log}a + \text{Log}b}$
- $\boxed{\text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}a - \text{Log}b}$
- $\boxed{\text{Log}\left(\frac{1}{b}\right) = -\text{Log}b}$
- $\boxed{\text{Log}\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\text{Log}a}$
- $\boxed{n \in Z,\ \text{Log}\left(a^n\right) = n\text{Log}a}$
- $\boxed{\text{Log}\left(a^r\right) = r\text{Log}a \quad (r \in Q)}$

■ Limites :

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \text{Log}x = +\infty}$
- $\boxed{\lim_{0^+} \text{Log}x = -\infty}$
- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0}$
- $\boxed{\lim_{0^+} x\text{Log}x = 0}$
- $\boxed{\lim_{0} \frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1}$

■ Sens de variation :

La fonction Log est une bijection, $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x} > 0$ donc « Log » est strictement croissante sur]0 ; +∞[dans IR

On en déduit : Pour tout réel a et b strictement positifs :

* $\text{Log}a = \text{Log}b \Leftrightarrow a = b$ * $\text{Log}a > \text{Log}b \Leftrightarrow a > b$

* $\text{Log}a > 0 \Leftrightarrow a > 1$ * $\text{Log}a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Tout réel y admet un unique antécédent par la fonction Log ; en particulier on appelle e l'unique antécédent de 1

$\text{Log}e = 1$ et $2{,}718 < e < 2{,}719$

■ Dérivée de Log ° U :

La fonction Log ° U est définie sur tout intervalle I sur lequel $U(x) > 0$

Si de plus U est dérivable sur I alors la fonction Log ° U est dérivable sur I

et $(\text{Log}\circ U)' = \dfrac{U'}{U}$

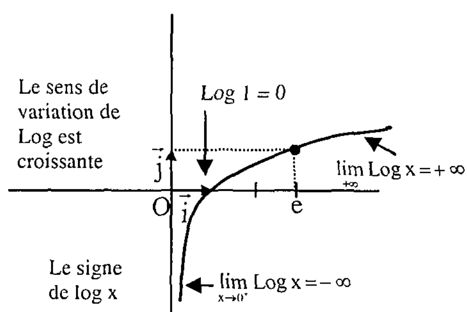
■ Primitives de $\dfrac{U'}{U}$:

Si U est une fonction dérivable, ne s'annulant pas sur un intervalle I, alors la fonction $\dfrac{U'}{U}$ admet sur I des primitives de la forme $\text{Log}|U| + c$ (c constante)

■ Logarithme décimal :

- La fonction Logarithme décimal, notée log est la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $\text{Log}\,x = \dfrac{\text{Log}\,x}{\text{Log}\,10}$
- La fonction logarithme décimal a les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien.
- Remarque : $\text{Log}\ 10 = 1$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment retrouver les propriétés de la fonction logarithmes a partir de sa courbe représentative ?	
Comment résoudre une équation ou une inéquation comportant des logarithmes ?	1) On détermine l'ensemble des réels pour les quels les expressions sont définies. 2) On se ramène lorsque c'est possible à la forme $\text{Log}(u(x)) = \text{Log}\ (v(x))$ (où $\text{Log}\ (u(x)) \geq \text{Log}(v(x))$) puis on résoudre $u(x) = v(x)$ (où $u(x) \geq v(x)$) 3) Si on a des x et des Log x on utilise les variations d'une fonction

Comment étudier la dérivabilité de Log(u(x)) sur un intervalle I ?	1) Vérifier que $u(x) > 0$ sur I. 2) On justifie la dérivabilité de u sur I 3) On utilise le théorème $(\text{Log } u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
Comment calculer une limite en $+\infty$?	1) On examine si on se trouve dans une situation de forme indéterminée. 2) Si oui, on tente la factorisation pour se ramener à $\dfrac{\log x}{x^n} = \dfrac{\text{Log } x}{x} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}}$ où $\dfrac{(\text{Log } x)^n}{x} = \left(\dfrac{\frac{1}{n} \text{Log } x^{1/n}}{x^{1/n}} \right)^n$ si non on factorise à l'intérieur de l'écriture de Log (Exp : $\dfrac{\log(x^2+x+1)}{x} = \dfrac{\log x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x}$) 3) on utilise les règles opérations à l'infinie x^n l'emporte sur Log x

ENONCES

1 **QCM** Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse.

1) L'ensemble des solutions de l'équation $\text{Log}(x^2 - 4) = \text{Log}(2 + x)$

a $]0, +\infty[$ b $\{-2, 3\}$ c 3

2) La fonction $f(x) = x^2\text{Log } x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ le nombre dérivé en e est :

a $3e$ b e^2 c 0

3) La fonction définie par $f(x) = \text{Log}(2x^2 + 1)$ est dérivable sur IR et $f'(x)$ est égale à :

a $\dfrac{1}{2x^2+1}$ b $\dfrac{4x}{2x^2+1}$ c $\dfrac{2x^2+1}{4x}$

4) L'ensemble des solutions de l'équation $\text{Log } x < 0$:

a $\varnothing$ b $]-\infty, 0[$ c $]0, 1[$

5) La limite au $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\text{Log}(4x^2+x+1)}{x^2}$

a 4 b $\text{Log } 4$ c 0

2 **Vrai – Faux**

Chacune des affirmations suivantes elle est vraie ou fausse ? justifier votre réponse.

1) $\text{Log } x$ est positif.

2) La fonction $\text{Log}|x+3|$ est croissante sur $]-\infty, -3[$.

3) L'approximation affine de $\text{Log}(x + 1)$ pour x proche de 0 est x.

3 Résoudre dans IR, les équations suivantes :

1) $\text{Log } x = -2$ 2) $\text{Log}\left(\dfrac{1+x}{x}\right) = 3$

3) $\text{Log}(x^2 - x) = \text{Log}(x + 1)$ 4) $\text{Log}(x^2 + x - 2) = \text{Log}(x + 3)$

4 Simplifier les écritures.

$$A = \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Log}\left(\frac{2}{3}\right) + \text{Log}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \text{Log}\left(\frac{98}{99}\right) + \text{Log}\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$B = \frac{\text{Log}(\sqrt{5}-1) + \text{Log}(\sqrt{5}+1)}{2} \; ; \; C = \text{Log}(e^3) + \text{Log}(e^{-2}) + \text{Log}(e^2\sqrt{e}) - \text{Log}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^3\right]$$

5 Résoudre dans IR ; les inéquations suivantes :

1) $\text{Log } x > 4$. 2) $\text{Log}(x + 2) + \text{Log}(x + 4) \geq \text{Log}(x + 8)$.

3) $\text{Log}(2x^2 + 3x + 1) < 0$. 4) $(\text{Log } x)^2 + 3\text{Log } x + 2 > 0$.

6 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{0^+} x \operatorname{Log} x^3$ 2) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x^{10}}{x}$ 3) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{\operatorname{Log}(\sqrt{x})}$

4) $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{Log}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$ 5) $\lim\limits_{0} \dfrac{\operatorname{Log}(x+2)-\operatorname{Log}2}{x}$ 6) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n}$ et $n \in \mathbb{N}$

7) $\lim\limits_{+\infty} 3x - \operatorname{Log} x$ 8) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin(\operatorname{Log} x)}{x}$ 9) $\lim\limits_{+\infty} x \operatorname{Log}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

10) $\lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \operatorname{Log}\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$ 11) $\lim\limits_{0^+} x \operatorname{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

12) $\lim \dfrac{\operatorname{Log} x+2}{\operatorname{Log} x-1}$ en $+\infty$ et en 0 13) $\lim\limits_{1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} - \operatorname{Log}(x-1)$

14) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\sqrt{x}}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+\sin x)}{\sin 2x}$.

7 Calculer $f'(x)$ en précisant sur quels intervalles ce calcul est valable :

a) $f(x) = x - 4 + \dfrac{\operatorname{Log} x}{4}$; b) $f(x) = \operatorname{Log}(3x+1) - \operatorname{Log} x + \dfrac{1}{3x+1}$

c) $f(x) = x\operatorname{Log} x - x$; d) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{Log} x}{1-\operatorname{Log} x}$

i) $f(x) = \operatorname{Log}\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$; j) $f(x) = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$

8 Déterminer la forme générale des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1,+\infty[$ b) $f(x) = x - 1 + \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$ sur $[1,+\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ d) $f(x) = \operatorname{tg} x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

e) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ sur $]1,+\infty[$ f) $f_n(x) = \dfrac{1}{x\operatorname{Log}^n x}$; $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

9 A/ Soit $g : x \longmapsto x^2 - 2 + \operatorname{Log} x$ définie sur $]0,+\infty[$

1) Étudier les variations de g.
2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α; $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

3) Déduire le signe de $g(x)$ selon x.

B/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}(x^2+1-\operatorname{Log}x)$.

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que $f(\alpha)=2\alpha-\frac{1}{\alpha}$, puis donner un encadrement de $f(\alpha)$.

3) a) Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes.
   b) Préciser la position de C la courbe de f par rapport à $D: y=x$.
   c) Construire C en précisant la tangente à C en son point de rencontre avec son asymptote.

4) Soit h la restriction de f à $[e,+\infty[$.
   a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[e,+\infty[$.
   b) Ecrire l'équation de Δ', la demi tangente à $C_{h^{-1}}$ au point d'abscisse e.
   c) Représenter $C_{h^{-1}}$ et tracer Δ'.

10 1) Soit g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\operatorname{Log}x$.
   a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   b) Prouver que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β dans $]0,+\infty[$; vérifier que $3<\beta<4$.
   c) Déterminer alors le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2+\frac{\operatorname{Log}x}{x+1}$.
   a) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   b) Exprimer la fonction dérivée de f à l'aide de g en déduire les variations de f.
   c) Soit D la droite d'équation $y=2$, déterminer les coordonnées du point A d'intersection de D et de C et la position de C et D.
   d) Tracer C et D.

3) Soit h définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$.
   a) Montrer que h est strictement décroissante sur $]\beta,+\infty[$.
   b) Etablir que pour tout $x\in[1,\beta]$, $0\le f'(x)\le\frac{g(1)}{4}$.
   c) En déduire les variations de h sur $[1,\beta]$.

4) Prouver que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α sur $[1,+\infty[$, Montrer que $2<\alpha<3$.

5) Prouver que pour tout $x\in[2,3]$, $f(x)\in[2,3]$

11 1) Soit la fonction $g(x)=\dfrac{-2}{x+2}+\mathrm{Log}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ avec $x\in\left]0,+\infty\right[$.

Etudier les variations de g. En déduire que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$

On a: $g(x)>0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $\begin{cases} f(x)=x\mathrm{Log}\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra poser $X=\dfrac{2}{x}$).

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C la courbe de f dans un repère orthonormé.

4) Soit $h(x)=\dfrac{x^2}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

a) Calculer $h'(x)$.

b) En déduire la primitive de f sur $\left[0,+\infty\right[$, qui s'annule en 0.

5) Soit k un réel strictement négatif, soit f_k la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f_k(x)=f(x)+kx$.

a) En utilisant les variations de g sur $\left]0,+\infty\right[$, montrer que l'équation $f_k'(x)=0$ admet dans $\left]0,+\infty\right[$ une unique solution notée α_k.

b) Dresser le tableau de variation de f_k sur $\left[0,+\infty\right[$ et déduire le signe de $f_k(\alpha_k)$.

12 Soit f définie par $f(x)=x^2\sqrt{|\mathrm{Log}\,x|}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier la dérivabilité de f en 1.
3) a) Résoudre l'inéquation dans $\left]0,+\infty\right[$; $4\,\mathrm{Log}\,x+1\geq 0$.
   b) Déterminer $f'(x)$.
4) Déterminer le tableau de variation de f.
5) Etudier les Branches infinies de f et construire sa courbe dans un repère orthonormé (Unité 4 cm).

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la Fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{Log}(1+x)}{x}$ pour $x>0$ et $f(0)=1$.

La fonction h définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\mathrm{Log}(1+x)$ et la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=f(x)-x$

1) a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de g définie sur $\mathbb{R}_+$;

par $g(x)=\text{Log}(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$.

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$\text{Log}(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

c) Par une étude analogue, montrer que si $x\ge 0$: $\text{Log}(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$.

d) Etablir que quelque soit $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $-\frac{1}{2}\le\frac{\text{Log}(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

2) a) Etudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que sur $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

3) Etudier les variations de φ et construire sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et la demi-tangente au point d'abscisse 0.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ que l'on notera α. Montrer que $\alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

b) Montrer que si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ alors $f(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

c) Montrer que si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ alors $h(1)\le h(x)\le h\left(\frac{1}{2}\right)$ et que $|h(x)|\le\frac{1}{5}$.

d) En déduire que sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{4}{5}$.

5) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|U_{n+1}-U_n|\le\frac{4}{5}|U_n-U_{n-1}|$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_{n+1}-U_n|=0$.

CORRIGES

1

1) La réponse est $\boxed{c}$: car $\text{Log}(x^2-4) = \text{Log}(2+x)$ définie que pour $x > 2$

$\text{Log}(x^2-4) = \text{Log}(2+x) \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = (x+2) \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$ or $x > 2$ d'où $S_{IR} = \{3\}$

2) La réponse est $\boxed{a}$: $f'(x) = 2x\,\text{Log}x + x$

$f'(e) = 2e + e = 3e$

3) La réponse est $\boxed{b}$: $f'(x) = \dfrac{(2x^2+1)'}{2x^2+1} = \dfrac{4x}{2x^2+1}$.

4) La réponse est $\boxed{c}$: $\text{Log}\,x < 0 \Leftrightarrow x < e^0 = 1$ or $x > 0$ d'où $S_{IR} =]0, 1[$

5) La réponse est $\boxed{c}$: $f(x) = \dfrac{\text{Log}(4x^2+x+1)}{x^2} = \dfrac{\text{Log}\left[x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\right]}{x^2}$

$$= \frac{\text{Log}\,x^2 + \text{Log}(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2}$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{\text{Log}\,x^2}{x^2} + \frac{\text{Log}(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2} = 0$$

2

1) <u>Faux</u> : $\text{Log}\dfrac{1}{2} = -0{,}69$.

2) <u>Faux</u> : car $f'(x) = \dfrac{1}{x+3} < 0$ si $x < -3$.

3) <u>Vrai</u> : on a $(\text{Log}(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$ alors l'approximation affine de f voisin de 0 est $f'(0)\,x + f(0) = 1 \times x$ donc $\text{Log}(1+x) \simeq x$.

3

1) $\text{Log}\,x = -2 \Leftrightarrow \text{Log}\,x = -2\,\text{Log}\,e \Leftrightarrow \text{Log}\,x = \text{Log}\,e^{-2}$

$S_{IR} = \{e^{-2}\}$.

2) $\text{Log}(\dfrac{1+x}{x}) = 3$ définie que pour $x \in IR - [-1, 0]$

$\text{Log}(\dfrac{1+x}{x}) = 3\,\text{Log}\,e = \text{Log}\,e^3$

$\dfrac{1+x}{x} = e^3 \Leftrightarrow 1 + x = xe^3$

$x = \dfrac{1}{e^3 - 1} > 0$ d'où $S_{IR} = \{\dfrac{1}{e^3 - 1}\}$

3) $\mathrm{Log}(x^2 - x) = \mathrm{Log}(x + 1)$ définie que pour $\begin{cases} x > -1 \\ x(x-1) > 0 \end{cases}$

sig $x \in]-1, +\infty[- [0, 1]$

$x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$ or $\Delta' = 2$

$x' = 1 - \sqrt{2}$ et $x'' = 1 + \sqrt{2}$ d'où $S_{IR} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$

4 $A = \mathrm{Log}(\frac{1}{2}) + \mathrm{Log}(\frac{2}{3}) + ... + \mathrm{Log}(\frac{98}{99}) + \mathrm{Log}(\frac{99}{100})$

$= \mathrm{Log}(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times ... \times \frac{\cancel{98}}{\cancel{99}} \times \frac{\cancel{99}}{100}) = \mathrm{Log}(\frac{1}{100}) = -2\mathrm{Log}10$

$B = \dfrac{\mathrm{Log}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right]}{2} = \dfrac{\mathrm{Log}4}{2} = \dfrac{2\mathrm{Log}2}{2} = \mathrm{Log}2$

$C = \mathrm{Log}(e^3) + \mathrm{Log}(e^{-2}) + \mathrm{Log}(e^2\sqrt{e}) - \mathrm{Log}(\frac{1}{e})^3$

$= 3\mathrm{Log}e - 2\cancel{\mathrm{Log}}e + \cancel{\mathrm{Log}}e^2 + \mathrm{Log}\sqrt{e} + 3\mathrm{Log}e = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

5 1) L'inéquation a un sens si $x > 0$

$\mathrm{Log}\,x > 4 \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,x > 4\mathrm{Log}\,e \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,x > \mathrm{Log}\,e^4 \Leftrightarrow x > e^4$ d'où $S =]e^4, +\infty[$.

2) L'inéquation a un sens si $x + 2 > 0$ et $x + 4 > 0$ et $x + 8 > 0$

ou encore : $x > -2$ et $x > -4$ et $x > -8$ donc définie sur $]-2, +\infty[$

dans ces conditions :

$\mathrm{Log}(x + 2) + \mathrm{Log}(x + 4) \geq \mathrm{Log}(x + 8)$ équivaut successivement à :

$\mathrm{Log}((x + 2)(x + 4)) \geq \mathrm{Log}(x + 8)$

$(x + 2)(x + 4) \geq x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 5) \geq 0$.

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$x(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x(x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[$ or $x \in]-2, +\infty[$ d'où $S = [0, +\infty[$.

3) Il faut que $2x^2 + 3x + 1 > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$ admet pour racines -1 et $-\dfrac{1}{2}$

donc l'expression est strictement positive « à l'extérieur » des racines ;

d'où $D =]-\infty, -1[\cup \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

L'inéquation est donc équivalente successivement à :

$\text{Log}(2x^2+3x+1)<\text{Log}\,1$

$2x^2+3x+1<1$ ou encore $2x^2+3x<0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$2x^2+3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* $2x^2+3x<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{3}{2},0\right[$ or $x\in D$ d'où $S=\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\left]-\frac{3}{2},-1\right[$

4) Ici $D=\left]0,+\infty\right[$; car l'inéquation ne comporte que des « Log x ».

Nous allons procéder par changement de variable en posant : $X=\text{Log}\,x$.

Donc : $(\text{Log}\,x)^2+3\text{Log}\,x+2>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Log}\,x=X\\ X^2+3X+2>0\end{cases}$

$X^2+3X+2=0$ admet deux racines : -1 et -2

Alors $X^2+3X+2>0 \Leftrightarrow X\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$

L'inéquation est équivalente à : $\begin{cases}x>0\\ \text{Log}\,x<-2 \text{ ou } \text{Log}\,x>-1\end{cases}$

ou encore : $\begin{cases}x>0\\ \text{Log}\,x<-2\text{Log}\,e \text{ ou } \text{Log}\,x>-\text{Log}\,e\end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases}x>0\\ \text{Log}\,x<\text{Log}\left(\dfrac{1}{e^2}\right) \text{ ou } \text{Log}\,x>\text{Log}\dfrac{1}{e}\end{cases}$

ou encore $\begin{cases}x>0\\ x<\dfrac{1}{e^2} \text{ ou } x>\dfrac{1}{e}\end{cases}$ finalement $S=\left]0,\dfrac{1}{e^2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

6 1) $\lim\limits_{0^+} x\,\text{Log}\,x^3=\lim\limits_{0^+} 3x\,\text{Log}\,x=0$.

2) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\text{Log}\,x^{10}}{x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{10\text{Log}\,x}{x}=0$.

3) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2}{\text{Log}\sqrt{x}}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}\text{Log}\,x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{2x^2}{\text{Log}\,x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{2}{\frac{\text{Log}\,x}{x}\cdot\frac{1}{x}}=+\infty$.

4) On sait que $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)=\text{Log}\,2$.

5) $\lim\limits_{0}\dfrac{\text{Log}(x+2)-\text{Log}2}{x}$ représente le nombre dérivé de $f(x)=\text{Log}(x+2)$

en $x_0 = 0$, comme $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ alors $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{0} \dfrac{\operatorname{Log}(x+2) - \operatorname{Log} 2}{x} = \dfrac{1}{2}$.

6) $n = 1$ on a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$ et pour $n > 1$; $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$

7) $\lim\limits_{+\infty} 3x - \operatorname{Log} x = \lim\limits_{+\infty} x\left(3 - \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}\right) = +\infty$.

8) Pour tout $x > 0$ on a $0 \leq |\sin(\operatorname{Log} x)| \leq 1$ donc $0 \leq \left|\dfrac{\sin(\operatorname{Log} x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$

Comme $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \left|\dfrac{\sin(\operatorname{Log} x)}{x}\right| = 0$ d'où $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sin(\operatorname{Log} x)}{x} = 0$

9) On pose $X = \dfrac{1}{x}$, il suffit alors de chercher la limite quand X tend vers 0

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0} \frac{1}{X} \operatorname{Log}(1+X) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+X)}{X} = 1$$

10) $\lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{2x-1}{x+2} = 0^+$ d'où $\lim\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \operatorname{Log}\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right) = -\infty$.

11) $\lim\limits_{0^+} x \operatorname{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{0^+} x \operatorname{Log}(x+1) - x \operatorname{Log} x$

Or $\lim\limits_{0^+} \operatorname{Log}(x+1) = \operatorname{Log} 1 = 0$ donc $\lim\limits_{0} x \operatorname{Log}(x+1) = 0$

et $\lim\limits_{0} x \operatorname{Log} x = 0$ d'où $\lim\limits_{0} x \operatorname{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0$.

12) * $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x+2}{\operatorname{Log} x-1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x\left(1+\dfrac{2}{\operatorname{Log} x}\right)}{\operatorname{Log} x\left(1-\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}\right)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{\operatorname{Log} x}}{1-\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}} = 1$ car $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{Log} x} = 0$.

* $\lim\limits_{0} \dfrac{\operatorname{Log} x + 2}{\operatorname{Log} x - 1} = 1$ en utilisant la même méthode.

13) $\dfrac{2x+1}{x-1} - \operatorname{Log}(x-1) = \dfrac{2x+1-(x-1)\operatorname{Log}(x-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{1^+} x\text{-}1 = 0^+$ et $\lim\limits_{0^+} t \operatorname{Log} t = 0 \Rightarrow \lim\limits_{1^+} (x\text{-}1)\operatorname{Log}(x\text{-}1) = 0$

d'où $\lim\limits_{1^+} 2x + 1 - (x-1)\operatorname{Log}(x-1) = 3$

et $\lim\limits_{1^+} x-1=0^+$ donc $\lim\limits_{1^+}\dfrac{2x+1-(x-1)\operatorname{Log}(x-1)}{x-1}=+\infty$.

14) $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\left(\sqrt{x}\right)^3}=\lim\limits_{0^+}\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{x\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{0^+}\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ car $\lim\limits_{0^+}\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{0^+}\sqrt{x}=0^+$.

15) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{0^+}\dfrac{\operatorname{Log}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

$=\lim\limits_{0^+}\sqrt{x}\operatorname{Log}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{0^+}\sqrt{x}\operatorname{Log}(1+x)-\sqrt{x}\operatorname{Log}x$

$=\lim\limits_{0^+}\sqrt{x}\operatorname{Log}(1+x)-2\sqrt{x}\operatorname{Log}\sqrt{x}=0$

16) $\lim\limits_{0}\dfrac{\operatorname{Log}(1+\sin x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{0}\dfrac{\operatorname{Log}(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{2\cos x}$

Lorsque $x\longrightarrow 0$ alors $\sin x\longrightarrow 0$ on pose $X=\sin x$

$\lim\limits_{0}\dfrac{\operatorname{Log}(1+\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{\operatorname{Log}(1+X)}{X}=1$

et $\lim\limits_{0}\dfrac{1}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}$ par suite la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

7 a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$, $f'(x)=1+\dfrac{1}{4x}=\dfrac{4x+1}{4x}$

b) f est définie que pour $3x+1>0$ et $x>0$ ou encore $x>0$
d'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$,

$f'(x)=\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}=\dfrac{-6x-1}{x(3x+1)^2}$

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$, $f'(x)=x\cdot\dfrac{1}{x}+1\cdot\operatorname{Log}x-1=\operatorname{Log}x$.

d) f est dérivable sur $]0,e[\cup]e,+\infty[$ $(x>0 \text{ et } \operatorname{Log}\neq 1)$.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}(1-\operatorname{Log}x)-(1+\operatorname{Log}x)\left(-\dfrac{1}{x}\right)}{(1-\operatorname{Log}x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}-\frac{\text{Log}\,x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\text{Log}\,x}{x}}{(1-\text{Log}\,x)^2}=\frac{2}{x(1-\text{Log}\,x)^2}$$

i) $f(x)=\text{Log}\left|\frac{x+1}{x}\right|$; comme la valeur absolue est un réel positif il suffit

que $\frac{x+1}{x}\neq 0$ c'est-à-dire $x\neq 0$ et $x\neq -1$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

$U(x)=\frac{x+1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

$$f'(x)=\left(\text{Log}\left|U(x)\right|\right)'=\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{\frac{x-(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{-1}{x(x+1)}.$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer la dérivée de cette fonction en écrivant : $f(x)=\text{Log}|x+1|-\text{Log}|x|$ on obtient beaucoup plus rapidement : $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-1}{x(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$

j) $f(x)=\text{Log}(\text{Log}\,x)$, f est définie que lorsque $\text{Log}\,x>0\Leftrightarrow x>1$ donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$$f'(x)=(\text{Log}(\text{Log}\,x))'=\frac{(\text{Log}\,x)'}{\text{Log}\,x}=\frac{1}{x\,\text{Log}\,x}.$$

8 a) La dérivée de $U:x\longmapsto x^2-1$ c'est : $U':x\longmapsto 2x$.

En écrivant $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}$ on fait apparaître la forme $\frac{U'(x)}{U(x)}$

Les primitives de f sont F définies par $F(x)=\frac{1}{2}\text{Log}\left|x^2-1\right|+c$ avec

$c\in\mathbb{R}$ sur $]1,+\infty[$ on a $x^2-1>0$ donc $f(x)=\frac{1}{2}\text{Log}(x^2-1)+c$.

b) $f(x)=x-1+\frac{1}{x}\text{Log}\,x$, or $\frac{1}{x}\text{Log}\,x$ est de la forme $U'(x)U(x)$

avec $U(x)=\text{Log}\,x$ qui admet pour primitive $\frac{1}{2}U^2(x)$

d'où les primitives de f s'écrivent :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}(\text{Log}\,x)^2+c\ ;c\in\mathbb{R}.$$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}$ dans ce cas les primitives de f sont :

$F(x)=\text{Log}\left|x+2\right|-\text{Log}\left|x\right|+c,\ c\in\mathbb{R}$; sur $]0,+\infty[$ on a $x>0$ et $x+2>0$

d'où $F(x)=\text{Log}(x+2)-\text{Log}\,x+c=\text{Log}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+c$; $c\in\mathbb{R}$.

d) $f(x)=\text{tg}\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ c'est la forme $\dfrac{U'(x)}{U(x)}$

avec $U(x)=\cos x$ et $U'(x)=-\sin x$

$f(x)=-\dfrac{-\sin x}{\cos x}$ donc F les primitives de f s'écrivent :

$F(x)=-\text{Log}\left|\cos x\right|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

or sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x>0$ d'où $F(x)=-\text{Log}(\cos x)+c$.

e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+2}{1-x}=-\dfrac{(1-x)}{1-x}+\dfrac{2}{1-x}=-1+\dfrac{2}{1-x}$, dans ce cas

les primitives F de f sont définies sur $]1,+\infty[$ par :

$F(x)=-x-2\,\text{Log}\left|1-x\right|+c$; $c\in\mathbb{R}$.

f) $f_n(x)=\dfrac{1}{x\text{Log}^n x}=\dfrac{1}{x}\cdot(\text{Log}x)^{-n}$ on pose $U(x)=\text{Log}x$

U dérivable sur $]0,+\infty[$ et $U'(x)=\dfrac{1}{x}$.

d'où $f_n(x)$ est de la forme $U'\cdot U^{-n}$.

par suite les primitives sont : $F_n(x)=\dfrac{1}{1-n}U^{-n+1}(x)+c$

$F_n(x)=\dfrac{1}{1-n}\text{Log}^{1-n}(x)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

9 A/ 1) g est dérivable sur $]0,+\infty[$; $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}>0$

d'où g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors g réalise une

bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{0^+}g(x);\lim\limits_{+\infty}g(x)\right[=\mathbb{R}$

or $0\in\mathbb{R}$, alors 0 admet qu'un seul antécédent: $\alpha\in]0,+\infty[$

Comme $g(1,3)\cong-0,047$ et $g(1,4)\cong 0,296$ et g est strictement croissante donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

3) – Si $x > \alpha$ et g strictement croissante alors $g(x) > g(\alpha)$ d'où $g(x) > 0$.

– Si $0 < x < \alpha$ et g strictement croissante alors $g(x) < g(\alpha)$ donc $g(x) < 0$.

B/ 1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}(x^2 + 1 - \operatorname{Log} x) + \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\operatorname{Log} x}{x^2} + 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + \operatorname{Log} x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} x + \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{Log} x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x + \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{Log} x}{x} = +\infty$

2) On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Log}\alpha = 2 - \alpha^2$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + 1 - \operatorname{Log}\alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + 1 - 2 + \alpha^2) = \frac{2\alpha^2 - 1}{\alpha} = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$$

on a: $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$

$\frac{1}{1{,}4} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1{,}3} \Leftrightarrow -\frac{1}{1{,}3} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{1{,}4}$ Comme $2{,}6 < 2\alpha < 2{,}8$

d'où $2{,}6 - \frac{1}{1{,}3} < 2\alpha - \frac{1}{\alpha} < 2{,}8 - \frac{1}{1{,}4}$ donc $1{,}83 < f(\alpha) < 2{,}086$.

3) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{Log} x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{+\infty} [f(x) - x] = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$$

Donc $y = x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote.

b) $f(x) - x = \frac{1}{x}(1 - \operatorname{Log} x)$

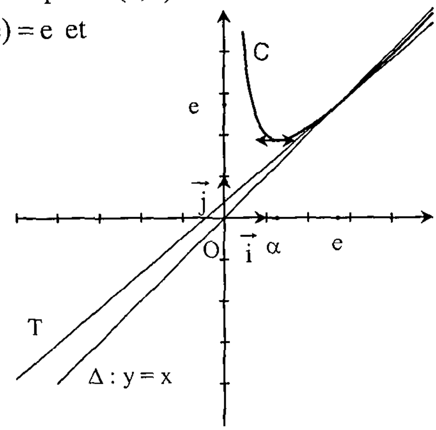
$1 - \operatorname{Log} x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \operatorname{Log} x \Leftrightarrow \operatorname{Log} e \geq \operatorname{Log} x \Leftrightarrow e \geq x$

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

Si $x \in \left]0, e\right[$ alors C est au dessus de D.

Si $x \in \left]e, +\infty\right[$ alors C est au dessous de D.

Si $x = e$ alors C et D coïncident au point (e, e).



c) $T : y = f'(e)(x - e) + f(e)$ or $f(e) = e$ et

$$f'(e) = \frac{e^2 - 1}{e^2} = 1 - \frac{1}{e^2}$$

$$\text{d'où } T : y = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2}\right)x - e + \frac{1}{e} + e$$

$$\text{donc } T : y = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2}\right)x + \frac{1}{e}.$$

4) a) Comme $\left[e, +\infty\right[\subset \left[\alpha, +\infty\right[$, donc h est continue et strictement croissante sur $\left[e, +\infty\right[$ d'où h réalise une bijection de $\left[e, +\infty\right[$ sur $h(\left[e, +\infty\right[) = \left[e, +\infty\right[$.

b) On a: $h(e) = e \Leftrightarrow h^{-1}(e) = e$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ est derivable en } e \\ h'(e) = \dfrac{e^2 - 1}{e^2} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h^{-1} \text{est derivable en } e \\ \text{et } (h^{-1})'(e) = \dfrac{1}{h'(e)} = \dfrac{e^2}{e^2 - 1} \end{array}$$

$$\Delta' : y = (h^{-1})'(e)(x - e) + h^{-1}(e)$$

$$\Delta' : y = \frac{e^2}{e^2 - 1}(x - e) + e \quad \text{d'où } \Delta' : y = \frac{e^2}{e^2 - 1}x - \frac{e}{e^2 - 1}.$$

c) Pour $x \in \left]e, +\infty\right[$; $S_D(C) = C_{h^{-1}}$ avec $D : y = x$.

10 1) a) g est définie, continue et dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$

$$g'(x) = 1 - \mathrm{Log}\, x - x \cdot \frac{1}{x} = -\mathrm{Log}\, x$$

* $-\mathrm{Log}\, x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Log}\, x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	+	0	−	
g(x)	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

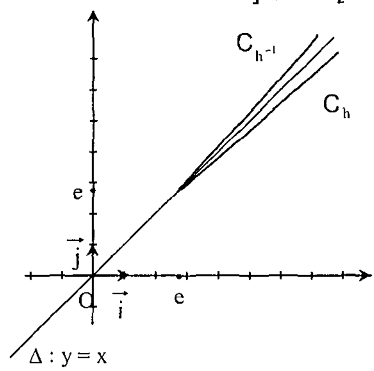
* $\lim\limits_{0^+} 1 + x - x\,\mathrm{Log}\, x = 1$; $\lim\limits_{+\infty} 1 + x(1 - \mathrm{Log}\, x) = -\infty$ et $f(1) = 2$.

b) * Sur $\left]0, 1\right]$, g est continue et strictement croissante donc g réalise une bijection de $\left]0, 1\right]$ sur $\left]1, 2\right]$ or $0 \notin \left]1, 2\right]$ donc 0 n'a pas d'antécédent dans $]0,1]$.

* Sur $]1,+\infty[$, g continue et strictement décroissante donc g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$ or $0\in]-\infty,2[$ donc 0 admet qu'un seul antécédent β dans $]1,+\infty[$.

donc l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution sur $]0,+\infty[$.

* $g(3)\cong 0,63$ et $g(4)=-0,54$ et g strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc $3<\beta<4$.



c) Si $x\in]0,\beta[$ alors $g(x)>0$

Si $x\in]\beta,+\infty[$ alors $g(x)<0$

Si $x=\beta$ alors $g(\beta)=0$.

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} 2+\frac{\text{Log}\,x}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=2$ et

$\lim\limits_{0^+} f(x)=\lim\limits_{0^+} 2+\frac{\text{Log}\,x}{x+1}=-\infty$

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\text{Log}\,x}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x\,\text{Log}\,x}{x(1+x)^2}=\frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

or $x>0$ et $(x+1)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ d'où:

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	2

$f(\beta)=2+\frac{\text{Log}\,\beta}{\beta+1}$ or $g(\beta)=0\Leftrightarrow \text{Log}\,\beta=\frac{1+\beta}{\beta}$ d'où $f(\beta)=2+\frac{1}{\beta}$.

c) $M(x,y)\in C\cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ f(x)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ 2+\frac{\text{Log}\,x}{1+x}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ \text{Log}\,x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2\end{cases}$ d'où $A(1,2)$

* $f(x)-2=\frac{\text{Log}\,x}{1+x}$ comme $1+x>0$

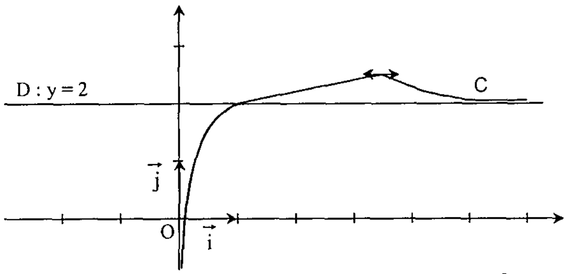
donc le signe de $(f(x)-2)$ est celui de $\text{Log}\,x$ d'où:

Si $x\in]0,1[$ alors C est au dessous de D.

Si $x \in]1, +\infty[$ alors C est au dessus de D.

Si $x = 1$ alors C et D coïncident.

d) on a: $x = 0$ asymptote et $y = 2$ asymptote au voisinage de $+\infty$.



3) a) $h(x) = f(x) - x$, h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = f'(x) - 1$.

Si $x \in]\beta, +\infty[$ alors $f'(x) < 0$ donc $h'(x) < 0$

d'où h est strictement décroissante sur $]\beta, +\infty[$

b) * $x \in [1, \beta]$, on a $f'(x) \geq 0$.

* $\frac{g(1)}{4} = \frac{1}{2}$.

* $x > 1$ et g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc $g(x) < g(1)$

* $x > 1 \Leftrightarrow 1 + x > 2 \Leftrightarrow (1+x)^2 > 4$ donc $x(1+x)^2 > 4$

d'où $\frac{1}{x(1+x)^2} < \frac{1}{4}$

Si $x \in [1, \beta]$ on a $0 \leq g(x) < g(1)$ donc $\frac{g(x)}{x(1+x)^2} < \frac{g(1)}{4}$

d'où $f'(x) < \frac{g(1)}{4}$. Finalement $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$.

c) Sur $[1, \beta]$ on a $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$ donc $h'(x) < 0$

d'où h est strictement décroissante sur $[1, \beta]$.

4) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.

h est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur h $([1, +\infty[) = J =]-\infty, 1]$ car:

$\lim_{1^+} h(x) = \lim_{1^+} 2 + \frac{\operatorname{Log} x}{x+1} - x = 1$ et $\lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty} 2 + \frac{\operatorname{Log} x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} - x = -\infty$

Or $0 \in]-\infty, 1]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow\ f(\alpha)=\alpha$ donc l'équation: $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[1,+\infty[$

$h(2)\approx 0{,}23$ et $h(3)\approx -0{,}72$ donc $\alpha\in\,]2,3[$.

5) $2\le x\le 3$ et f est strictement croissante sur $]-\infty,\beta]$ donc $f(2)\le f(x)\le f(3)$

$$2<2+\frac{\text{Log}\,2}{3}\le f(x)\le 2+\frac{\text{Log}\,3}{4}<3 \quad \text{d'où} \quad f(x)\in[2,3].$$

11

1) g définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$g'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}=\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{2}{x(x+2)}=\frac{-4}{x(x+2)^2}<0$$

$$\lim_{+\infty} g(x)=\lim_{+\infty}\frac{-2}{x+2}+\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)=0$$

Alors $\forall\, x\in\,]0,+\infty[$,

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	0

2) a) • $\lim\limits_{0^+} f(x)=\lim\limits_{0^+} x\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim\limits_{0^+} x\text{Log}(x+2)-x\text{Log}x=0$

car $\lim\limits_{0} x\text{Log}x=0$ et $\lim\limits_{0^+} x\text{Log}(x+2)=0\times\text{Log}2=0$

d'où $\lim\limits_{0} f(x)=f(0)$ par suite f est continue en 0.

• $\lim\limits_{0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{0^+}\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{0^+}\frac{x+2}{x}=+\infty$

Alors f n'est pas dérivable en 0.

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{0^+}\frac{1}{x}\text{Log}\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{0^+}\frac{1}{x}\text{Log}(1+2x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\text{Log}(1+2x)}{2x}\cdot 2=2$ car $\lim\limits_{0}\frac{\text{Log}(1+X)}{X}=1$

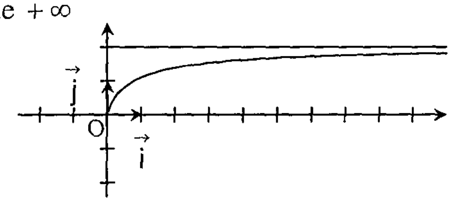
3) a) $x\longmapsto\frac{x+2}{x}$ est dérivable et positive sur $]0,+\infty[$.

Alors $x\longmapsto\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par suite f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x)=\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)+x\cdot\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}=\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}=g(x)$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	0	↗	2

b) $y=2$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$ au point $(0,0)$ la courbe de f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut.



4) $h(x)=\frac{x^2}{2}\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$

a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=x\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{(-2)}{x(x+2)}$

d'où $h'(x)=x\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{x}{x+2}$

b) $h'(x)=f(x)-\frac{x}{x+2}$ alors $f(x)=h'(x)+\frac{x}{x+2}$

$f(x)=h'(x)+\frac{x+2-2}{x+2}=h'(x)+1-\frac{2}{x+2}$

Soit F une primitive de f qui s'annule en 0.

$F(x)=h(x)+x-2\cdot\text{Log}(x+2)+C$ et $F(0)=0$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)+x-2\text{Log}(x+2)+C$$

$$F(x)=\frac{1}{2}xf(x)+x-2\text{Log}(x+2)+C$$

$$\lim_0 F(x)=\lim_0\frac{1}{2}xf(x)+x-2\text{Log}(x+2)+C=0$$

D'où $-2\text{Log}2+C=0$ ou encore $C=2\text{Log}2$.

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)+x-2\text{Log}(x+2)+2\text{Log}2$$

5) $k<0$; $f_k(x)=f(x)+kx$.

a) f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$, $f'_k(x)=f'(x)+k=g(x)+k$

$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=-k$ avec $k\in \mathbb{R}_-^*$

On a g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Alors g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

or $(-k)\in]0,+\infty[$ alors $(-k)$ admet un seul antécédent

$\alpha_k\in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha_k)=-k$

d'où $f_k'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha_k$

b) Pour $x<\alpha_k$ et on a g est décroissante alors $g(x)>g(\alpha_k)$

d'où $g(x)+k>0$ pour $x>\alpha_k$ et g est décroissante alors $g(x)<g(\alpha_k)$

d'où $g(x)+k<0$

$\lim_{0} f_k(x)=\lim_{0} f(x)+kx=0$

$\lim_{+\infty} f_k(x)=\lim_{+\infty} f(x)+kx=-\infty$

x	0		α_k		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$f_k(\alpha_k)$	$\searrow$	$-\infty$

pour $0<x\le\alpha_k$ on a: f_k est croissante sur $]0,\alpha_k]$

d'où $0<f_k(x)<f_k(\alpha_k)$ donc $0<f_k(\alpha_k)$

12 1) f est définie lorsque $x>0$ et $|\text{Log}\,x|\ge 0$ d'où $Df=]0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2\sqrt{|\text{Log}\,x|}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2\sqrt{-\text{Log}\,x}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^2\text{Log}\,x}{(x-1)\cdot\sqrt{-\text{Log}\,x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\text{Log}\,x}{x-1}\cdot\dfrac{-x^2}{\sqrt{-\text{Log}\,x}}=1\times(-\infty)=-\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 d'où f n'est pas dérivable en 1.

3) a) L'inéquation est définie sur $]0,+\infty[$.

$$4\text{Log}\,x+1\ge 0\Leftrightarrow \text{Log}\,x^4\ge -1\Leftrightarrow \text{Log}\,x^4\ge -\text{Log}\,e\Leftrightarrow x^4\ge\frac{1}{e}\Leftrightarrow x^2\ge\sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$\Leftrightarrow x\ge\sqrt{\frac{1}{\sqrt{e}}}\text{ ou encore } x\ge\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\text{ d'où } S=\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}},+\infty\right[.$$

b) f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Si $x\in]0,1[$ alors $\text{Log}\,x<0$ donc $f(x)=x^2\sqrt{-\text{Log}\,x}$

$$\text{d'où } f'(x)=2x\sqrt{-\text{Log}\,x}-\frac{x}{2\sqrt{-\text{Log}\,x}}=\frac{-4x\,\text{Log}\,x-x}{2\sqrt{-\text{Log}\,x}}=\frac{-x(4\text{Log}\,x+1)}{2\sqrt{-\text{Log}\,x}}.$$

Si $x\in]1,+\infty[$ alors $\text{Log}\,x>0$ d'où $f(x)=x^2\sqrt{\text{Log}\,x}$

par suite $f'(x) = 2x\sqrt{\operatorname{Log} x} + \dfrac{x}{2\sqrt{\operatorname{Log} x}} = \dfrac{x(4\operatorname{Log} x + 1)}{2\sqrt{\operatorname{Log} x}}$.

4)

x	0		$\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}$		$+\infty$
$4\operatorname{Log} x + 1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$-x$		$-$		$-$	

x	0		$\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↘	0	↗	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\left|\operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x^2\sqrt{|\operatorname{Log} x|} = \lim_{0^+}\sqrt{x|\operatorname{Log} x|} = \lim_{0^+}\sqrt{|x\operatorname{Log} x|} = 0$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x^2\sqrt{|\operatorname{Log} x|} = +\infty .$$

5) * $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} x\sqrt{|\operatorname{Log} x|} = +\infty$

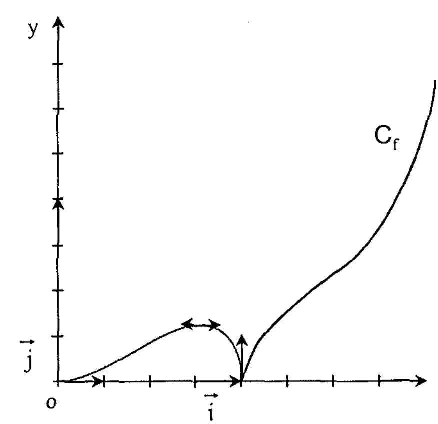
donc C_1 *admet une branche* parabolique

de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

* $\lim_{1^-} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{1^+} f'(x) = +\infty$

donc au point d'abscisse 1 la C_f

admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut.



13

1) a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\text{Log}(1+x) - \text{Log}(1+0)}{x - 0}$$

c'est le nombre dérivée de la fonction U : $x \longmapsto \text{Log}(1+x)$ en 0

or $U'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ d'où $U'(0) = 1$

par suite $\lim\limits_{0^+} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

comme f est continue sur $]0, +\infty[$ donc f continue sur $[0, +\infty[$.

b) $g(x) = \text{Log}(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \dfrac{-x^3}{1+x} \leq 0$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	

0 est un maximum absolu de g donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \leq 0$

d'où $\text{Log}(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

c) On pose : $p(x) = \text{Log}(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

p est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $p'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$

x	0		$+\infty$
$p'(x)$	0	$+$	
$p(x)$	0	$\nearrow$	

0 est un minimum absolu pour p donc pour tout $x \geq 0$, on a : $p(x) \geq 0$

d'où $\text{Log}(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

d) On a : pour tout $x \geq 0$: $\text{Log}(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$ et $\text{Log}(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

d'où $x-\frac{x^2}{2}\le \text{Log}(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$$\lim_0 \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_0 \frac{\frac{\text{Log}(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_0 \frac{\text{Log}(1+x)-x}{x^2}$$

on a : $x-\frac{x^2}{2}\le \text{Log}(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

d'où $-\frac{1}{2}\le \frac{\text{Log}(1+x)-x}{x^2}\le -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ comme $\lim_0 -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$

d'où $\lim_0 \frac{\text{Log}(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ par suite f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

2) a) h est dérivable sur $[0,+\infty[$,

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}\le 0.$$

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$
$h(x)$	0	$\searrow$

0 est maximum absolu pour h, donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $h(x)\le 0$.

b) f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

* $f'(0)=-\frac{1}{2}$

* Pour tout $x>0$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\text{Log}(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{-\text{Log}(1+x)+\frac{x}{x+1}}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}\le 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$
$f(x)$	1 $\searrow$	0

3) $\varphi(x)=f(x)-x$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\varphi'(x)=f'(x)-1$ or $f'(x)<0$ donc $\varphi'(x)<0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi(x)$	$1 \searrow -\infty$

$$\lim_{+\infty}\varphi(x)=\lim_{+\infty}\frac{\text{Log}(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}-x=-\infty\ ;\ \varphi'(0)=f'(0)-1=\frac{-3}{2}$$

$$\varphi(0)=1 \text{ d'où } \Delta:\begin{cases} y=\dfrac{-3}{2}x+1 \\ x\geq 0\end{cases}$$

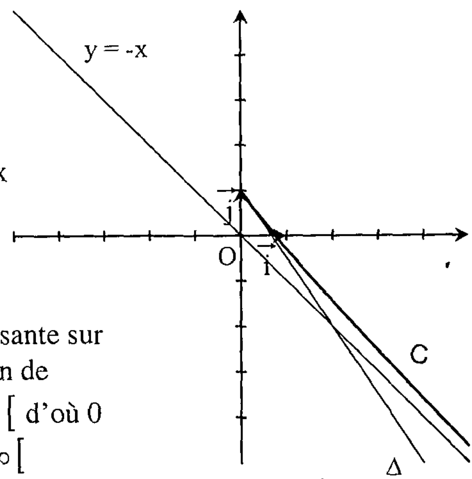
C'est l'équation de la demi tangente au point d'abscisse 0.

Construction :

$$\lim_{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{\text{Log}(1+x)}{x^2}-1$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\text{Log}(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x^2}-1=-1$$

$\lim\limits_{+\infty}\varphi(x)+x=\lim\limits_{+\infty}f(x)=0$ donc $y=-x$ asymptote en $+\infty$.



4)

a) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=0$.

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,1[$ or $0\in]-\infty,1[$ d'où 0 admet un seul antécédent $\alpha\in]0,+\infty[$

d'où l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution $\alpha\in]0,+\infty[$

or $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx 0{,}310$ et $\varphi(1)\approx -0{,}306$ d'où $\qquad \alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

b) $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\geq f(x)\geq f(1)$ ou encore $\quad 2\text{Log}3-2\text{Log}2\geq f(x)\geq \text{Log}2$

$1>0{,}81\geq f(x)\geq 0{,}69>0{,}5$ $\quad$ d'où $\quad f(x)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

c) $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1$ et h est strictement décroissante, donc $h\left(\dfrac{1}{2}\right)\geq h(x)\geq h(1)$

$\dfrac{1}{2}\text{Log}\dfrac{3}{2}\geq h(x)\geq\dfrac{1}{2}-\text{Log}2$ $\quad$ d'où $\quad -0{,}2\leq h(x)\leq 0{,}2$ donc $|h(x)|\leq\dfrac{1}{5}$.

d) $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$, on a : $|h(x)|\leq\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\left|\dfrac{h(x)}{x^2}\right|\leq\dfrac{1}{5x^2}\Leftrightarrow|f'(x)|\leq\dfrac{1}{5x^2}$

comme $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\leq x^2\leq 1\Leftrightarrow 4\geq\dfrac{1}{x^2}\geq 1$ d'où $|f'(x)|\leq\dfrac{4}{5}$.

5) a) $\forall\ n\in\mathbb{N}$, f est continue et dérivable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$

et on a : $\forall\ x\in\mathbb{R}_+$, $|f'(x)|\leq\dfrac{4}{5}$ donc et d'après le théorème des accroissements finis on a :

$|f(U_n)-f(U_{n-1})|\leq\dfrac{4}{5}|U_n-U_{n-1}|\ \Leftrightarrow\ |U_{n+1}-U_n|\leq\dfrac{4}{5}|U_n-U_{n-1}|$

Montrons par récurrence que $|U_{n+1}-U_n|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\cdot|U_1-U_0|$.

- Pour $n=0$, $|U_1-U_0|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^0\cdot|U_1-U_0|\Leftrightarrow|U_1-U_0|\leq|U_1-U_0|$
- Supposons que $|U_{n+1}-U_n|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\cdot|U_1-U_0|$ et montrons que

$|U_{n+2}-U_{n+1}|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}\cdot|U_1-U_0|$. d'après 5) a)

$|U_{n+2}-U_{n+1}|\leq\dfrac{4}{5}|U_{n+1}-U_n|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\cdot|U_1-U_0|$

d'où $|U_{n+2}-U_{n+1}|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}\cdot|U_1-U_0|$.

Donc $\forall\ n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-U_n|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\cdot|U_1-U_0|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_{n+1}-U_n|=0$

Chapitre VII

Fonctions exponentielles

I) Fonction exponentielle

■ Définition :

La fonction exponentielle définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ est la bijection réciproque de la fonction Logarithme népérien qu'on note :
$x \mapsto e^x$ où $x \mapsto \exp(x)$

■ Conséquences :

$\boxed{e^0 = 1}$ $\boxed{e^1 = e}$

$\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{Log}x = y \iff x = e^y}$

$\boxed{x \in]0,+\infty[, e^{\text{Log}\,x} = x}$

$\boxed{x \in \mathbb{R} ; \text{Log}(e^x) = x}$

a et b deux réels
$e^a = e^b \iff a = b$

a et b deux réels
$e^a > e^b \iff a > b$

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

■ Courbe :

La courbe représentative de $x \mapsto e^x$ est la symétrie de celle de la fonction : $x \mapsto \text{Log}x$ par rapport à $\Delta : y = x$.

■ Limites :

$\boxed{\lim_{+\infty} e^x = +\infty}$ $\boxed{\lim_{-\infty} e^x = 0}$ $\boxed{\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

$\boxed{\lim_{-\infty} xe^x = 0}$ $\boxed{\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

■ Dérivée :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)'(x) = \exp(x)$
- $F(x) = e^{U(x)}$ avec U est une fonction définie et dérivable sur un intervalle

I alors F est dérivable sur I et $F'(x) = U'(x)e^{U(x)}$

■ Propriétés algébriques :

a et b deux réels et $n \in Z$:

$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b}$ $\boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$ $\boxed{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$ $\boxed{e^{na} = (e^a)^n}$

II) **Fonction exponentielle à base a** :

■ a est un réel strictement positif, la fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$ définie sur IR est appelée Fonction exponentielle à base a .

■ $a^x = e^{x\text{Log}a}$, $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\left(a^x\right)' = \text{Log}a \cdot e^{x\text{Log}a} = a^x \cdot \text{Log}a$

Si $a > 1$:

x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	0 ↗	$+\infty$

Si $0 < a < 1$:

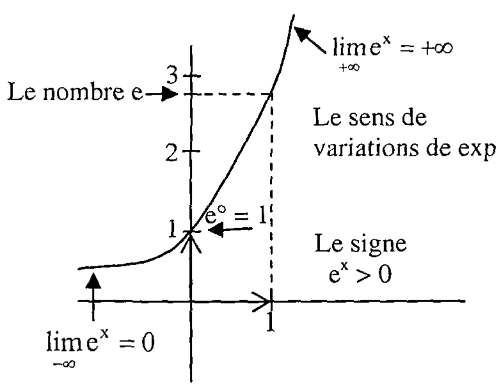
x	$-\infty$	$+\infty$
a^x	$+\infty$ ↘	0

■ Propriétés : $a > 0$; $b > 0$; x et y deux réels quelconques

$\boxed{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$ $\boxed{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$ $\boxed{a^{xy} = \left(a^x\right)^y}$

$\boxed{a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}}$

Réflexes :

<table>
<tr><th>Situations</th><th>Réflexes</th></tr>
<tr><td>Comment retrouver les propriétés de la fonction exponentielle à partir de sa courbe représentative ?</td><td>
</td></tr>
</table>

Comment résoudre une équation ou une inéquation dans laquelle figurent des exponentielles ?	1) On détermine l'ensemble des réels pour les quels les expressions sont définies. 2) On se ramène lorsque cela est possible à une équation de la forme $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ Ou une inéquation de la forme $e^{U(x)} \leq e^{V(x)}$. 3) On résoudre alors l'équation $U(x) = V(x)$ où $U(x) \leq V(x)$. 4) On se ramène lorsque cela est possible a des équation ou inéquation de $2^{\text{ème}}$ degré ou $3^{\text{ème}}$ degré. 5) Utiliser un tableau de variation d'une fonction choisi.
Comment résoudre une équation de la forme $a^x = b$ respectivement inéquation de la forme $a^x > b$?	On écrit $a^x = e^{x \text{ Log } a}$ et on utilise $e^{x \text{ Log } a} = e^{\text{Log } b}$. L'équation devient $x \text{ Log } a = \text{Log } b$.
Comment retrouver les propriétés de la fonction a^x? $(a > 0)$	On écrit toujours $a^x = e^{x\text{Log } a}$ et on utilise les propriétés l'exponentielle.
Comment calculer une limite en $+\infty$?	1) On examine si on se trouve dans une situation de forme indéterminée. 2) Dans ce cas on tente la factorisation pour se ramener en cas $\frac{e^x}{x^n}$. 3) On utilise les règles opératoires suivant à l'infini exponentielle l'emporte sur x^n.

ENONCES

1 **QCM** ; Pour chaque question une seule réponse est correcte dire la quelle sans justification.

1) L'ensemble des solutions de l'équation $e^x = 1$ est :

[a] $\{0\}$ [b] $\{1\}$ [c] ϕ

2) La courbe représentative de la fonction exponentielle a une ....

[a] tangente horizontal [b] asymptote verticale

[c] asymptote horizontale

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x})$ est égale à :

[a] 1 [b] $-\infty$ [c] $+\infty$

4) La fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$ sa fonction dérivée est $f'(x)$ égale à.

[a] e^{-x} [b] $\dfrac{1}{e^x}$ [c] $-e^{-x}$.

5) f définie sur [0,8] par $f(x) = 8\text{-}x\ e^{x-8}$

[a] f est croissante sur [0,8] [b] f est décroissante sur [0,8]

[c] $f'(x) = e^{x-8}(x + 1)$

2 Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

1) $e^{-3} \leq 0$.
2) La fonction e^{-x+3} est décroissante sur IR.
3) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est impaire.
4) Pour tout $x \leq 0$, on a $e^{-x} \leq e^x$
5) L'approximation affine de e^h pour h proche de 0 est $h + 1$.
6) 3^x est dérivable sur IR et $(3^x)' = 3^x$.
7) La courbe ζ de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ admet un centre de symétrie $A(0, \dfrac{1}{2})$

3 Résoudre dans IR.

1) $e^{x^2} = e^{-x-1}$ 2) $e^{\frac{x+6}{2x+5}} = e^{\frac{1}{x}}$

3) $e^{x^2} = (e^3)^4 \cdot e^{-x}$ 4) $e.e^{\sin x} - e^{3/2} = 0$

4 Résoudre dans IR , les équations suivantes :

1) $e^{x^2+1}=e^{2x}$; 2) $e^{x^2-x+1}=1$; 3) $e^{2x-1}=-e^{-x+1}$

4) $e^{2x}-e^{x}-6=0$; 5) $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=2$; 6) $e^{x}-3=4e^{-x}$

7) $e^{3x}-3e^{2x}-e^{x}+3=0$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $e^{x}>3$; 2) $e^{2-x}>3$; 3) $\dfrac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}>3$

4) $e^{-x^2+3}>e^{2x}$; 5) $e^{3x}+e^{2x}-2e^{x}\le 0$; 6) $-e^{4x}+7e^{2x}-12>0$

6 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=e^{-x}$; 2) $f(x)=e^{4x-1}$; 3) $f(x)=e^{-x^2+1}$

4) $f(x)=x^{2}e^{3x-1}$; 5) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

7) $f(x)=\dfrac{1-x^{2}}{x}e^{1-x}+e^{x^2}$

7 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\text{Log}\dfrac{e^{x}-1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)^{n}e^{x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{n}}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{2}+1}{x}e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}}-x\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{xe^{-x-1}+1}{x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}\dfrac{e^{\frac{1}{\cos x}}}{x-\frac{\pi}{2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{2}\text{Log}\left|1-2e^{x}\right|\right]$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\text{Log}(1+e^{2x})$; 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\text{Log}(1+e^{2x})$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Log}|x|(e^{\frac{x}{x^{2}-1}}-1)$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^{2}}$; 13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

8 Soit f définie sur IR par, $f(x)=x^{2}-3+3e^{-\frac{x}{3}}$.

1) Calculer f'(x), étudier le sens de variation de f' et déterminer les limites de f' en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Montrer que l'équation f'(x) = 0 a une solution α est une seule sur IR, et donner une valeur approchée de α d'amplitude 10^{-2}.

Déterminer le signe de f' sur IR.

3) Déterminer le sens de variation de f sur IR et montrer que :
$f(\alpha) = \alpha^2 + 6\alpha - 3$.

4) En déduire l'inégalité pour tout réel x, $x^2 - 3 + 3e^{-\frac{x}{3}} > -\frac{1}{4}$.

9 *Soit la fonction définie sur IR par :* $f(x) = 2x + 5 - 2e^x$.
ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la fonction f.
2) Montrer que la droite D : y = 2x + 5 est une asymptote à ζ en $-\infty$.
Préciser la position de ζ par rapport à D.
3) Soit Δ la droite d'équation y = 2x.
Ecrire une équation de la tangente T à ζ au point d'intersection de ζ et Δ.
4) Tracer ζ.

10 La fonction f_m est définie sur IR par $f_m(x) = e^{x^2 - mx}$ où m est un réel donné.

1) Déterminer les valeurs de m correspondant aux cas suivant :
a) $f_m(3) = 1$.
b) $f_m(1) = 2$.

2) Soit g la restriction de f_{-1} à $[0, +\infty[$.
a) Montrer que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Donner l'expression explicite de $g^{-1}(x)$ pour x donné.
c) Tracer les courbes représentatives de g et g^{-1} dans un même repère.

11 A) Soit la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$.

1) Etudier le sens de variation de g et préciser les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α sur [0, 1].
Justifier le fait que : $0{,}7 < \alpha < 0{,}71$.
3) En déduire le signe de g(x).

B) Soit f définie pour tout réel x par : $f(x) = (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$.

1) a) Exprimer f'(x) à l'aide de g(x).
b) En déduire les variations de f.

2) a) Montrer que $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.
b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

3) a) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x)$.

(Indication : en $+\infty$, factorisé $e^{\frac{x}{2}}$ et en $-\infty$, faire apparaître $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

et poser $X = \frac{x}{2}$).

b) Démontrer que la droite d'équation y = 2 – x est une asymptote à ζ la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de ζ et de l'axe des abscisses.

b) Calculer les coordonnées de E le point d'intersection de ζ et l'axe des ordonnées.

c) Donner l'équation de la tangente T en E à ζ.

6) Tracer ζ et T.

12 On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On note ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité 2 cm).

A) 1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{f(x)}{1+e^{2x}}$.

b) Etudier les variations de f.

2) a) Montrer que ζ admet un point d'inflexion I à déterminer.

b) Donner une équation de la tangente T à ζ en I.

3) Soit φ la fonction numérique définie par $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Montrer que pour tout x de IR on a : $f'(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

b) Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et $\text{Log } 2 < \alpha < 1$.

4) Tracer T et ζ.

B) 1)Montrer que f est une bijection de IR sur l'intervalle J à préciser.

2) Soit g la réciproque de f et soit ζ' sa courbe.

a) Déterminer $g(\alpha)$ et $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Montrer que $g(x) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer la courbe ζ'.

13 1) Soit g définie sur IR, par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Etudier les variations de g. Calculer g(0).

b) En déduire que l'expression $\frac{e^x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel x.

2) Soit f la fonction définie sur IR, par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

b) Déterminer la $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

3) Etudier les variations de f et construire sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

14 Soit f définie par $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ pour $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = -1$.

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.

3) Etudier les variations de f et construire ζ la courbe représentative de f.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Construire la courbe de f^{-1} dans le même repère que ζ.

5) a) Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 1.

b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

CORRIGES

1 QCM

1) $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ donc la réponse est $\boxed{a}$

2) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc ζ admet une asymptote horizontale $y = 0$ d'où la réponse est $\boxed{c}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} 1 - e^t = -\infty$ on pose $t = -x$ d'où la réponse est $\boxed{b}$.

4) $(e^{U(x)})' = U'(x)\, e^{U(x)}$ donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$ d'où la réponse est $\boxed{c}$

5) f est dérivable sur [0,8] et $f'(x) = -e^{x-8} - xe^{x-8} = -e^{x-8}(1+x) < 0$ d'où f est décroissante sur [0,8] d'où la réponse est $\boxed{b}$.

2

1) $e^{-3} \leq 0$ Faux car l'exponentielle est strictement positif.

2) Vraie : car $(e^{-x+3})' = -e^{-x+3} < 0$

3) Fausse : car $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^{x}} = f(x) \text{ donc f est paire}$$

4) Fausse : car $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$

$e^x \leq e^0$ et $e^{-x} \geq e^0$

$e^x \leq 1$ et $e^{-x} \geq 1$ d'où $e^x \leq 1 \leq e^{-x}$

5) Vraie : $f'(h) = (e^h)' = e^h$

Alors l'approximation affine de e^h voisin de 0 est $f'(0)\,h + f(0)$

$e^h \simeq h + 1$

6) Fausse : car $3^x = e^{\text{Log } 3^x} = e^{x \text{ Log } 3}$

$(3^x)' = \text{Log}3\; e^{x\text{Log } 3} = (\text{Log}3).3^x$

7) Vraie : car $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}.e^x}{(1+e^{-x})e^x} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$2 \times \frac{1}{2} - f(x) = 1 - f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x+1} = f(-x)$$

Donc A est un centre de symétrie.

3

1) $e^{x^2} = e^{-x-1} \Leftrightarrow x^2 = -x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ d'où $S_{\mathbb{R}} = \phi$

2) $e^{\frac{x+6}{2x+5}} = e^{\frac{1}{x}}$ définie que pour $x \neq 0$ et $x \neq -5/2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+6}{2x+5} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 + 6x = 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$

$S_{IR} = \{1,-5\}$

3) $e^{x^2} = (e^3)^4 \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{12-x} \Leftrightarrow x^2 = 12 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49$ donc les solutions sont $x' = \dfrac{-1-7}{2} = -4$ et $x'' = 3$

$S_{IR} = \{3,-4\}$.

4) $e \cdot e^{\sin x} - e^{3/2} = 0$

$e^{1+\sin x} = e^{3/2} \Leftrightarrow 1 + \sin x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$S_{IR} = \{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi , \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$

4

1) On obtient $x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où $S = \{1\}$.

2) $e^{x^2-x+1} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ pas de solution car $\Delta = -3 < 0$ d'où $S = \varnothing$.

3) Pas de solution car $e^{2x-1} > 0$ et $-e^{-x+1} < 0$ d'où $S = \varnothing$.

4) On pose $X = e^x$, on se ramène à $X^2 - X - 6 = 0$ qui admet pour solution $X = -2$ ou $X = 3$

- $e^x = -2$ n'a pas de solution car $-2 < 0$ et $e^x > 0$.
- $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \text{Log}\,3$ d'où $S = \{\text{Log}\,3\}$.

5) Le quotient est défini si et seulement si $e^x - e^{-x} \neq 0$

$e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

L'équation est définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pour tout $x \neq 0$

$\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2e^x - 2e^{-x}$

$\Leftrightarrow e^x - 3e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 3e^{-x}$ ou encore $e^{2x} = 3$ (on a multiplié par e^x).

$\Leftrightarrow 2x = \text{Log}\,3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\text{Log}\,3}{2}$ qui est non nul d'où $S = \left\{\dfrac{\text{Log}\,3}{2}\right\}$.

6) On multiplie pour e^x ; on se ramène à $e^{2x} - 3e^x = 4$ ou encore $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$. On pose $X = e^x$, on se ramène à $X^2 - 3X - 4 = 0$ qui à pour solution $X = -1$ ou $X = 4$.

- $e^x = -1$ n'a pas de solution on $e^x > 0$ et $-1 < 0$

- $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \log 4$ d'où $S = \{\log 4\}$.

7) Avec $X = e^x$ on se ramène à $X^3 - 3x^2 - X + 3 = 0$.

1 est une racine du polynôme $X^3 - 3X^2 - X + 3$ qui se factorise en :
$(X-1)(X^2 - 2X - 3)$

$X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 3$

- $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- $e^x = -1$ n'a pas de solution : $e^x > 0$ et $-1 < 0$.
- $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \mathrm{Log}\,3$, d'où $S = \{0; \mathrm{Log}\,3\}$.

5 1) $e^x > 3 \Leftrightarrow x > \mathrm{Log}\,3$ d'où $S =]\mathrm{Log}\,3, +\infty[$

2) $e^{2-x} > 3 \Leftrightarrow 2 - x > \mathrm{Log}\,3 \Leftrightarrow 2 - \mathrm{Log}\,3 > x$ d'où $S =]-\infty, 2 - \mathrm{Log}\,3[$.

3) $\dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} > 3 \Leftrightarrow 3e^x - 1 > 3(e^x + 1) \Leftrightarrow -1 > 3$ impossible d'où $S = \varnothing$.

4) $e^{-x^2+3} > e^{2x} \Leftrightarrow -x^2 + 3 > 2x \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 > 0$.

Le polynôme $-x^2 - 2x + 3$ a pour solutions 1 et -3.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où $S =]-3, 1[$.

5) On pose $X = e^x$ alors $X^2 = e^{2x}$ et $X^3 = e^{3x}$,

on se ramène à : $X^3 + X^2 - 2X \leq 0$.

Etudions le signe du polynôme $P(x) = X^3 + X^2 - 2X$

on factorise : $P(x) = X(X^2 + X - 2)$; $X^2 + X - 2$ admet pour racines 1 et -2.

X	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
X		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$X^2 + X - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty, -2] \cup [0, 1] \Leftrightarrow X \leq -2$ ou $0 \leq X \leq 1$

Comme $X = e^x$, $e^{3x} + e^{2x} - 2e^x \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq -2$ et $0 \leq e^x \leq 1$

- $e^x \leq -2$ n'a pas de solution car $-2 < 0$ et $e^x > 0$
- $0 \leq e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ d'où $S =]-\infty, 0]$.

6) On pose $X = e^{2x}$; Soit $P(x) = -X^2 + 7X - 12$

on a : $P(X) = -(X-3)(X-4)$ donc $P(X) > 0 \Leftrightarrow X \in]3, 4[$

$-X^2 + 7X - 12 > 0 \Leftrightarrow 3 < X < 4$ d'où $3 < e^{2x} < 4 \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,3 < 2x < \mathrm{Log}\,4$

$\Leftrightarrow \frac{\log 3}{2} < x < \frac{\mathrm{Log}\,4}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Log}\,3}{2} < x < \frac{2\mathrm{Log}\,2}{2}$ d'où $S = \left]\frac{\mathrm{Log}\,3}{2}, \mathrm{Log}\,2\right[$.

6 Les fonctions de l'exemple 1, 2, 3, 4 et 5 sont définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = e^{-x}$ est de la forme $e^{U(x)}$ avec $U(x) = -x$, $U'(x) = -1$
d'où $f'(x) = -e^{-x}$.

2) $f(x) = e^{4x-1}$, $U(x) = 4x - 1$ et $U'(x) = 4$ d'où $f'(x) = 4e^{4x-1}$.

3) $f(x) = e^{-x^2+1}$; $U(x) = -x^2 + 1$ et $U'(x) = -2x$ d'où $f'(x) = -2xe^{-x^2+1}$.

4) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x-1}$, on dérive f comme un produit :

$f'(x) = 2xe^{3x-1} + 3x^2e^{3x-1} = x(2+3x)e^{3x-1}$.

5) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ on dérive f comme un quotient :

$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

6) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$.

7) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}e^{1-x} + e^{x^2}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = \frac{-2x^2 - (1-x^2)}{x^2}e^{1-x} + \frac{1-x^2}{x} \cdot (-e^{1-x}) + 2xe^{x^2}$

$f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{x^2}e^{1-x} - \frac{1-x^2}{x}e^{1-x} + 2xe^{x^2}$

d'où $f'(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{x^2}e^{1-x} + 2xe^{x^2}$.

7 1) $f(x) = x\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{0^+} \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} = 1$ Alors $\lim_{+\infty} e^{f(x)} = e$

2) $f(x) = \frac{1}{x}\mathrm{Log}\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{Log}(e^x - 1) - \mathrm{Log}x}{x} = \frac{\mathrm{Log}(e^x-1)}{x} - \frac{\mathrm{Log}x}{x}$

$$\lim_{+\infty}\frac{e^x-1}{e^x}=\lim_{+\infty}1-\frac{1}{e^x}=1$$

Alors $\lim\limits_{+\infty}\mathrm{Log}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x}\right)=\lim\limits_{+\infty}\mathrm{Log}(e^x-1)-1=\mathrm{Log}1=0$

par suite $\lim\limits_{+\infty}\mathrm{Log}(e^x-1)=1$.

On en déduit $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\mathrm{Log}(e^x-1)}{x}=0$ comme $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\mathrm{Log}x}{x}=0$

Alors $\lim\limits_{+\infty}f(x)=0$.

3) $\lim\limits_{-\infty}(-x)^n e^x=\lim\limits_{-\infty}(-x)^n\cdot\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n=\lim\limits_{-\infty}\left(-xe^{\frac{x}{n}}\right)^n$

$$=\lim_{-\infty}\left(-n\frac{x}{n}e^{\frac{x}{n}}\right)^n=0 \quad \text{car} \quad \lim_{-\infty}Xe^X=0$$

4) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n}=\lim\limits_{+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right]^n=\lim\limits_{+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{n\cdot\frac{x}{n}}\right]^n=+\infty$

car $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$.

5) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-x=x\left[e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-1\right]+\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

- $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$ alors $\lim\limits_{+\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=1$ donc $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}}{x}=0$
- $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=1$ car $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$

On déduit alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x\left[e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-1\right]}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=1$

Par suite $\lim\limits_{+\infty} x\left[e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-1\right]=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$

• On conclut que $\lim\limits_{+\infty} f(x)=1+0=1$.

6) $f(x)=\dfrac{xe^{-x-1}+1}{x+1}=\dfrac{x(e^{-x-1}-1)+x+1}{x+1}=x\dfrac{e^{-x-1}-1}{x+1}+1$

On pose $X=-x-1$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{-x-1}-1}{x+1}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{-X}=-1$

$\lim\limits_{-1} f(x)=\lim\limits_{-1} x\left(\dfrac{e^{-x-1}-1}{x+1}\right)+1=2$.

7) $x \longmapsto \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{+}$ alors $\cos x \longrightarrow 0^{-}$ et $\dfrac{1}{\cos x}\longrightarrow -\infty$

$\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}} e^{\frac{1}{\cos x}}=0$ $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^{+}}\dfrac{e^{\frac{1}{\cos x}}}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}e^{\frac{1}{\cos x}}}{\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\cos x}}=0$

car $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\dfrac{1}{\cos x}e^{\frac{1}{\cos x}}=\lim\limits_{-\infty} Xe^{X}=0$ et $\lim\limits_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$

8) $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\text{Log}\left|1-2e^{x}\right|$

$=x-\dfrac{1}{2}\text{Log}e^{x}\left|\dfrac{1}{e^{x}}-2\right|=x-\dfrac{1}{2}\text{Log}e^{x}-\dfrac{1}{2}\text{Log}\left|\dfrac{1}{e^{x}}-2\right|$

$=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\text{Log}\left|\dfrac{1}{e^{x}}-2\right|$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1}{e^x} - 2\right| = +\infty$$

9) $f(x) = e^{-x}\mathrm{Log}(1+e^{2x}) = e^{-x}\mathrm{Log}\left[e^{2x}(e^{-2x}+1)\right] = e^{-x}\left[2x + \mathrm{Log}(e^{-2x}+1)\right]$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \underbrace{2xe^{-x}}_{0} + \underbrace{e^{-x}}_{0}\mathrm{Log}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{0}+1\right) = 0$$

10) $\lim\limits_{-\infty} e^{2x} = 0$ alors $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{\mathrm{Log}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})-1} = \lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\mathrm{Log}(X)}{X-1} = 1$

par suite $\lim\limits_{-\infty} e^{-x}\mathrm{Log}(1+e^{2x}) = \lim\limits_{-\infty} e^{-x}e^{2x}\left[\dfrac{\mathrm{Log}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})-1}\right]$

$$= \lim_{-\infty} e^{x} \cdot \left[\frac{\mathrm{Log}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})-1}\right] = 0$$

11) $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{Log}|x| \left(e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1\right) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{\mathrm{Log}|x|}{|x|}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}{\dfrac{x}{x^2-1}}\right)\dfrac{x|x|}{x^2-1} = 0$

Car $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{\mathrm{Log}|x|}{|x|} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$ et $|x| = -x$

donc $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x|x|}{x^2-1} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-x^2}{x^2-1} = -1$

12) $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \dfrac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

13) $f(x) = (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\mathrm{Log}(\cos x + \sin x)} = e^{\frac{1}{x}\mathrm{Log}\left[\cos x(1+\mathrm{tg}x)\right]}$

$$= e^{\frac{\mathrm{Log}\cos x}{x} + \frac{\mathrm{Log}(1+\mathrm{tg}x)}{x}}$$

- $\lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{Log}(\cos x)}{x} = \lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{Log}(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

  car $\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\mathrm{Log}X}{X-1} = 1$ et $\lim\limits_{0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

- $\lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{Log}(1+\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x} \cdot \dfrac{\mathrm{tg}x}{x} = 1$ car $\lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{Log}(1+X)}{X} = 1$

8 1) f est dérivable sur IR ; $f'(x) = 2x + 3\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$

f' est dérivable sur IR, $f''(x)=2-\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right)=2+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

comme $e^{-\frac{x}{3}} > 0$ donc $f''(x) > 0$ d'où f' est strictement croissante sur IR.

* $\lim\limits_{+\infty} f'(x)=\lim\limits_{+\infty} 2x - e^{-\frac{1}{3}x} =+\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} e^{-\frac{x}{3}} =0$ et $\lim\limits_{+\infty} 2x=+\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f'(x)=\lim\limits_{-\infty} 2x - \lim\limits_{-\infty} e^{-\frac{x}{3}} =-\infty$

2) f' est continue et strictement croissante sur IR donc f' réalise une bijection de IR sur IR or $0 \in$ IR donc 0 admet qu'un seul antécédent α dans IR.
On a $f'(0{,}43) = -0{,}006$ et $f'(0{,}44) = 0{,}016$ donc $0{,}43 < \alpha < 0{,}44$.
* f' est strictement croissante sur IR alors :
Si $x < \alpha$ alors $f'(x) < f'(\alpha)$ d'où $f'(x) < 0$.
Si $x > \alpha$ alors $f'(x) > f'(\alpha)$ d'où $f'(x) > 0$.

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	$f(\alpha)$	↗	

on a $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\alpha - e^{-\frac{\alpha}{3}}=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\alpha}{3}}=2\alpha$

$f(\alpha)=\alpha^2-3+3e^{-\frac{\alpha}{3}}=\alpha^2-3+3(2\alpha)=\alpha^2+6\alpha-3.$

4) $f(\alpha)$ est un minimum absolue pour f donc tout $x \in$ IR, on a $f(x) \geq f(\alpha)$;
on a $\alpha > 0{,}43 \Rightarrow \alpha^2 > (0{,}43)^2$ et $6\alpha > 2{,}58$

donc $f(\alpha)>-0{,}2351>-\frac{1}{4}$ d'où $f(x)\geq f(\alpha)>-\frac{1}{4}$ donc $x^2-3+3e^{-\frac{x}{3}}>-\frac{1}{4}$.

9 1) f est définie, continue et dérivable sur IR et on a :
$f'(x) = 2 - 2 . e^x = 2(1 - e^x)$.
* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
* $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow 0 > x$.

f	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty} 2x+5-2e^x=-\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{-\infty} 2x+5=-\infty$.

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 2x+5-2e^x = \lim\limits_{+\infty} x\left(2+\dfrac{5}{x}-2\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$

Car $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{5}{x} = 0$.

* $f(0) = 3$.

2) $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-(2x+5)] = \lim\limits_{-\infty} -2e^x = 0$

donc D : $y = 2x + 5$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

* $f(x) - (2x + 5) = -2e^x < 0$ donc ζ est au dessous de D.

3) $M(x, y) \in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ f(x) = 2x \end{cases}$

* $f(x) = 2x \Leftrightarrow 2x + 5 - 2e^x = 2x \Leftrightarrow e^x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = \text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

* $y = 2x = 2\,\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)$ donc $\zeta \cap \Delta$ est le singleton $A\left(\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right) ; 2\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$

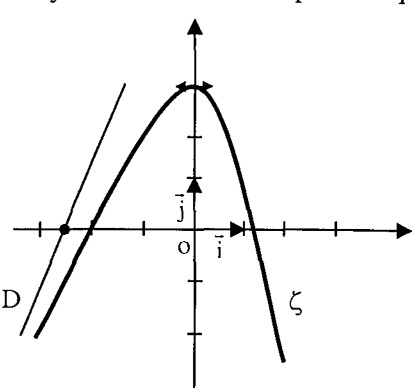
$T : y = f'\left(\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)\left[x - \text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)\right] + f\left(\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$

$f'\left(\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)\right) = 2\left(1 - e^{\text{Log}\left(\frac{5}{2}\right)}\right) = 2\left(1 - \dfrac{5}{2}\right) = -3$

d'où $T : y = 3x + 5\,\text{Log}\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

4) $y = 2x + 5$ asymptote au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} 2 + \dfrac{5}{x} - 2\dfrac{e^x}{x}$ donc ζ admet une branche parabolique de direction (yy')



10

1) a) $f_m(3) = 1 \Leftrightarrow e^{9-3m} = 1 \Leftrightarrow 9 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

b) $f_m(1) = 2 \Leftrightarrow e^{1-m} = 2 \Leftrightarrow 1 - m = \text{Log}\,2 \Leftrightarrow m = 1 - \text{Log}\,2$.

2) $f_{-1}(x) = e^{x^2+x}$.

a) g est dérivable sur IR, $g'(x) = (2x + 1)\ e^{x^2+x}$

on a : $x \geq 0 \Rightarrow 2x + 1 > 0$ et $e^{x^2+x} > 0$ d'où $g'(x) > 0$

g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[\ ) = [g(0), \lim\limits_{+\infty} g(x)\ [$;

or $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} x^2 + x = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} e^{x^2+x} = +\infty$ d'où $J = [1, +\infty[$.

b) Si $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y) \Leftrightarrow x = e^{y^2+y} \Leftrightarrow \text{Log } x = y^2 + y \Leftrightarrow y^2 + y - \text{Log } x = 0$

c'est une équation de second degré d'inconnue y ; on obtient :

$\Delta = 1 + 4 \text{ Log } x$ or $x \geq 1$ donc $\text{Log } x \geq 0$,

donc $\Delta > 0$ par suite les solutions sont :

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+4\text{Log}\,x}}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-1-\sqrt{1+4\text{Log}\,x}}{2}.$$

* $y = \dfrac{-1-\sqrt{1+4\text{Log}\,x}}{2}$ à rejeté car $y \in [0, +\infty[$

* $y = \dfrac{-1+\sqrt{1+\text{Log}\,x}}{2} = \dfrac{\left(-1+\sqrt{1+4\text{Log}\,x}\right)\left(-1-\sqrt{1+4\text{Log}\,x}\right)}{2\left(-1-\sqrt{1+4\text{Log}\,x}\right)}$

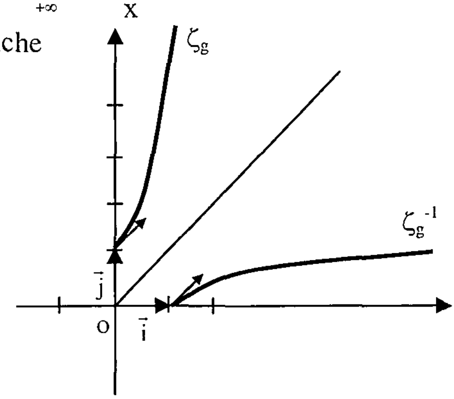
$= \dfrac{2\,\text{Log}\,x}{1+\sqrt{1+4\text{Log}\,x}} > 0$. Car $x \geq 1$

d'où pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = \dfrac{2\,\text{Log}\,x}{1+\sqrt{1+4\text{Log}\,x}}$.

c) Les courbes de g et g^{-1} sont symétrique par rapport à $\Delta : y = x$

* $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^{x^2} . \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc la courbe de g admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



11 A) 1) g est définie, continue et dérivable sur IR

$g'(x)=1-\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}>0$ d'où g est strictement croissante sur IR

* $\lim\limits_{+\infty} g(x)=\lim\limits_{+\infty} x-e^{-\frac{x}{2}}=+\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=0$

* $\lim\limits_{-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} e^{-\frac{x}{2}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{-\infty} x-e^{-\frac{x}{2}}=-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
g(x)	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2) g est continue et strictement croissante sur IR

donc g réalise une bijection de [0, 1] sur $g([0,1])=[-1,\ 1-e^{-\frac{1}{2}}]$.

Comme $0\in[-1,1-\frac{1}{\sqrt{e}}]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in[0,1]$

$g(0,7)\approx -0,004$ et $g(0,71)\approx 0,008$ donc $0,7<\alpha<0,71$.

3) g est strictement croissante alors :

Si $x<\alpha$ alors $g(x)<g(\alpha)$ donc $g(x)<0$.

Si $x>\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)$ donc $g(x)>0$.

B) 1) a) f est dérivable sur IR, $f'(x)=2e^{\frac{x}{2}}+(2x-4)\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)-1$

$=(2+x-2)e^{\frac{x}{2}}-1=e^{\frac{x}{2}}(x-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}})=e^{\frac{x}{2}}(x-e^{-\frac{x}{2}})$ ou encore $f'(x)=e^{\frac{x}{2}}g(x)$.

b) Comme $e^{\frac{x}{2}}>0$ donc le signe f'(x) est celui de g(x)

d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty,\alpha[$ et f est strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$.

2) a) $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-e^{-\frac{\alpha}{2}}=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}}=\alpha \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\alpha}$

$f(\alpha)=(2\alpha-4)e^{\frac{\alpha}{2}}+2-\alpha=(2\alpha-4).\frac{1}{\alpha}+2-\alpha=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$.

b) Comme $0,7<\alpha<0,71$ alors $\frac{1}{0,71}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0,7}$

$-\frac{4}{0,71}>-\frac{4}{\alpha}>-\frac{4}{0,7}$ d'autre part $-0,71<-\alpha<-0,7$

$4-0,71 < 4-\alpha < 4-0,7$ or $-\frac{4}{0,7} < -\frac{4}{\alpha} < -\frac{4}{0,71}$

d'où $4-0,71-\frac{4}{0,7} < f(\alpha) < 4-0,7-\frac{4}{0,71}$

ou encore $-2,43 < f(\alpha) < -2,33$.

3) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} e^{\frac{x}{2}}\left(2x-4+\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}-\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)$ or $\lim\limits_{+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}=0$

et comme $\lim\limits_{+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty$

d'où $\lim\limits_{+\infty}\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}=0$ et $\lim\limits_{+\infty}2x-4=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty}4\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}+2-x.$

On sait que : $\lim\limits_{-\infty}Xe^X=0$ donc $\lim\limits_{-\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=0$

$\lim\limits_{-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$ et $\lim\limits_{-\infty}2-x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{-\infty}f(x)=+\infty$.

b) $f(x)-(2-x)=(2x-4)e^{\frac{x}{2}}=2xe^{\frac{x}{2}}-4e^{\frac{x}{2}}$

$\lim\limits_{-\infty}xe^{\frac{x}{2}}=0$ et $\lim\limits_{-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0$ donc $\lim\limits_{-\infty}[f(x)-(2-x)]=0$

donc $y=2-x$ est une asymptote à ζ au voisinage de $-\infty$.

4)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) a) $(o,\vec{i})$: $y=0$; soit $M(x,y)\in(o,\vec{i})\cap\zeta \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ f(x)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow (2x-4)e^{\frac{x}{2}}+2-x=0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(2e^{\frac{x}{2}}-1)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $2e^{\frac{x}{2}}-1=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $\frac{x}{2}=\text{Log}(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2\text{Log}2$

d'où $(O,\vec{i})\cap\zeta=\{A(2,0)\ ;\ B(-2\text{Log}\,2,0)\}$.

b) $(O,\vec{j})$: $x = 0$; soit $M(x, y)\in(O,\vec{j})\cap\zeta \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x)=y \end{cases}$

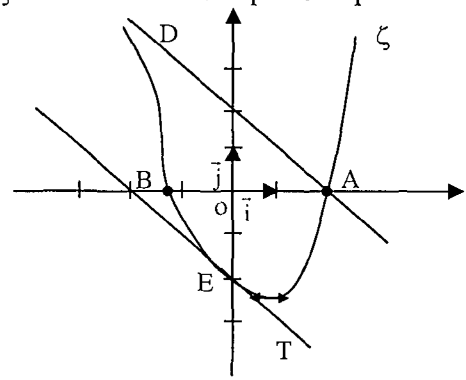
$y = f(0) = -2$ donc $(O,\vec{j})\cap\zeta = \{E(0, -2)\}$.

c) $T : y = f'(0)\,x + f(0)$ d'où $T : y = -x - 2$

6) * $y = 2 - x$ asymptote à ζ au voisinage de $-\infty$

* $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim(2-\frac{4}{x})e^{\frac{x}{2}}+\frac{2}{x}-1=+\infty$

donc ζ admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$



12 1) a) f est continue et dérivable sur IR ;

$$f'(x)=\frac{e^x\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)-e^x\left(\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)}{1+e^{2x}}=\frac{e^x(1+e^{2x})-e^x.e^{2x}}{(1+e^{2x})(\sqrt{1+e^{2x}})}$$

$$=\frac{e^x[1+e^{2x}-e^{2x}]}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}=\frac{\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+e^{2x}}=\frac{f(x)}{1+e^{2x}}.$$

b) On sait que $e^x > 0$ donc $f(x) > 0$ et $1 + e^{2x} > 0$

d'où $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur IR.

2) a) $f''(x)=\frac{f'(x)(1+e^{2x})-2e^{2x}.f(x)}{(1+e^{2x})^2}$

$$f''(x)=\frac{\frac{f(x)}{1+e^{2x}}.(1+e^{2x})-2e^{2x}f(x)}{(1+e^{2x})^2}=\frac{f(x)(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-2e^{2x}=0\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\text{Log}(\frac{1}{2})\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{1}{2})=-\frac{\text{Log}\,2}{2}.$$

* Le signe de f''(x) est celui $1-2e^{2x}$ car $f(x)>0$ et $(1+e^{2x})^2>0$

$$1-2e^{2x}>0\Leftrightarrow 1>2e^{2x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}>e^{2x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}>x.$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	

f'' s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{1}{2})$ donc ζ admet un point d'inflexion $I\left(\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{1}{2})\,;\ f\left(\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{1}{2})\right)\right)$;

on a : $\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\text{Log}\,2=-\text{Log}\sqrt{2}=\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$f\left(\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)=\frac{e^{\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})}}{\sqrt{1+e^{2\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+e^{\text{Log}(\frac{1}{2})}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{d'où}\ \left(\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}}),\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $T:y=f'\left(\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)\left(x-\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)+f\left(\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}})\right)$

$T:y=\frac{2\sqrt{3}}{9}x+\frac{\sqrt{3}}{9}\text{Log}\,2+\frac{1}{\sqrt{3}}.$

3) a) On a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}\text{Log}\frac{1}{2}$		$+\infty$
f''(x)		+		-	
f'(x)		↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	

$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ est un maximum absolue pour f' donc $f'(x)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\le\frac{\sqrt{3}}{4}$.

b) φ est dérivable sur IR, $\varphi'(x) = f'(x) - 1$

$$f'(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow f'(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 < 0$$

donc φ est strictement décroissante sur IR.

φ est continue et strictement décroissante sur IR, donc φ réalise une bijection de IR sur φ (IR).

$$* \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})}} = \lim_{+\infty} \frac{e^x}{e^x\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}} = 1$$

$$* \lim_{-\infty} f(x) = 0 \text{ car } \lim_{-\infty} e^x = 0 \text{ d'où } \lim_{+\infty} \varphi(x) = \lim_{+\infty} f(x) - x = -\infty$$

$\lim_{-\infty} \varphi(x) = \lim_{-\infty} f(x) - x = +\infty$ donc φ(IR) = IR.

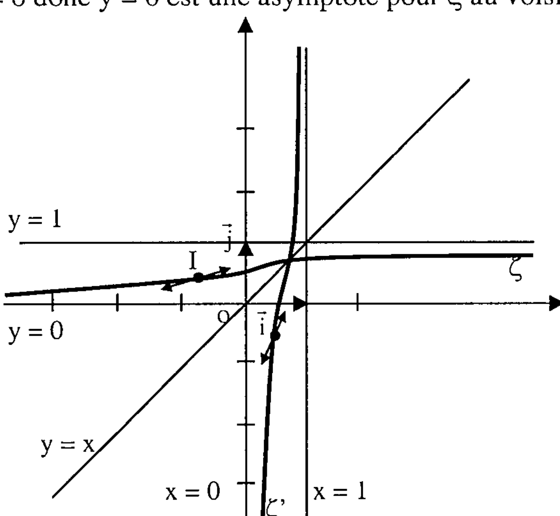
0 ∈ IR donc 0 admet qu'un seul antécédent α dans IR.

$$\varphi(\text{Log}\,2) = \frac{2}{\sqrt{5}} - \text{Log}\,2 > 0 \text{ et } \varphi(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - 1 < 0$$

donc Log 2 < α < 1.

4) $\lim_{+\infty} f(x) = 1$ donc y = 1 est une asymptote pour ζ au voisinage de +∞

$\lim_{-\infty} f(x) = 0$ donc y = 0 est une asymptote pour ζ au voisinage de -∞



B) 1) f est strictement croissante et continue sur IR donc f réalise une bijection de IR sur J = f < IR > =]0, 1[.

2) a) On a φ(α) = 0 ⇔ f(α) = α ⇔ g(α) = α

* $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0=x.$

b) $x \in]0, 1[$ et $y \in IR$

$g(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{\sqrt{1+e^{2y}}} \Leftrightarrow x^2=\frac{e^{2y}}{1+e^{2y}} \Leftrightarrow (1+e^{2y})x^2=e^{2y}$

$e^{2y}(x^2-1) = -x^2 \Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x^2}{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2y = \text{Log}(\frac{x^2}{1-x^2}) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{x^2}{1-x^2})$

d'où pour tout $x \in]0, 1[$, $g(x)=\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{x^2}{1-x^2})$.

c) $\zeta' = S_\Delta(\zeta)$ avec $\Delta : y = x$.

13 1) a) g est dérivable sur IR, $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

* $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

b) 0 est minimum absolue alors pour tout $x \in IR$.

on a $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ d'où $e^x - x \neq 0$ donc $\frac{e^x}{e^x - x}$ est définie sur IR.

2) a) On a : $e^x - x \geq 1$ donc $e^x - x > 0$ et $e^x > 0$ d'où pour tout $x \in IR$, $f(x) > 0$.

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty}\frac{e^x}{e^x(1-\frac{x}{e^x})}=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)} = 1$

car $\lim\limits_{+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0.$

3) f est dérivable sur IR, $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-e^x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$

d'où $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+e^x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

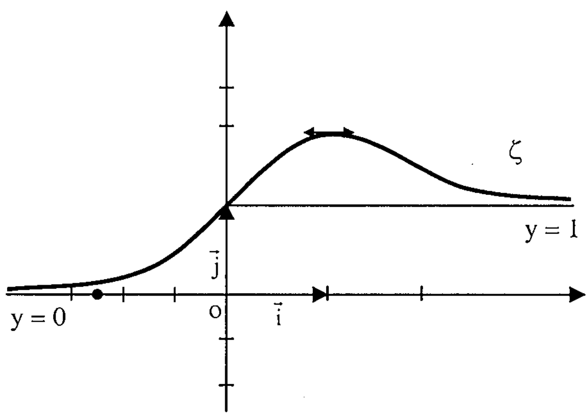
or $e^x>0$, $(e^x-x)^2>0$ donc le signe de f'(x) est celui de $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	$\nearrow$	f(1)	$\searrow$	1

* $f(1)=\dfrac{e}{e-1}$.

* $\lim\limits_{-\infty} f(x)=0$ car $\lim\limits_{-\infty} e^x=0$ donc y = 0 asymptote au voisinage de $-\infty$ de ζ.

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=1$ alors y = 1 asymptote au voisinage de $+\infty$ de la courbe ζ.



14 1) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x-1}{x+1}}=0=f(0)$ car $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty$

d'où f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x-1}{x+1}}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$

d'où f n'est pas continue à gauche en 0,
donc f n'est pas continue en (-1).

2) f n'est pas continue à gauche en -1, donc elle n'est pas dérivable à gauche en -1. Mais f est continue à droite en -1, on cherche alors si f est dérivable à droite en -1, on a ;

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x-1}{x+1}e^{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x-1}\ \text{ or }\ \lim_{(-1)^+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^{x}=0.$ $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x-1}=0$ d'où $\lim\limits_{(-1)}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=0.$

3) f est définie sur IR, continue et dérivable sur IR \ {-1}.

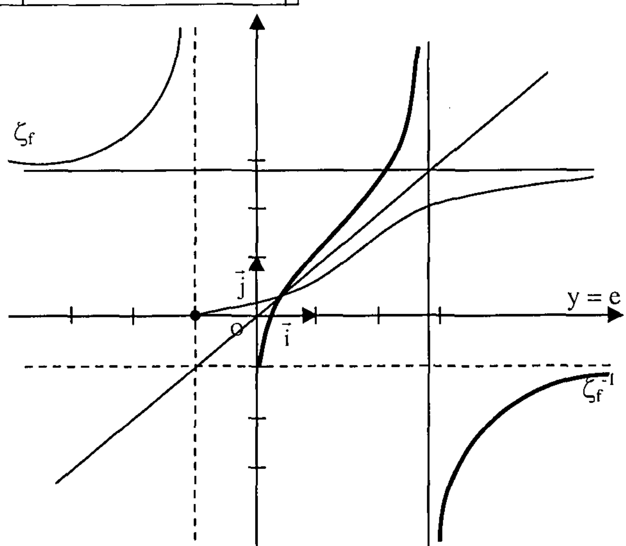
$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' e^{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}e^{\frac{x-1}{x+1}}>0$$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=e$ car $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$

Donc la droite d'équation y = e est une asymptote à (ζ_f) en (+∞) et de (-∞).

x	-∞	-1
f'(x)	+	‖
f(x)	e ↗	+∞ ‖

x	-1	+∞
f'(x)	‖0 +	
f(x)	0 ↗	e



4) a) f est continue et strictement croissante sur]-∞, -1[donc f réalise une bijection de]-∞, -1[sur]e, +∞[. De même f réalise une bijection de]-1, +∞[sur]0, e[or]e, +∞[∩]0, e[= ∅ d'où f réalise une bijection de]-∞, -1[∪]-1, +∞[sur]0, e[∪]e, +∞[or f(-1) = 0.
Donc f réalise une bijection de IR sur [0, +∞[\ {e}.
b) $S_\Delta(\zeta_f)=\zeta'$ avec $\Delta : y = x$ et ζ' la courbe de f^{-1}.

5) a) $f^{-1}(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où $f^{-1}(1) = 1$.

On a : $f'(1) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \neq 0$ donc $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = 2$.

b) $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0, +\infty[\setminus \{e\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

si $y \neq -1$

$f(y) = x \Leftrightarrow e^{\frac{y-1}{y+1}} = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = \text{Log}\, x$

$\Leftrightarrow (y - 1) = (y + 1)\text{Log}\, x \Leftrightarrow y(\text{Log}\, x - 1) = -1 - \text{Log}\, x \Leftrightarrow y = \frac{1+\text{Log}\, x}{1-\text{Log}\, x}$.

Si $y = -1$; $f(-1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1$.

Conclusion :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{1+\text{Log}\, x}{1-\text{Log}\, x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{e\}. \\ f^{-1}(0) = -1 \end{cases}$$

Chapitre VIII

Calcul intégral

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$
Le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F de f. Ce réel s'appelle l'intégrale de a et b de f et se note : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

2) Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, l'unique primitive de f sur I, qui s'annule en a est : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

3) Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$

■ $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

■ En intervertissant les bornes, on change le signe de l'intégrale :

$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

4) Linéarité de l'intégrale :

■ Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$; α un réel :

$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\qquad$ $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

■ Conséquences

$\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

■ Attention : Il n'existe aucun moyen général d'écriture autrement et plus simplement : $\int_a^b (f \cdot g)(x)dx$ et $\int_a^b \left(\frac{f}{g}\right)(x)dx$

5) Inégalités entre intégrales :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $a < b$

■ Théorème 1 :

Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

■ Théorème 2 :

Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

■ Théorème 3 :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < \int_a^b |f(x)|dx$$

■ Inégalité de la moyenne :

• Soit m et M deux réels donnés tel que $m < M$
Si pour tout $x \in [a,b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

• Si pour tout $x \in [a,b]$, on a : $f(x) \leq K$ avec $K > 0$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < K(b-a)$$

6) Définition : (Valeur moyenne) :

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$, le nombre réel $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

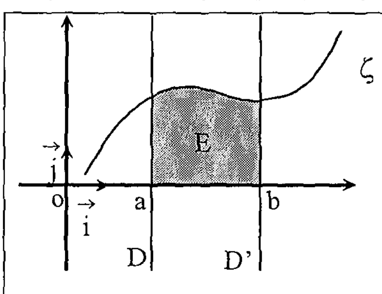
7) Intégration par parties :

Soient U et V deux fonctions dérivables telles que U' et V' sont continues sur $[a,b]$: $\int_a^b U(x)\cdot V'(x)dx = [U(x)\cdot V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)\cdot V(x)dx$

8) Calculs d'aires :

* Supposons que $f \geq 0$

ζ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. L'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est le domaine E du plan limité par les droites D et D' d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses et la courbe ζ.



L'aire du domaine E exprimée en unité d'aire est égal à : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \quad \mu.A$

($1\mu \cdot A =$ l'aire du carré de côté $\|\vec{i}\|$)

■ Théorème :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ l'aire de la partie limitée par les deux courbes représentatives de f et g et les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$ est le réel positif défini par :

$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \ \mu . A$

Conseils

■ Utiliser la parité de la fonction f :

Soit $a > 0$, Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)dx$

Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

■ Utiliser la périodicité de la fonction f : (période T)

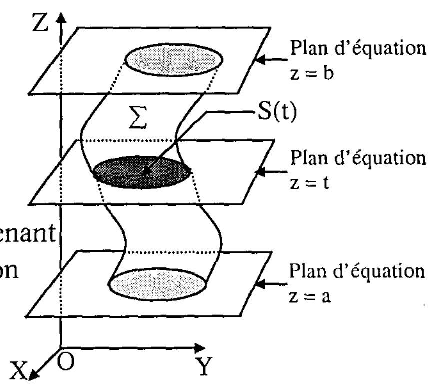
$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

▪ **Calcul de volume** :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Soit (Σ) un volume délimitée par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ et V son volume.

➢ Théorème (admis) :

Soit S(t) l'aire de la surface obtenue en prenant l'intersection de (Σ) avec le plan d'équation $z = t$ (le plan de cote t, $t \in [a ; b]$).
Si S est une fonction continue sur [a ; b]



alors : $V = \int_a^b S(t)dt$.

Remarque : le résultat est donné en unité volumique (u.v.). **L'unité de volume**

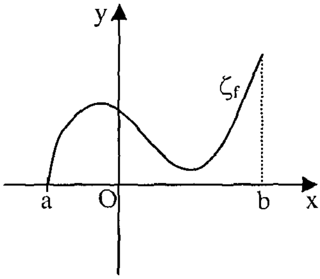
du parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueur les normes des vecteurs unitaires des axes du repère de l'espace. Si le repère orthonormé a pour unité 2 cm alors 1 u.v. = 2^3 cm^3 = 8 cm^3 ; ainsi si V = 5 (Sous-entendu u.v.), alors V = 40 cm^3.

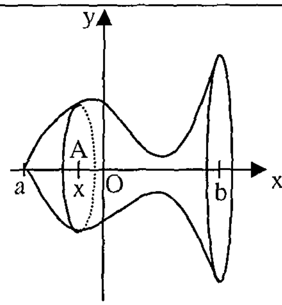
• **Application : solide de révolution**

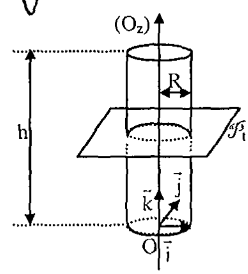
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Dans le plan d'équation $z = 0$, on note ζ_f la courbe représentant une fonction f continue sur un intervalle [a ; b] (a < b).

➢ Théorème

En faisant pivoter ζ_f autour de l'axe $(O ; \vec{i})$, on engendre un solide de révolution dont le volume est $V = \int_a^b \pi[f(t)]^2 dt$.







Exemple1 :

1) On considère le cylindre de hauteur h et de rayon R, d'axe (Oz) dont la base est dans le plan (Oxy).

2) Calculer le volume de ce cylindre.

Solution :

Soit $t \in [0, h]$ et $\mathscr{P}_t$ le plan d'équation $z = t$.

Soit S(t) l'aire du disque qui forme l'intersection de $\mathscr{P}_t$ avec le cylindre : $S(t) = \pi R^2$.

Donc $V = \int_0^h S(t)\,dt = \int_0^h \pi R^2\,dt = \left[\pi R^2 t\right]_0^h = \pi R^2 h$.

Conclusion : $V = \pi R^2 h$.

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \cos x$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère S la surface entre l'axe des abscisses et ζ_f.

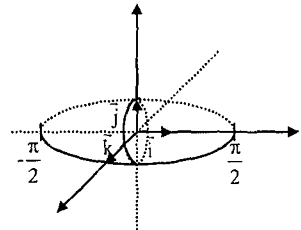
Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation de la surface S autour de l'axe des abscisses.

Solution :

On calcule V par la formule suivante :

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi f^2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x\,dx$$

Or $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ donc :



$$V = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + 1)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{\pi}{2}-(\frac{1}{2}\sin(-\pi)-\frac{\pi}{2})\right]=\frac{\pi}{2}\times\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

D'où le volume du solide vaut $\frac{\pi^2}{2}$.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer le signe de l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$?	→ Etudier le signe de g sur l'intervalle de bornes a, b et n'oublier pas les bornes (Exp : $g(x) \geq 0$ et $b < a$ $\Rightarrow \int_a^b g(dx)\,dx < 0$)
Comment déterminer une primitive de f sur I pour calculer une intégrale ?	1) On connaît la dérivée d'une fonction usuelle. 2) Où on connait une formule usuelle de dérivation (somme, produit, comparée,..) 3) Où la méthode d'intégrale par parties.
Comment comparer deux intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$?	On compare f et g sur [a, b] puis on ajoute l'intégrale.
Comment calculer $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par ζ_f, ζ_g et $x = a$ et $x = b$.	$\mathscr{A} = \int_a^b \lvert f - g\rvert dx$ Si $f - g$ est positif sur [a, b] Alors $\mathscr{A} = \int_a^b (f - g)(t)dt$ Si $f - g$ est négative sur [a, b] Alors $\mathscr{A} = - \int_a^b (f - g)(t)dt$ Si $f - g$ change de signe $\mathscr{A}$ = somme des aires algébriques des domaines définie à partir des intervalles sur les quels $f - g$ garde un signe constant.

ENONCES

1 Donner les valeurs des intégrales suivantes (observez les bornes).

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1789}\,dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\operatorname{tg} x)^7\,(\sin x)^2\,dx$

2 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^3 x\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{3x^2+4x-5}{x+2}\,dx$ d) $\int_{-1}^{5} |x-2|+|x-4|\,dx$

3 On considère les intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$.

1) Calculer I.

2) On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^4 x}$.

Montrer que $f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$.

3) Déduire de 2) une relation entre I et J. En déduire le calcul de J.

4 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales proposées en utilisant la méthode de l'intégration par parties.

b) $\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$; c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$. d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$; e) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+2x}\,dx$

5 Sans chercher à les calculer, comparer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \operatorname{Log} x\,dx$ et $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \operatorname{Log}\frac{1}{x}\,dx$; b) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(\operatorname{Log} x)^4\,dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x}(\operatorname{Log} x)^4\,dx$

6 L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; $k=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1) Calcul de I.

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+2})$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Calculer la valeur de I.

2) Calcul de J et K.

a) Vérifier que $J + 2I = K$.

b) Montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et de K.

7 On désigne par f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1) Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on ait : $f(x) = b\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + a$.

2) Soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, Calculer $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx$.

8 L'objectif de l'exercice est l'encadrement de l'intégrale :

$J(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - t^2 \cos^2 x}\, dx$ où $t \in [0,1]$.

1) Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(h) = 1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}$.

a) Déterminer le sens de variation de φ sur $[0,1]$.

b) Etablir que pour tout $h \in [0,1]$ on a : $1 - \frac{h}{2} - \sqrt{1-h} = \frac{h^2}{4\varphi(h)}$.

c) Déduire que : $1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} \leq \sqrt{1-h} \leq 1 - \frac{h}{2}$.

2) a) Calculer les deux intégrales : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$.

b) Déduire que pour tout réel $t \in [0,1]$ on a : $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t^2}{4} - \frac{3t^4}{16}\right) \leq J(t) \leq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)$

9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$.

1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Déterminer $g(x)$ dans le cas ou $f(x) = \cos^2 \pi x$.

10 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par : $g(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$

a) Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée g'. Donner le sens de variation de g.

c) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a :

$(x^2 - x)\ f(x^2) \leq g(x) \leq (x^2 - x)\ f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

11 Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, deux fois dérivable dont la dérivée seconde est continue sur $[0,1]$.

Supposons de plus que $f(0) = f(1) = 0$. Soit $x \in [0,1]$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, exprimez les intégrales suivantes à l'aide de x, $f(x)$ et $f'(x)$: $\int_0^x t f''(t)dt$ et $\int_x^1 (1-t)\ f''(t)\,dt$

2) Déduisez-en que : $-f(x) = (1-x) \int_0^x tf''(t)\,dt + x \int_x^1 (1-t) f''(t)\,dt$.

3) Si f'' est une constante C, donnez $f(x)$.

12 **Vrai – Faux.** Dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} g(t)dt$ alors $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in [-2, 2]$.

2) $\int_1^4 (x^2-5x+4)\,dx$ est négative.

3) Si $g(x) = (f(x))^2$ pour $x \in [-1,1]$ alors $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \left(\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right)^2$

4) Si $f(x) \geq 0$ sur IR alors $\int_1^{-1} f(x)\,dx \geq 0$.

13 **QCM**. Indiquer la bonne réponse par a, b ou c.

1) $\int_1^2 dx$ est égale à : $\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ 1 $\boxed{c}$ -1

2) $\int_1^2 \left(f(t) + 1\right) dt$ est égale à : $\boxed{a}$ $\int_0^2 f(t)\,dt+2$ $\boxed{b}$ $\int_0^2 f(t)\,dt+1$ $\boxed{c}$ $\int_0^2 f(t)\,dt$

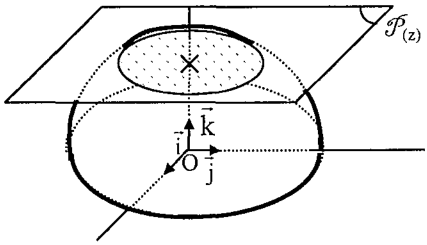
3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ est comprise entre : $\boxed{a}$ -2 et -1 $\boxed{b}$ 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ $\boxed{c}$ 2 et 3

4) La dérivée de la fonction $\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ est :

$\boxed{a}$ $f(x^2) - f(x)$ $\boxed{b}$ $2x\,f(x^2) - f(x)$ $\boxed{c}$ $2x\,f(x) - 1$

14 Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on a représenté la demi boule de centre O et de rayon R. (voir schéma ci-après).

1) le plan P(z) de côte $z (0 \leq z \leq R)$ coupe la demi boule suivant un disque de rayon r(z). Exprimer r(z) en fonction de z.
2) En déduire le volume de la demi boule. En déduire le volume d'une boule de rayon R.

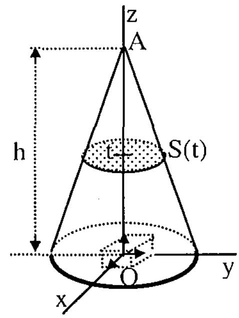


15 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit le cône d'axe (oz), de sommet A, de hauteur h dont la base est le disque de centre O et de rayon R.

Tout plan d'équation z = t avec $t \in [0 ; h]$ coupe le cône suivant un disque $\mathcal{D}$ d'aire S(t)

1) Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A Transformant la base du cône en $\mathcal{D}$, et en déduire S(t) en fonction de R, h et t.
2) Déterminer, à l'aide d'une intégrale, le volume du cône en unités de volume.



16 Le plan est rapporté à un repère orthonormé *(unité : 2 cm) la courbe* ζ représente la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin^3 x$.

Le domaine D est l'ensemble des points M(x, y) du plan, tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

1) Calculer l'aire A en cm^2 du domaine D.
2) a) Lineariser $\sin^6 x$.
   b) En déduire $\int_0^\pi \sin^6 x \, dx$.
3) Calculer le volume du solide engendre par la rotation de ζ autour de l'axe des x.

17 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm). On note ζ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = tg^2 x$. On considère $\mathcal{D}$ le domaine plan délimité par ζ, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et $x = \frac{\pi}{4}$ et $\mathfrak{I}$ le solide de révolution obtenu par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

1) Etudier la fonction f. Tracer ζ et $\mathscr{D}$.

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

3) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

4) En déduire le volume V du solide $\mathfrak{S}$ en cm^3.

18 Soit f définie sur]0,+∞[par $f(x) = x + 3 + \frac{2(1-\mathrm{Log}x)}{\sqrt{x}}$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que la droite D : y = x +3 est une asymptote à la courbe ζ.

b) Etudier la position relative de ζ et D.

2) Déterminer l'aire S de la surface comprise entre ζ et D et les droites d'équations x = 1 et x = λ avec $\lambda \geq 1$.

19 Soit f définie sur [1,+∞[pour $f(x) = e^x \mathrm{Log}\, x$

1) Etudier les variations de f.

2) Démontrer que pour tout x de [1,4] , $0 \leq f(x) \leq 2e^4\mathrm{Log}2$.

3) Démontrer que : $0 \leq \int_1^4 e^x \mathrm{Log}x\,dx \leq 6e^4\mathrm{Log}2$.

20 On se propose de calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$. On pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

1) Démontrer que , $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a : $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

2) a) Démontrer que, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$.

b) Déduisez-en que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$

3) a) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx$.

b) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

4) Déduisez de ce qui précède une approximation de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$ à 10^{-2} près.

21 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = xe^{-x^2}$ et $g(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle C_1 et C_2 les courbes représentatives respectivement de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 5cm).

1) Dresser le tableau de variation de f et g.
2) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_2.
3) Tracer C_1 et C_2 dans le même repère.
4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_2 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_2, les deux axes de coordonnées et la droite D.
   a) Calculer A_1.
   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_2 = -\frac{1}{2e} + A_1$.
   Déduire A_2 en cm^2.

CORRIGES

1 On sait que pour toute fonction continue sur $[-a,a]$ et paire (respectivement impaire) alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ (respectivement $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$).

a) $x \longmapsto (\sin x)^{1789}$ étant impaire alors l'intégrale proposée est nulle.

b) $x \longmapsto (tgx)^7$ étant impaire et $x \longmapsto (\sin x)^2$ est paire.

Alors $x \longmapsto (tgx)^7(\sin x)^2$ est impaire d'où l'intégrale proposée est nulle.

2 a) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$ est de forme $U'(x)\quad U^3(x)$ qui admet une primitive $\frac{1}{4}U^4(x)$.

d'où $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4}\sin^4(x)\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$.

b) $\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1+1}{x+1}dx = \int_0^1 1 + \frac{1}{x+1}dx$

$= \left[x + \text{Log}|1+x|\right]_0^1 = 1 + \text{Log}2$.

c) $\int_0^1 \frac{3x^2+4x-5}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{3x(x+2)-2(x+2)-1}{x+2}dx$

$= \int_0^1 3x - 2 - \frac{1}{x+2}dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x - \text{Log}|x+2|\right]_0^1$

$= \left(\frac{3}{2} - 2 - \text{Log}3\right) - (-\text{Log}2) = -\frac{1}{2} - \text{Log}3 + \text{Log}2 = -\frac{1}{2} + \text{Log}\left(\frac{2}{3}\right)$

d) On pose $f(x) = |x-2| + |x-4|$

x	$-\infty$ 2	4	$+\infty$
$\|x-2\|$	$-x+2$ 0	$x-2$	$x-2$
$\|x-4\|$	$4-x$	$4-x$ 0	$x-4$

d'où $f(x) = \begin{cases} -2x+6 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}(-2x+6)dx + \int_{2}^{4} 2dx + \int_{4}^{5} (2x-6)dx$$

$$= \left[-x^2+6x\right]_{-1}^{2} + \left[2x\right]_{2}^{4} + \left[x^2-6x\right]_{4}^{5} = 22$$

3 1) La fonction f définie par tgx est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et

$tg'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ on en déduit que $I = \left[tg\, x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$f'(x) = \frac{\cos^4 x - \sin x(3\cos^2 x)(-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{-2\cos^4 x + 3\cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{-2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos^4 x}$$

3) Comme $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \text{ d'où } \left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3J - 2I$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 3J - 2I \Leftrightarrow 2 = 3J - 2I$$

Comme $I = 1$ on en déduit que $J = \dfrac{4}{3}$.

4 b) Posons : $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = \sqrt{1+x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = \left[\frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{15}\left[(1+x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

c) Posons $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = 2\sqrt{x+2} \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx = \left[2x\sqrt{x+2}\right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x+2}dx$$

$$= \left[2x\sqrt{x+2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

d) Posons $\begin{cases} U(x) = x^2 \\ V'(x) = \sin x \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 2x \\ V(x) = -\cos x \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$$

On pose $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = \cos x \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = \sin x \end{cases}$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2$.

e) Posons : $\begin{cases} U(x) = x^2 \\ V'(x) = \sqrt{1+2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 2x \\ V(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+2x}dx = \left[\frac{1}{3}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 2x(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \sqrt{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 x(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

On pose $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = \frac{1}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} \end{cases}$

Donc $\int_0^1 x(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{1}{5}x(2x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 (2x+1)^{\frac{5}{2}}dx$

$$= \frac{1}{5}3^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{7}(2x+1)^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$$

D'où $\int_0^1 x^2\sqrt{2x+1}dx = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}3^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{35}\cdot 3^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{35}\right) = \frac{11\sqrt{3}}{35} - \frac{2}{105}$

5

a) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ alors $\text{Log}x < 0$

$3 \geq \frac{1}{x} \geq 1$ alors $\text{Log}\frac{1}{x} > 0$ d'où $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ on a $\text{Log}x < \text{Log}\frac{1}{x}$

par suite $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \text{Log}x\, dx < \int_{\frac{1}{3}}^{1} \text{Log}\frac{1}{x} dx$.

b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a $x^5 \leq \sqrt{x}$ et comme $(\text{Log}x)^4 \geq 0$

d'où $x^5(\text{Log}x)^4 \leq \sqrt{x}(\text{Log}x)^4$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(\text{Log}x)^4\, dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x}(\text{Log}x)^4\, dx$

6

1) a) f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2}\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

b) I peut s'écrire : $I = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \text{Log}\left(1+\sqrt{3}\right) - \text{Log}\left(\sqrt{2}\right)$

d'où $I = \text{Log}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

2) a) $J + 2I = \int_0^1 \dfrac{2dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \dfrac{2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$

Soit après simplification puisque $2 + x^2 = \left(\sqrt{2+x^2}\right)^2$

d'où $J + 2I = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$. On déduit que $J + 2I = K$.

b) Posons $\begin{cases} U(x) = \sqrt{x^2+2} \\ V'(x) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ V(x) = x \end{cases}$

d'où $K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \sqrt{3} - J$

c) Les calculs précédents permettent d'écrire que : $J + 2I = K$ et $\sqrt{3} - J = K$.
On additionne membre à membre on obtient :

$\sqrt{3}+2I=2K$ d'où $K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

comme $J=\sqrt{3}-K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

7 1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}=b\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+a=\dfrac{(b+a)\cos x+(a-b)\sin x}{\cos x+\sin x}$

Par identification on obtient : $b+a=0$ et $a-b=1$ donc $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$.

2) On pose $U(x)=\cos x+\sin x$ et $U'(x)=-\sin x+\cos x=\cos x-\sin x$

d'où $\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} -\frac{1}{2}\frac{U'(x)}{U(x)}+\frac{1}{2}dx=\left[-\frac{1}{2}\operatorname{Log}|U(x)|+\frac{1}{2}x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}$

$=-\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}|\cos\alpha+\sin\alpha|-\dfrac{1}{2}\alpha$

comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

Alors $\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} f(x)dx=\frac{\pi}{4}-\alpha$.

8 1) a) $h\longmapsto\sqrt{1-h}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$.

Alors φ est dérivable sur $[0,1[$ et $\varphi'(h)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-h}}<0$

donc φ est strictement décroissante sur $[0,1]$.

b) $\dfrac{h^2}{4\varphi(h)}=\dfrac{h^2}{4\left(1-\dfrac{h}{2}+\sqrt{1-h}\right)}=\dfrac{h^2}{4}\dfrac{1-\dfrac{h}{2}-\sqrt{1-h}}{\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^2-(1-h)}$

$=\dfrac{h^2}{4}\dfrac{1-\dfrac{h}{2}-\sqrt{1-h}}{\dfrac{h^2}{4}}=1-\dfrac{h}{2}-\sqrt{1-h}$

c) On a φ est décroissante sur $[0,1]$

Si $0\le h\le 1$ alors $\varphi(0)\ge\varphi(h)\ge\varphi(1)$

d'où $2\ge\varphi(h)\ge\dfrac{1}{2}$ ou encore $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{\varphi(h)}\le 2$ soit $\dfrac{h^2}{8}\le\dfrac{h^2}{4\varphi(h)}\le\dfrac{h^2}{2}$

remplaçons $\dfrac{h^2}{4\varphi(h)}$ par sa valeur on obtient :

$\dfrac{h^2}{8} \leq 1 - \dfrac{h}{2} - \sqrt{1+h} \leq \dfrac{h^2}{2}$

ou encore $1 - \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{8} \geq \sqrt{1+h} \geq 1 - \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{2}$

or $-\dfrac{h^2}{8} < 0$ d'où l'inégalité $1 - \dfrac{h}{2} \geq \sqrt{1+h} \geq 1 - \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{2}$.

2) a) • $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

Alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t dt$

$= \dfrac{1}{2}\left[t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

• $\cos^4 t = \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4$

$= \dfrac{1}{16}(e^{4it} + 4e^{3it}e^{-it} + 6e^{2it}e^{-2it} + 4e^{it}e^{-3it} + e^{-4it})$

$= \dfrac{1}{16}\left[e^{i4t} + e^{-i4t} + 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6\right] = \dfrac{1}{8}\cos 4t + \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{8}$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{8}\cos 4t + \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{3}{8}\right) dt$

$= \left[\dfrac{1}{32}\sin 4t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + \dfrac{3}{8}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3\pi}{16}$

b) On a : $1 - \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{2} \leq \sqrt{1-h} \leq 1 - \dfrac{h}{2}$ pour $h \in [0,1]$

On a : $0 \leq t \leq 1$ et $\cos^2 x \in [0,1]$

On pose $h = t^2\cos^2 x$ l'inégalité devient :

$1 - \dfrac{t^2\cos^2 x}{2} - \dfrac{t^4\cos^4 x}{2} \leq \sqrt{1 - t^2\cos^2 x} \leq 1 - \dfrac{t^2\cos^2 x}{2}$

d'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \dfrac{t^2}{2}\cos^2 x - \dfrac{t^4}{2}\cos^4 x dx \leq J(t) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \dfrac{t^2}{2}\cos^2 x dx$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\frac{t^2}{2}\cos^2 x-\frac{t^4}{2}\cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx-\frac{t^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x-\frac{t^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x$

$$=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{t^2}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{t^4}{2}\cdot\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{2}-t^2\frac{\pi}{8}-t^4\frac{3\pi}{32}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{t^2}{4}-\frac{3t^4}{16}\right)$$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\frac{t^2}{2}\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx-\frac{t^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{t^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{t^2}{4}\right]$

9 1) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors il existe une seule primitive F de f qui s'annule en 0 c'est $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $F(0)=0$

d'où $\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)=\frac{F(x)}{x}$; g est le quotient 2 fonctions continue

$x\to F(x)$ et $x\to x$ sur $\left]0,+\infty\right[$ d'où g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Continuité en 0:

$$\lim_{0^+} g(x)=\lim_{0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$=F'(0)=f(0)=g(0)$ donc g est continue en 0

d'où g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) $x\longmapsto F(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F(x)=f(x)$

$x\longmapsto\frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x)=\frac{F'(x)x-F(x)}{x^2}=\frac{xf(x)-F(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left[f(x)-g(x)\right]$$

3) $f(x)=\cos^2\pi x$.

$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\cos^2\pi t\,dt$ et $g(0)=f(0)=1$

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1+\cos 2\pi t}{2}dt=\frac{1}{2x}\left[t+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{2x}\left[x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}\frac{\sin 2\pi x}{x}$$

$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sin 2\pi x}{4\pi x}$ pour $x>0$ et $g(0)=1$.

10 1) f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f'(x) = \dfrac{-3x^2}{(x^3-1)^2} \leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	0

2) a) $\forall\ x \in]1,+\infty[,\ \ g(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$

g existe dés que f soit continue sur $[x, x^2]$.

On a : $x \in]1,+\infty[$ alors $x^2 \in]1,+\infty[$ et f est continue sur $]1,+\infty[$

en particulier f est continue sur $[x, x^2]$ d'où l'existence de g.

b) F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$

$U : x \longmapsto x^2$ dérivable sur $]1,+\infty[$.

d'où $g = f \circ U - F$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$\forall\ x \in]1,+\infty[;\ g'(x) = U'(x) \cdot F'(U(x)) - F'(x)$

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^6-1} - \frac{1}{x^3-1}$$

$$= \frac{2x - x^3 - 1}{x^6 - 1} = \frac{(x-1)(-x^2-x+1)}{x^6-1}$$

On a : $x > 1$ alors $x^6 > 1$ et $x - 1 > 0$

donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-x^2 - x + 1$.

$\Delta = 1 + 4 = 5$ alors $x' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} < 1$ et $\qquad x'' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} < 0$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		$\searrow$	

c) **<u>1^er^ méthode :</u>**

$\forall\ x \in]1,+\infty[\ \ x^2 > x$

$\forall\ t \in [x, x^2] \subset]1,+\infty[;\ \ x \leq t \leq x^2$

Comme f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Alors $f(x) \geq f(t) \geq f(x^2)$ f est continue sur $[x, x^2]$

d'où $\int_x^{x^2} f(x)dt \geq \int_x^{x^2} f(t)dt \geq \int_x^{x^2} f(x^2)dt$

$$f(x)[t]_x^{x^2} \geq g(x) \geq f(x^2)[t]_x^{x^2}$$

On déduit que : $(x^2-x)f(x^2) \leq g(x) \leq (x^2-x)f(x)$.

2ème méthode : En utilisant le théorème de la moyenne

$\forall\ x \in \left]1,+\infty\right[,\ x^2 > x$

La valeur moyenne de f sur $\left[x,x^2\right]$ est $\overline{f} = \dfrac{1}{x^2-x}\int_x^{x^2} f(t)dt$

soit $\overline{f} = \dfrac{1}{x^2-x}g(x)$

d'après le théorème de la moyenne il existe $C \in \left[x,x^2\right]$ tel que $\overline{f} = f(C)$

d'où $f(C) = \dfrac{g(x)}{x^2-x}$.

- $x \leq C \leq x^2$ et f est décroissante sur $\left]1,+\infty\right[$

$f(x) \geq f(C) \geq f(x^2)$ donc $f(x) \geq \dfrac{g(x)}{x^2-x} \geq f(x^2)$

Comme $x^2-x>0$ on en déduit que

$(x^2-x)f(x) \geq g(x) \geq (x^2-x)f(x^2)$

- Calcul de $\lim\limits_{+\infty} g(x)$: $(x^2-x)f(x^2) \leq g(x) \leq (x^2-x)f(x)$

d'où $\dfrac{x^2-x}{x^6-1} \leq g(x) \leq \dfrac{x^2-x}{x^3-1}$ comme $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^6-1} = \lim\dfrac{1}{x^4} = 0$

et $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^3-1} = \lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$.

11 1) Posons $\begin{cases} U(t)=t \\ V'(t)=f''(t) \end{cases}$ on a $\begin{cases} U'(t)=1 \\ V(t)=f'(t) \end{cases}$

- $\int_0^x tf''(t)dt = [tf'(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)dt = xf'(x) - [f(t)]_0^x = xf'(x) - f(x)$

Car $f(0)=0$

- $\int_x^1 (1-t)f''(t)dt = \int_x^1 f''(t) - \int_x^1 tf''(t)dt$.

En utilisant une intégration par parties semblable à la précédente, nous trouvons :

$$f'(1)-f'(x)-[tf'(t)]_x^1 + \int_x^1 f'(t)dt = f'(1)-f'(x)-f'(1)+xf'(x)+f(1)-f(x)$$

Ainsi $\int_x^1 (1-t)f''(t)dt = (x-1)f'(x)-f(x)$ car $f(1)=0$

2) $\forall\ x \in [0,1],\ (1-x)\int_0^x tf''(t)dt + x\int_0^1 (1-t)f''(t)dt$

$= (1-x)xf'(x) - (1-x)f(x) + x(x-1)f'(x) - xf(x) = -f(x)$

d'où l'égalité demandé est prouvée.

3) Si f'' est une constante C : $\forall\ x \in [0,1]$ on a :

$$-f(x) = (1-x)C\int_0^x tdt + xC\int_x^1 (1-t)dt$$

donc $-f(x) = C(1-x)\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x + Cx\left[t - \dfrac{t^2}{2}\right]_x^1$ d'où $f(x) = \dfrac{C(x-1)x}{2}$.

12 1) Faux : $f(t) = t^3$ et $g(t) = t^5$ alors $f \neq g$ mais $\int_{-2}^2 f(t)dt = \left[\dfrac{t^4}{4}\right]_{-2}^2 = 0$

$$\int_{-2}^2 g(t)dt = \left[\dfrac{t^6}{6}\right]_{-2}^2 = 0 = \int_{-2}^2 f(t)\,dt$$

2) Vrai :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur [1, 4] on a $x^2 - 5x + 4 < 0$ donc $\int_1^4 x^2 - 5x + 4 < 0$

3) Faux : $g(x) = x^2$, $f(x) = x$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \dfrac{2}{3} \text{ et } \left(\int_{-1}^1 x\,dx\right)^2 = \left(\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^1\right)^2 = 0 \neq \int_{-1}^1 g(x)\,dx$$

4) Faux : $f(x) \geq 0$ mais $-1 \leq 1$ donc $\int_1^{-1} f(x)\,dx \leq 0$

13 1) La réponse est $\boxed{b}$: car $\int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

2) La réponse est $\boxed{a}$:

$$\int_0^2 f(t) + 1dt = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_0^2 1dt = \int_0^2 f(t)dt + [t]_0^2 = \int_0^2 f(t)\,dt + 2$$

3) La réponse est $\boxed{b}$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = \cos 0 = 1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

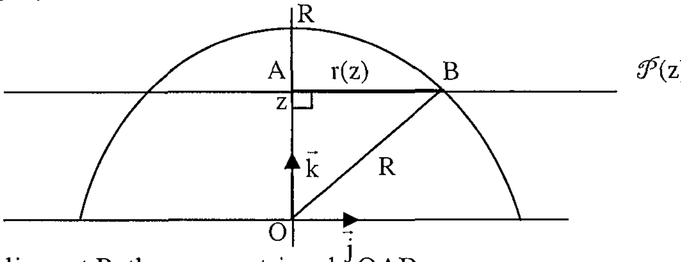
4) La réponse est $\boxed{b}$: $h(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$

On pose F une primitive de f.

$h(x) = F(x^2) - F(x)$

$h'(x) = 2x\,F'(x^2) - F'(x) = 2x\,f(x^2) - f(x)$.

14 Pour déterminer r(z) ,représentons une vue en coupe selon le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$



En appliquant Pythagore au triangle OAB,

On obtient : $R^2 = z^2 + r^2(z). \Leftrightarrow r^2(z) = R^2 - z^2$

$r(z) = \sqrt{R^2-z^2}$, puisque $O \le z \le R$ et $r(z) \ge O$.

2) Désignons par s(z) l'aire du disque d'intersection du plan P(z) et de la demi boule : $s(z) = \pi\, r^2(z) = \pi\,(R^2-z^2)$

$$v = \int_0^R s(z)\,dz = \int_0^R \pi(R^2-z^2)\,dz = \pi\int_0^R (R^2-z^2)\,dz$$

$$= \pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_O^R = \pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \pi.\frac{2}{3}R^3$$

Le volume d'une boule de rayon R est donc égale à 2 v soit $\frac{4}{3}\pi R^3$

15 Soit O' le centre de disque $\mathcal{D}$.

D'après Thalès on a : $\frac{AO'}{AO} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{h-t}{h} = \frac{r}{R}$.

L'homothétie de centre A transformant la base du cône en $\mathcal{D}$ est de rapport

$k = \frac{r}{R} = \frac{h-t}{h} = 1-\frac{t}{h}$.

$S(t)$ = l'aire du disque $\mathcal{D} = k^2$. l'aire du disque de la base

$$= k^2 . \pi . R^2 = \pi R^2 (1-\frac{t}{h})^2$$

2) Soit V le volume du cône.

$$V = \int_0^h S(t)\,dt = \int_0^h \pi R^2(1-\frac{t}{h})^2dt = \pi R^2[-\frac{h}{3}(1-\frac{t}{h})^3]_0^h \;= \frac{1}{3}\pi R^2h.u.v$$

On retrouve que V est égale au tiers du volume du cylindre ayant même base (πR^2) et même hauteur h que la cône.

16 1) La fonction sin est positive sur $[0,\pi]$ donc il en est de même pour f donc $A = 4\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$

$\text{Sin}^3x = (1 - \cos^2 x) \,.\, \sin x = \sin x - \sin x \,.\, \cos^2 x$. On a donc

$$A = 4\int_0^{\pi}(\sin x - \sin x \,.\, \cos^2 x)\,dx = 4\left[-\cos x + \left(\frac{1}{3}\right)\cos^3 x\right]_0^{\pi} = \frac{16}{3}\,\text{cm}^2$$

2) a) $\sin^6 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^6 = \dfrac{1}{(2i)^6}\left(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$

Soit $\sin^6 x = \dfrac{-1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20)$

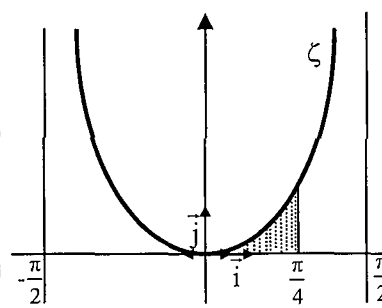
b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{1}{32}\left[10x - \frac{15}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 6x\right]_0^{\pi} = \frac{5\pi}{16}$

3) La section de ce solide par le plan d'équation $x = x_0$ est un cercle de rayon $f(x)$; le volume de ce solide est donc

$$V = 8\int_0^{\pi}\pi(\sin^3 x)^2\,dx = 8\pi\int_0^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{5\pi^2}{2}\,\text{cm}^3.$$

17 1) $f(x) = \text{tg}^2 x$, f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ .et $f'(x) = 2(1 + \text{tg}^2 x)\,\text{tg}x$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \text{tg}\,x = -\infty$.

2) f est positive sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc l'aire A du domaine $\mathcal{D}$ vaut :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}((\text{tg}^2 x + 1) - 1)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{tg}^2 x + 1)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = [\text{tg}\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\text{tg}\frac{\pi}{4} - \text{tg}\,0) - (\frac{\pi}{4} - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

donc $A = 1 - \dfrac{\pi}{4}$. u. a. Puisque 1 unité = 2cm, 1u.a = 4cm²

donc $A = 4(1 - \dfrac{\pi}{4})\,\text{cm}^2 = (4 - \pi)\,\text{cm}^2 \simeq 0{,}86\,\text{cm}^2$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^4x + tg^2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x(tg^2x+1)\,dx.$

Posons $u(x) = tgx$; alors $u'(x) = tg^2x + 1$

donc $tg^2x(tg^2x + 1) = u^2(x) \times u'(x)$ qui s'intègre en $\frac{1}{3}u^3(x)$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}tg^3x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(tg\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}(tg\,0)^3 = \frac{1}{3}$

4) On sait que $V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi f^2(x)\,dx = \pi\left[\frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx\right]$

donc $V = \pi\left[\frac{1}{3} - (1 - \frac{\pi}{4})\right] = \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi \times \frac{3\pi - 8}{12}$

1.u.v = 8 cm^3 donc $V = 8\pi\frac{3\pi-8}{12}cm^3$ soit $V = 2\pi\frac{3\pi-8}{12}cm^3$ $(V \simeq 2{,}98\,cm^3)$.

18 1) a) $f(x) - (x+3) = \dfrac{2(1-Logx)}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x)-(x+3) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2(1-Logx)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2Logx}{\sqrt{x}}$

on sait que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, cherchons $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2Logx}{\sqrt{x}}$

on pose $X = \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2Logx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{2LogX^2}{X} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{4LogX}{X} = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x)-(x+3) = 0$ par suite D : y = x + 3 est une asymptote de ζ en $+\infty$.

b) $f(x) - (x+3) = \dfrac{2(1-Logx)}{\sqrt{x}}$

$*1 - Log\,x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq Logx \Leftrightarrow Loge \geq Logx \Leftrightarrow e \geq x$

Si x < e alors f(x) –(x +3) > 0donc est ζ au dessus de D.

Si x > e alors donc est ζ au dessous de D.

2) Si $\lambda \leq e$, la courbe est au dessus de D donc $S = 4\int_1^{\lambda} (1-Logx).\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.\mu.A$

$$\begin{cases} U(x) = 1 - Logx \\ V'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} ; \begin{cases} U'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ V(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$S = 4\,[\,\sqrt{x}(1\text{-Log}x)]_1^{\lambda} - 4\int_1^{\lambda} -\frac{1}{x}\sqrt{x}dx = 4\sqrt{\lambda}(1\text{-Log}\lambda)\text{-}4+4\int_1^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

$S= 4\sqrt{\lambda}(1\text{-Log}\lambda)\text{-}4+[8\sqrt{x}]_1^{\lambda} = 4\sqrt{\lambda}\text{-}4\sqrt{\lambda}\text{Log}\lambda\text{-}4+8\sqrt{\lambda}\text{-}8 = 12\sqrt{\lambda}\text{-}4\sqrt{\lambda}\text{Log}\lambda\text{-}12\,.$

Si $\lambda \geq e$, on utilise alors la relation de Chasles :

$$S = 4\left[\int_1^{e}(1\text{-Log}x)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \int_e^{\lambda}(\text{Log}x\text{-}1).\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right]$$

On sait d'après ce qui précède qu'une primitive de $(1\text{-Log}x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est

$\sqrt{x}(1\text{-Log}x)+2\sqrt{x}$;

D'où $S = 4\,[\,\sqrt{x}(1\text{-Log}x)+2\sqrt{x}\,]_1^{e}\text{-}4[\sqrt{x}(1\text{-Log}x)+2\sqrt{x}\,]_e^{\lambda} = 16\sqrt{e}\text{-}12\sqrt{\lambda}+4\sqrt{\lambda}\text{Log}\lambda\text{-}12.$

19 1) f est dérivable sur $[1, +\infty[$, $f'(x) = e^x.\,\text{Log }x + e^x.\frac{1}{x} = e^x\,(\text{Log}x+\frac{1}{x})$

sur $[1,+\infty[$ on a $\text{Log }x \geq 0, \frac{1}{x} \geq 0$, comme e^x est toujours strictement positif

donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante $[1,+\infty[$.

2) $1 \leq x \leq 4$ et f est strictement croissement alors $f(1) \leq f(x) \leq f(4)$

où encore $0 \leq f(x) \leq e^4\text{Log}4$. Soit $0 \leq f(x) \leq 2e^4\text{Log}2$.

3) On pour tout $x \in [1,4]; 0 \leq f(x) \leq 2e^4\text{Log}2$

donc $\int_1^4 0\;dx \leq \int_1^4 f(x)dx \leq \int_1^4 2e^4\text{Log}2dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_1^4 e^x\text{Log}x\;dx \leq 6e^4\text{Log}2.$

Autre méthode : on a $0 \leq f(x) \leq 2e^4\text{Log}2$.

D'après les inégalités de la moyenne on obtient :

$(4\text{-}1) \times 0 \leq \int_1^4 e^x\text{Log}x\;dx \leq (4-1)2e^4\text{Log}2 \Leftrightarrow\; 0 \leq \int_1^4 e^x\text{Log}x\;dx \leq 6e^4\text{Log}2$

20 1) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

et $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2} = \dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \leq 0$ alors f est strictement croissante

sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ d'où $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ on a $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

comme $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$

Conclusion : $\forall\ x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ on a $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$.

2) a) $1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$

3) a) Posons $\begin{cases} U(x) = 1 + x \\ V'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = -e^{-x} \end{cases}$

d'où $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx = \left[-e^{-x}(1+x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x}dx$

$= -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1 - \left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{e}} + 2$

b) On a : $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$ multipliant par x^2.

$x^2 \le x^2 f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}x^2$. d'où $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{e}}x^2dx$

comme $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$

Alors on obtient : $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \le \frac{2}{24\sqrt{e}} = \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

4) D'après 2)b) et 3)a) : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx = -\frac{5}{2\sqrt{e}} + 2 + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$

La double inégalité de 3)b) fournit que :

$\frac{1}{24} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx + 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} \le \frac{1}{12\sqrt{e}} + 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$

donc $0{,}525 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx \le 0{,}535$. Nous pouvons ainsi prendre 0,53 comme valeur approchée de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$ à 10^{-2} près.

Remarque : Toute autre valeur de $[0{,}525\ ;\ 0{,}535]$ convient.

21 1) $f(x) = xe^{-x^2}$ et $g(x) = x^3e^{-x^2}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+\ ;\ f'(x) = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

Le signe de f' est celui de $1-2x^2$

x	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\lim_{+\infty}\frac{1}{x\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)}=0 \qquad \text{car } \lim_{+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty.$$

$$\forall\ x\in\mathbb{R}_+,\ g'(x)=3x^2e^{-x^2}+x^3(-2xe^{-x^2})\ =e^{-x^2}(3x^2-2x^4)$$
$$=x^2e^{-x^2}(-2x^2+3)$$

Le signe de g' est celui de $-2x^2+3$

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

$$\lim_{+\infty} g(x)=\lim_{+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{+\infty} x\,\frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \text{on pose : } x^2=t$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{t\sqrt{t}}{e^t}=\lim_{+\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{e^t}\quad=\lim_{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{2}{3}t}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}t}\right)^{\frac{3}{2}}}=0 \ \text{car } \lim_{+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$$

2) Cherchons le signe de $g(x)-f(x)=x^3e^{-x^2}-xe^{-x^2}$

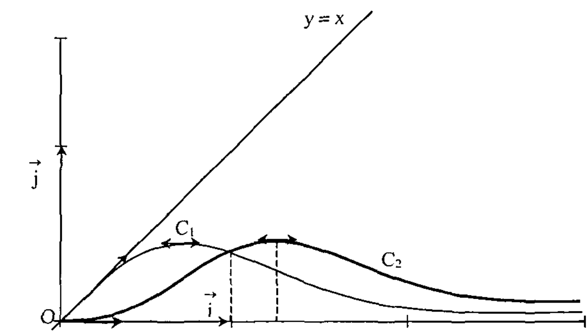
$$=xe^{-x^2}(x^2-1)\ =x(x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

Comme $x\geq 0$ alors le signe de $g(x)-f(x)$ est celui de $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$-$	0	$+$	
Position de C_2 et C_1		C_2 au-dessous de C_1		C_2 au-dessus de C_1	

C_1 et C_2 coïncident

3) $y=0$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$ pour C_1 et C_2 $f'(0)=1$ et $g'(0)=0$.



4) a) $A_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \ u\cdot A$

$$= \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}$$

b) $A_2 = \int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$

Posons $\begin{cases} U(x)=x^2 \\ V'(x)=xe^{-x^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x)=2x \\ V(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}e^{-1} + A_1 = -\frac{1}{2e} + A_1$$

$$A_2 = -\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\,u\cdot A$$

$$A_2 = 0{,}132\,uA = 0{,}132 \times 25cm^2 = 3{,}30cm^2$$

[1uA = (l'aire du carré de côté $\|\vec{i}\|$ qui est 5cm) = 25 cm^2]

Chapitre IX

Les suites réelles

I) **Généralités** :

■ Définition : Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

■ Une suite peut être définie, entre autres :

- Une façon explicite : $U_n = f(n)$, ou f une fonction définie sur $[0, +\infty[$
- Par récurrence : U_0 est donnée et $U_{n+1} = f(U_n)$; f est une fonction.

■ Monotonie:

Une suite numérique U est:

- Croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$.
- *Décroissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1}$.
- Constante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.
- Strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$.
- Strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > U_{n+1}$.

■ Suite bornée :

Une suite numérique U est :

- Majorée par un réel M si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.
- Minorée par un réel m si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq m$.
- Bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

II) **Suites convergentes** :

■ Définition : Une suite U est convergente si elle admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$.

■ Théorèmes de comparaison :

- Soient U et V deux suites, ℓ un réel.
  Si à partir d'un certain rang, on a : $|U_n - \ell| < V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$.
  alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$.
- Soient U, V et W trois suites, et ℓ un réel ;
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $U_n \leq W_n \leq V_n$. alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = \ell$
- Soient U, V deux suites tel que $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$; $\lim\limits_{+\infty} V_n = \ell'$
  Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ alors $\ell < \ell'$.

■ Théorèmes de convergence :
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

■ Théorèmes :
- Si (U_n) est une suite convergente vers ℓ, f est une fonction continue en ℓ et $U_n \in D$, (D domaine de définition de f), alors $f(U_n)$ converge vers $f(\ell)$.
- U est une suite, si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $U_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang).
  alors $\ell \geq 0$.
- f une fonction définie sur D, f continue en ℓ.
  On considère la suite U vérifiant $f(U_n) = U_{n+1}$.
  Si la suite U converge vers ℓ alors ℓ est une solution de l'équation :
$f(x) = x$ ou encore $f(\ell) = \ell$.

■ Définition : Une suite est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ est l'infini où n'existe pas.

■ Théorèmes de comparaisons :
- Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang
  Si $V_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang
  Si $V_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

■ Théorèmes :
- Soit f une fonction si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ alors la suite de terme général $U_n = f(n)$ à pour limite α (α peut être finie ou infinie).

▪ **Réflexes :**

Situations	Réflexes
Comment étudier la monotonie d'une suite ?	* Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ ou * Si $U_n = f(n)$, étudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ ou * Si tous les termes sont positifs strictement on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1 ou * Utiliser un raisonnement par récurrence.

Comment montrer qu'une suite est majorée par M , minorée par m , bornée ?	* Etudier le signe de $U_n - M$. * Si $U_n = f(n)$, utiliser le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ * Utiliser un raisonnement par récurrence.
Comment étudier la convergence d'une suite U ?	* On ne reconnaît une suite usuelle (géométrique ,...) <u>ou</u> on applique le théorème des encadrement <u>ou</u> on applique le théorème de convergence des suites monotones si les hypothèses le permettent <u>ou</u> on applique le théorème de convergence des suites adjacentes.
Comment calculer la limite ℓ d'une suite convergente définie par $f(U_n) = U_{n+1}$? (f continue sur I et $U_n \in I$)	* Si f est convergente vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$ * Si U est minorée par m alors $\ell \geq m$ * Si U est majorée par M alors $\ell \leq M$ * On choisi la solution ℓ de *l'équation f(x) = x qui convient.*

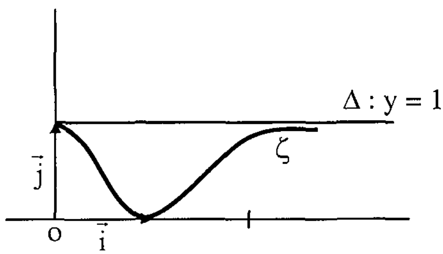
ENONCES

1 On considère la fonction définie sur IR_+.

Son tableau de variation est le suivant

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe ζ et son asymptote $\Delta : y = 1$



1) $k \in IR$, en utilisant le graphique, préciser en fonction de k le nombre de solution dans $[0, +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

2) $n \in IN^*$, déterminer les valeurs de n pour les quelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet 2 solutions distinctes.

3) n un entier supérieur ou égal à 2.Montrer que $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions (U_n) et (V_n) respectivement comprise dans l'intervalle $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

4) Déterminer les variations de (U_n) et de (V_n).

5) Montrer que U est convergente et déterminer sa limite.
Montrer que V est convergente et déterminer sa limite.

2 On définit les suites U et V par $U_0 = 3$, $V_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$.

1) Montrer que les suites U et V sont strictement positifs.

2) Montrer que pour $n \in IN$: on a,

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $W_n = V_n - U_n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq W_{n+1} \leq \frac{1}{2} W_n$.

(On pourra remarquer que $\frac{V_n - U_n}{V_n + U_n} = 1 - \frac{2U_n}{U_n + V_n}$).

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) La suite W est elle convergente ?

3 **Vrai - Faux**

Dire si chacune des propositions est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1) Si U converge alors U^2 converge.
2) Si U^2 converge alors U converge.
3) Si U est bornée alors U converge.
4) Si U converge alors U est bornée.
5) Si U^2 est bornée alors U est bornée.
6) Si $\lim\limits_{+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} V_n = \ell$ (fini)

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équivalence suivante :

$U_{n+1} \leq 0{,}95\, U_n$ si et seulement si $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1{,}9$.

2) On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Montrer qu'il existe un seul nombre $\alpha \in [1,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1{,}9$.

c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.

d) Montrer que pour tout entier $n \geq 16$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1{,}9$.

3) a) Déterminer les variations de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à partir du rang 16.

b) Que peut – on conclure pour la suite ?

4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 16 l'encadrement $0 \leq U_n \leq 0{,}95^{n-16} U_{16}$. En déduire la limite de (U_n).

5

La suite (U_n) définie par :
$U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1) Montrer que la suite (S_n) définie par : $S_n = U_{n+1} + U_n$, pour tout entier naturel n, est une suite géométrique de raison 8 ; en déduire l'expression de S_n, en fonction de n.
2) On pose $V_n = (-1)^n U_n$ et on considère la suite (t_n) définie par $t_n = V_{n+1}-V_n$, pour tout entier naturel n. Exprimer t_n en fonction de S_n.
3) a) Montrer par récurrence que $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = V_{n+1}$.

   b) Montrer que $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = \left(\frac{1}{9}\right)\left((-8)^{n+1} -1\right)$.

   c) Calculer V_n, puis U_n en fonction de n.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{U_n}{8^n})$.

6

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$

et soit U la suite réelle définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) ; \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.

   b) Etablir que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \leq x$.

   c) Montrer que la suite U est convergente puis trouver sa limite.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $f(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n+1}$.

   b) Etudier les variations de f sur [0, 1].

   c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   Retrouver ainsi la limite de la suite U.

7

Soit $(U_n)_{n \in N}$ une suite définie par la donnée du réel $U_0 > 0$ et par la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a $U_n > 0$

2) Exprimer $U_{n+1} - 2$ et $U_{n+1} - 3$ en fonction de U_n.

   En déduire que :

   a) Si $U_0 < 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 2$

b) Si $U_0 = 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2$

c) Si $U_0 > 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < U_n < 3$

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

Quelle est sa limite.

4) Calculer U_1 et U_2 en fonction de U_0.

Montrer que pour tout entier naturel n il existe un réel a_n tel que

$U_n = \dfrac{(2a_n + 1)U_0 + 2a_n}{a_n U_0 + a_n + 1}$ et que la suite $(a_n)_{n\in N}$ est telle que

$a_{n+1} = 4a_n + 1$. Calculer a_0, a_1, a_2

5) Soit $(b_n)_{n\in N}$ la suite définie par $b_n = a_n + \dfrac{1}{3}$

Montrer que $(b_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique. Calculer b_n en fonction de n. En déduire l'expression de a_n en fonction de n puis celle de U_n en fonction de U_0 et n. Retrouver la limite de $(U_n)_{n\in N}$.

8

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$

par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3 + 4U_n^2}{6 + U_n^2}}$.

1) a) Vérifier que pour tout entier n on a : $\dfrac{3+4U_n^2}{6+U_n^2} = 4 - \dfrac{21}{U_n^2+6}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on $0 \leq U_n < 1$.

c) Etudier la monotonie de U, en déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a: $0 < 1 - U_{n+1} \leq \dfrac{2}{2+\sqrt{2}}(1 - U_n)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1-\left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)^n \leq U_n < 1$

puis calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1-U_n^2}{3+U_n^2}$

a) Montrer que V est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.

9 Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} < U_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

En déduire $\lim_{n\to+\infty}(U_{n+1} - U_n)$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n^2 = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

En déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite.

10 Soit (U_n) la suite définie

par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n}$

1) Montrer que $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signes contraires.

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

2) En déduire que si (U_n) converge alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 2$.

4) Montrer que pour tout $n \geq 2$, On a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

5) En déduire que (U_n) converge et trouver sa limite.

11 On considère la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par $U_0 > 0$

et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) On suppose que l'on a : $U_0 = \frac{3}{4}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} \leq \frac{7}{8}U_n$.

Retrouver alors la limite de U_n .

2) Dans cette question on prend $U_0 = \frac{4}{3}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$ et que U est croissante.

b) Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq \frac{7}{6}U_n$.

Retrouver alors le résultat de la question 2) b).

12 Soit la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que : $U_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$f(x)=2+\frac{3}{x}$.

3) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n=U_{2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que la suite (V_n) est majorée par 3.

b) Montrer par récurrence que la suite (V_n) est croissante.

4) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|U_{n+1}-3|\leq\frac{1}{2}|U_n-3|$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n-3|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la limite de la suite (U_n) puis celle de (V_n).

5) Soit la suite (S_n) définie par $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que S_n converge vers 3.

6) Soit la suite (q_n) définie par : $q_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que (q_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Exprimer U_n en fonction de n. Retrouver alors la limite de (U_n).

13 Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$

Soit (U_n) la suite définie par $U_0=1$ et $U_{n+1}=g(U_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g(x)\leq x$. Résoudre l'équation $g(x)=x$.

b) Montrer que la suite (U_n) est convergente puis trouver sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}$.

Etudier les variations de g sur $[0,1]$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n-1}\leq\frac{1}{n}$.

c) Exprimer $U_{p+1}-U_p$ en fonction de U_p, pour tout $p\in\mathbb{N}$

Etablir que $1\leq\frac{1}{U_{p+1}}-\frac{1}{U_p}\leq1+\frac{1}{p+1}$.

En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $n\leq\frac{1}{U_n}-1\leq n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 6$ on a : $\sqrt{p} \leq \frac{p-1}{2}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$ on a :

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \sqrt{n+1}$

e) Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$.

14 Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$U_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$ et $V_n = U_n - \text{Log } n$

1) a) Calculer U_2, U_3 et U_4.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2) a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$

On a $U_n\text{-}1 \leq \text{Log } n \leq U_n - \frac{1}{n}$ et $0 \leq V_n \leq 1$

3) a) Montrer que V_n converge vers une limite δ (on ne cherchera pas à calculer δ).

b) Quelle est la limite de (U_n) ?

15 1) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

2) Subdiviser l'intervalle $[1,2]$ en n intervalle de longueur $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

En déduire un encadrement de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ par les sommes

$$U_n = \frac{1}{n}\cdot\left[1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right]$$

Et $$V_n = \frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{2}\right]$$

3) a) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

b) Obtenir des encadrements de Log 2 en calculant U_5 et V_5 puis U_{10} et V_{10}.

16 On pose pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{(\text{Log}\,x)^2}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2) Déterminer le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
3) Tracer la représentation graphique (ζ) de f dans le plan.
4) On pose pour $p \geq 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\text{Log}x)^p}{x^2}\,dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer : $I_1 = \displaystyle\int_1^{e^2} \left(\frac{\text{Log}\,x}{x^2}\right)dx$.

b) Montrer que, pour tout $p \geq 1$: $I_{p+1} = -\dfrac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$.

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (ζ) d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de (ζ) d'abscisses x, décrit alors un cercle de rayon f(x).
Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

1) a) Soit φ la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.

Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$ on a : $\dfrac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \dfrac{7}{4}$.

b) Montrer que $\dfrac{3}{2} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq U_n \leq \dfrac{7}{4} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$.

c) Montrer que si la suite (U_n) possède une limite ℓ alors $3 \leq \ell \leq \dfrac{7}{2}$.

2) Soit $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$

a) Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$ on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

b) En déduire que $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x \, dx$

1) Calculer I_1.

2) a) Trouver une relation liant I_{n+1} et I_n. (utiliser une intégration par parties)

b) Déduisez-en $1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ en fonction de I_n.

3) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déduire la limite de $1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

CORRIGES

1 1) Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de ζ_f avec la droite d'équation $y = k$.

k	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Nombre de solution		0	1	2	1	0	

2) $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$

Ainsi pour $n = 1$, $f(x) = 1$ a une seule solution 0

et pour $n \geq 2$, $f(x) = \frac{1}{n}$ a deux solutions distinctes.

3) $n \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < 1$

f est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$

or $\frac{1}{n} \in [0, 1]$ donc il existe un seul

$U_n \in [0, 1]$ tel que $f(U_n) = \frac{1}{n}$.

• f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$

$\frac{1}{n} \in [0, 1[$ alors il existe un seul

$V_n \in [1, +\infty[$ tel que $f(V_n) = \frac{1}{n}$. De plus $U_n \neq V_n$ car $f(1) = 0$.

4) $n \geq 2$ on a : $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(U_n) \geq f(U_{n+1})$

or f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
donc $U_n \leq U_{n+1} \Rightarrow (U_n)$ est croissante.
* de même sur $[1, +\infty[$, $f(V_n) \geq f(V_{n+1})$
or f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
donc $V_n \geq V_{n+1} \Rightarrow (V_n)$ est décroissante.

5) * On a $U_n \in [0, 1] \Rightarrow U_n \leq 1$
d'où U_n est croissante et majorée par 1 donc (U_n) est convergente vers ℓ.
* On a $V_n \in [1, +\infty[$
d'où V_n est minorée par 1 et comme elle est décroissante
donc (V_n) est convergente.

f est continue sur $[0, +\infty[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(\ell)$ d'autre part $\lim\limits_{+\infty} f(U_n) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow f(\ell) = 0$ or l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution c'est $x = 1$
d'où $\ell = 1$

de même pour (V_n), $\lim\limits_{+\infty} f(V_n) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} V_n = 1$

2 1) Pour $n = 0$ on a $V_0 = 5 > 0$ et $U_0 = 3 > 0$
donc la propriété est vraie par $n = 0$. Supposons que $V_n > 0$ et $U_n > 0$.
Montrons que $V_{n+1} > 0$ et $U_{n+1} > 0$.
on a $V_n > 0$ et $U_n > 0$ alors $U_n + V_n$ et $U_n . V_n > 0$

donc $\frac{U_n + V_n}{2} > 0$ et $\frac{U_n . V_n}{U_n + V_n} > 0$. d'où $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$

d'après le principe de récurrence on a montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} = \frac{(U_n + V_n)^2 - 4U_n V_n}{2(U_n + V_n)} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)} > 0$

3) a) $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{V_n - U_n}{2} . \frac{V_n - U_n}{U_n + V_n} = \frac{W_n}{2} . \frac{V_n - U_n}{V_n + U_n}$

et on a $\frac{V_n - U_n}{V_n + U_n} = 1 - \frac{2U_n}{V_n + U_n} \leq 1$ car $U_n > 0$ et $V_n > 0$

d'où $\frac{V_n - U_n}{V_n + U_n} \leq 1$ par ailleurs l'égalité obtenue au 2ème question

Montrer que $W_{n+1} \geq 0$, $W_0 = V_0 - U_0 \geq 0$

donc pour tout entier n, $W_n \geq 0$ d'où $\frac{W_n}{2} . \frac{V_n - U_n}{V_n + U_n} \leq \frac{W_n}{2}$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{W_n}{2}$

b) Soit P(n) la position $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

P(0) s'écrit $0 \leq W_n \leq 2$ donc P(0) est vraie car $W_0 = 2$
Supposons que P(n) est vraie.
Montrer que P(n+1) est vraie.

$0 \leq W_{n+1} \leq \frac{W_n}{2}$ or $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{1}{2} . (\frac{1}{2})^{n-1}$

Soit $0 \leq W_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ soit W_n converge vers 0.

3 1) Vrai : si $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n^2 = \ell^2$

2) Faux : contre exemple $U_n = (-1)^n$ et $U_n^2 = 1$

(U_n^2) converge vers 1 et (U_n) diverge.

3) Faux : contre exemple $(-1)^n$ diverge et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

4) Vrai : si U converge vers ℓ alors pour $n \geq N$

On a $U_n \in]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ par définition d'une suite convergente.

5) Vrai : si U^2 est bornée alors il existe 2 réels positifs m , M tel que $m \leq U_n^2 \leq M$.

$\sqrt{m} \leq \sqrt{U_n^2} \leq \sqrt{M} \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq |U_n| \leq \sqrt{M}$

Donc $-\sqrt{M} \leq U_n \leq \sqrt{M}$ ainsi U_n est bornée.

6) Faux : $U_n = n$ et $V_n = n + 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ infinie et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$.

4 1) $U_{n+1} \leq 0{,}95 \,.\, U_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0{,}95.\frac{n^{10}}{2^n}$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2.2^n} \leq 0{,}95.\frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2.n^{10}} \leq 0{,}95 \Leftrightarrow (\frac{n+1}{n})^{10} \leq 1{,}9$

2) a) $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = 10(1+\frac{1}{x})^9.(-\frac{1}{x^2}) < 0$

donc f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

$\Rightarrow f([1, +\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} f(x), f(1)] =]1, 2^{10}]$

et $1{,}9 \in]1, 2^{10}]$ donc il existe un seul $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1{,}9$

c) $f(15) = 1{,}907$ et $f(16) = 1{,}833$ donc $15 < \alpha < 16$ et $n_0 = 16$.

d) Pour tout $n \geq 16$, $f(n) \leq f(16)$ car f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

or $f(16) \leq f(\alpha) = 1,9$ d'où $f(n) \leq 1,9$

d'où pour tout $n \geq 16$, $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

3) a) En utilisant l'équivalence de la $1^{ère}$ question, on a pour $n \geq 16$

$(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$ alors $U_{n+1} \leq 0,95\, U_n$ or $U_n > 0$ et $0,95 < 1$

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 0,95 < 1$ par suite U est décroissante à partir du rang 16.

b) La suite U est décroissante à partir du rang 16 et minorée par 0 donc (U_n) est convergente.

4) Vérification pour $n = 16$.

on a $0 \leq U_{16}$ et $0,95^{16-16} \times U_{16} = 0,95^0 \times U_{16} = U_{16}$.

d'où $0 \leq U_{16} \leq 0,95^0\, U_{16}$. ainsi la propriété est vraie.

Supposons que pour $n \geq 16$ on a : $0 \leq U_n \leq 0,95^{n-16} \,.\, U_{16}$

Montrer que $0 \leq U_{n+1} \leq 0,95^{n-15} \,.\, U_{16}$

on sait que $U_{n+1} \leq 0,95 U_n$ et $U_n \leq 0,95^{n-16} \,.\, U_{16}$

donc $U_{n+1} \leq (0,95) \,.\, (0,95)^{n-16} \,.\, U_{16}$ donc $U_{n+1} \leq (0,95)^{n-15}\, U_{16}$.

D'après la principe de récurrence pour tout $n \geq 16$

$U_n \leq 0,95^{n-16}\, U_{16}$.

$-1 < 0,95 < 1$ alors $\lim 0,95^{n-16} = 0$ or $0 \leq U_n \leq 0,95^{n-16} \,.\, U_{16}$

donc $\lim U_n = 0$.

5

1) $S_n = U_{n+1} + U_n = 7\, U_n + 8\, U_{n-1} + U_n = 8\, U_n + 8\, U_{n-1}$

$= 8\,(U_n + U_{n-1}) = 8\, S_{n-1}$

Donc (S_n) est une suite géométrique de raison 8,

on a donc $S_n = S_0 \,.\, 8^n = (U_0 + U_1) \,.\, 8^n = 8^n$ d'où $S_n = 8^n$.

2) $t_n = V_{n+1} - V_n = (-1)^{n+1}\, U_{n+1} - (-1)^n\, U_n$

$= (-1)^{n+1} (U_{n+1} + U_n) = (-1)^{n+1} \,.\, 8^n$ d'où $t_n = (-1)^{n+1} \,.\, 8^n$.

3) a) La propriété est vraie pour $n = 0$. En effet $t_0 = V_1$, ce qui correspond bien à la propriété à démontrer.

Supposons la propriété vraie pour $n = p$.

C'est –à- dire $V_{p+1} = t_0 + t_1 + \ldots + t_p$, démontrons qu'elle est vraie pour : $n = p+1$ c'est- à- dire $t_0 + t_1 + \ldots + t_{p+1} = V_{p+2}$.

On a : $(t_0 + t_1 + \ldots + t_p) + (t_{p+1}) = V_{p+1} + (V_{p+2} - V_{p+1}) = V_{p+2}$

Donc la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$; $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = V_{n+1}$.

b) Comme $t_n = (-1)^{n+1} \,.\, 8^n$, on a :

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = -\,[1 + (-8)^1 + (-8)^2 + \ldots + (-8)^n] = -\frac{(1-(-8)^{n+1})}{1-(-8)}$$

d'où $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = \dfrac{((-8)^{n+1}-1)}{9}$

c) En égalant les deux expressions de $t_0 + t_1 + \ldots + t_n$ obtenues, on a:

$V_{n+1} = \dfrac{((-8)^{n+1} - 1)}{9}$, donc $V_n = \dfrac{((-8)^n - 1)}{9}$ or $V_n = (-1)^n\ U_n$

Donc $U_n = \dfrac{(-8^n - (-1)^n)}{9}$ car $\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$.

d) $U_n = \dfrac{(-8^n - (-1)^n)}{9}$ d'où $\dfrac{U_n}{8^n} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{(-1)^n}{9.8^n}$; ou encore $\dfrac{U_n}{8^n} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n$

d'où $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{8}$.

$-\dfrac{1}{8} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{9.8^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{8^n} = \dfrac{1}{9}$

6 Pour tout $x \in [0,+\infty[; f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) Soit la propriété P (n) : « pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ ».

- Pour n = 0 ; $U_0 = 1 \geq 0$ donc la propriété P (0) est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie pour l'ordre n, c'est à dire on a P (n), montrons que la propriété est vraie pour l'ordre n + 1.

D'après l'hypoténuse de récurrence on a : $U_n \geq 0$ donc $1 + U_n + U_n^2 > 0$

donc $\dfrac{U_n}{1 + U_n + U_n^2} > 0$ d'où $U_{n+1} \geq 0$

donc la propriété est vraie pour l'ordre n +1.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$

b) Montrons que pour tout $x \in [0,+\infty[, f(x) - x \leq 0$

$f(x) - x = \dfrac{x}{1+x+x^2} - x = \dfrac{-(x^2 + x^3)}{1+x+x^2} \leq 0$ d'où $f(x) \leq 0$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

or on a pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ donc $f(U_n) \leq U_n$ d'après 1) b).

Donc la suite U est décroissante. La suite U est décroissante minorée par 0 donc U est convergente, soit ℓ sa limite

* On a, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ donc $\ell \geq 0$.

La suite (U_n) est définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ et elle converge vers :

$\ell \in [0,+\infty[$, f est continue sur $[0,+\infty[$ en particulier en ℓ donc ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell}{1+\ell+\ell^2} \Leftrightarrow \ell + \ell^2 + \ell^3 = \ell \Leftrightarrow \ell^2(1+\ell) = 0$$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -1$, or $\ell \geq 0$ donc $\ell = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ donc $\frac{1}{n} \in Df$.

$$f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+n^2+1)} < 0$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n+1}$

b) f est dérivable sur [0,1] et on a $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ avec $x \in [0,1]$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

c) Pour n = 0, $U_0 = 1 \leq \frac{1}{1+0} = 1$ donc l'inégalité est vraie pour n = 0.

Supposons que l'inégalité est vraie pour l'ordre n = p c'est à dire :

$U_p \leq \frac{1}{p+1}$, montrons qu'elle est vraie pour l'ordre n = p + 1

C'est- à - dire $U_{p+1} \leq \frac{1}{p+2}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq 1$ donc $0 \leq U_p \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$

f est strictement croissante sur [0,1] donc $f(U_p) \leq f(\frac{1}{p+1}) \leq \frac{1}{p+2}$

D'où $U_{p+1} \leq \frac{1}{p+2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } 0 \le U_n \le \dfrac{1}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$$

7 1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$

Pour $n = 0$, $U_0 > 0$

Supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

$$\text{On a : } U_n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3U_n + 2 > 0 \\ U_n + 2 > 0 \end{cases} \text{d'où } U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} > 0$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$

2) $U_{n+1} - 2 = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2 = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$ et $U_{n+1} - 3 = \dfrac{-4}{U_n + 2}$

a) Si $U_0 < 2$, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n < 2$.

Pour $n = 0, U_0 < 2$

On suppose que $U_n < 2$, montrons que $U_{n+1} < 2$

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} < 0 \qquad (\text{car} \quad U_n - 2 < 0)$$

d'où $U_{n+1} < 2$.

Conclusion: Si $U_0 < 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n < 2$

b) Si $U_0 = 2$, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = 2$

Pour $n = 0, U_0 = 2$.

Supposons que $U_n = 2$, montrons que $U_{n+1} = 2$

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} = 0 \text{ d'où } \quad U_{n+1} = 2$$

Conclusion : Si $U_0 = 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = 2$.

c) Si $U_0 > 2$ montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$2 < U_n < 3$.

Pour $n = 1, U_1 - 2 = \dfrac{U_0 - 2}{U_0 + 2} > 0 ; U_1 - 3 = \dfrac{-4}{U_0 + 2} > 0$

donc $2 < U_1 < 3$

Supposons que $2 < U_n < 3$, montrons que $2 < U_{n+1} < 3$

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} > 0 \;;\; U_{n+1} - 3 = \frac{-4}{U_n + 2} < 0$$

donc $2 < U_{n+1} < 3$

Conclusion: Si $U_0 > 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $2 < U_n < 3$.

3) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2} - U_n = \dfrac{3U_n + 2 - U_n^2 - 2U_n}{U_n + 2} = \dfrac{-U_n^2 + U_n + 2}{U_n + 2}$

$$= \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 2}$$

<u>1ère cas :</u> Si $U_0 < 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 2$ et par suite $U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est strictement croissante.

(U_n) est majorée par 2 et croissante donc elle est convergente soit ℓ sa limite on a :

$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{3x + 2}{x + 2}$

f est continue sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in]0, 2[\subset \mathbb{R} - \{-2\}$ et $\ell \in [0, 2]$.

Donc ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{3\ell + 2}{\ell + 2} \Leftrightarrow \ell^2 + 2\ell = 3\ell + 2 \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow \ell = -1$ ou $\ell = 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$.

<u>2</u>

$\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas :}}$ Si $U_0 = 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2$

Donc (U_n) est une suite constante donc elle est convergente et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$.

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas :}}$ Si $U_0 > 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $2 < U_n < 3$

et par suite $U_{n+1} - U_n < 0 \Leftrightarrow (U_n)$ est strictement décroissante.

(U_n) est minorée par 2 et décroissante donc elle est convergente, soit ℓ sa limite on a :

$\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$x \longmapsto \frac{3x+2}{x+2}$$

f est continue sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in]2,3[\subset \mathbb{R} - \{-2\}$ et $\ell \in [2,3]$

Donc $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{3\ell + 2}{\ell + 2} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow \ell = -1$ ou $\ell = 2$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$.

4) $U_1 = \dfrac{3U_0 + 2}{U_0 + 2}$; $U_2 = \dfrac{3U_1 + 2}{U_1 + 2} = \dfrac{11U_0 + 10}{5U_0 + 6}$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $U_n = \dfrac{(2a_n + 1)U_0 + 2a_n}{a_n U_0 + (a_n + 1)}$

Pour $n = 0$ il existe $a_0 = 0$ tel que $U_0 = \dfrac{(2a_0 + 1)U_0 + 2a_0}{a_0 U_0 + (a_0 + 1)}$

Supposons qu'il existe a_n tel que $U_n = \dfrac{(2a_n + 1)U_0 + 2a_n}{a_n U_0 + (a_n + 1)}$

et montrons que $U_{n+1} = \dfrac{(2a_{n+1}+1)U_0 + 2a_{n+1}}{a_{n+1}U_0 + (a_{n+1}+1)}$

$U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 2}$;En remplaçant U_n par $\dfrac{(2a_n+1)U_0 + 2a_n}{a_nU_0 + (a_n+1)}$

on trouve : $U_{n+1} = \dfrac{(8a_n+3)U_0 + 8a_n + 2}{(4a_n+1)U_0 + 4a_n + 2} = \dfrac{[2(4a_n+1)+1]U_0 + 2(4a_n+1)}{(4a_n+1)U_0 + (4a_n+1)+1}$

on pose $a_{n+1} = 4a_n + 1$;d'où $U_{n+1} = \dfrac{(2a_{n+1}+1)\,U_0 + 2a_{n+1}}{a_{n+1}U_0 + a_{n+1} + 1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que

$U_n = \dfrac{(2a_n+1)U_0 + 2a_n}{a_nU_0 + (a_n+1)}$ avec $a_{n+1} = 4a_n + 1$.

On a : $a_0 = 0$; $a_1 = 4a_0 + 1 = 1$; $a_2 = 4a_1 + 1 = 5$.

5) $b_n = a_n + \dfrac{1}{3}$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3} = 4a_n + \frac{4}{3} = 4\left(a_n + \frac{1}{3}\right) = 4b_n$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de

premier terme $b_0 = \dfrac{1}{3}$; on a : $b_n = b_0q^n$ d'ou $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot 4^n$

$$a_n = b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

$$U_n = \frac{\left[\frac{2}{3}(4^n-1)+1\right]U_0 + \frac{2}{3}(4^n-1)}{\frac{1}{3}(4^n-1)U_0 + \frac{1}{3}(4^n-1)+1} = \frac{4^n\left[\left(\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}\right)\cdot U_0 + \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\right]}{4^n\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)U_0 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}\right]}$$

$$U_n = \frac{\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}\right]U_0 + \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)U_0 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{\frac{2}{3}U_0 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}U_0 + \frac{1}{3}} = 2$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

8 U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) $\dfrac{4U_n^2+3}{6+U_n^2} = \dfrac{4U_n^2+24-24+3}{6+U_n^2} = \dfrac{4(U_n^2+6)-21}{U_n^2+6} = 4 - \dfrac{21}{U_n^2+6}$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \le U_n < 1$

Pour $n = 0$, $U_0 = 0 \in [0,1[$

Supposons que $0 \le U_n < 1$ a-t-on $0 \le U_{n+1} < 1$.

$0 \le U_n < 1 \Rightarrow 0 \le U_n^2 < 1 \Leftrightarrow 6 \le U_n^2 + 6 < 7$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{U_n^2+6} \le \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \le \frac{-21}{U_n^2+6} < -3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 4 - \frac{21}{U_n^2+6} < 1 \Leftrightarrow$

$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{4 - \frac{21}{U_n^2+6}} < 1$

d'où $0 \le U_{n+1} < 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_n < 1$.

b) $$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}} - U_n = \frac{\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2} - U_n^2}{\sqrt{\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}} + U_n}$$

$$= \frac{-U_n^4 - 2U_n^2 + 3}{(U_{n+1} + U_n)(6 + U_n^2)}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n^2-1)(U_n^2+3)}{(U_{n+1}+U_n)(6+U_n^2)}>0 \text{ car } U_n^2-1<0 \text{ d'après a)}$$

donc la suite U est strictement croissante.

La suite U est croissante, majorée par 1 donc elle est convergente.

2) a) $$1-U_{n+1}=1-\sqrt{\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}}=\frac{1-\left(\frac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}\right)}{1+U_{n+1}}=\frac{3-3U_n^2}{(1+U_{n+1})(6+U_n^2)}$$

$$=\left[\frac{3(1+U_n)}{(1+U_{n+1})(6+U_n^2)}\right](1-U_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0\le U_n<1 \Leftrightarrow 3<3(1+U_n)<6 \\ \frac{1}{7}<\frac{1}{U_n^2+6}\le\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{7}<\frac{3(1+U_n)}{U_n^2+6}\le 1 \qquad (1)$$

La suite (U_n) est strictement croissante donc pour

$$n+1\ge 1 \Rightarrow U_{n+1}\ge U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1+U_{n+1}\ge\frac{2+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+U_{n+1}}\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+U_{n+1}}\le\frac{2}{2+\sqrt{2}} (2)$$

d'après (1) et (2) on a : $0<1-U_{n+1}\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}(1-U_n)$

b) $$0<1-U_1\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}(1-U_0)$$

$$0<1-U_2\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}(1-U_1)$$

$$0<1-U_n\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}(1-U_{n-1})$$

Comme tous les termes sont positifs, en multipliant membre à membre

On trouve : $0<1-U_n\le\left(\dfrac{2}{2+\sqrt2}\right)^n(1-U_0)\Leftrightarrow 0<1-U_n\le\left(\dfrac{2}{2+\sqrt2}\right)^n$

$$-1<-U_n\le\left(\frac{2}{2+\sqrt2}\right)^n-1\Leftrightarrow 1-\left(\frac{2}{2+\sqrt2}\right)^n\le U_n<1$$

On a : $\left.\begin{array}{l} 1-\left(\dfrac{2}{2+\sqrt2}\right)^n\le U_n<1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\dfrac{2}{\sqrt2+2}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1\end{array}\right\}$ Donc la suite (U_n) est convergente et elle converge vers 1

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$.

3) $V_n=\dfrac{1-U_n^2}{3+U_n^2}>0$

a) $$V_{n+1}=\frac{1-U_{n+1}^2}{3+U_{n+1}^2}=\frac{1-\dfrac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}}{3+\dfrac{3+4U_n^2}{6+U_n^2}}=\frac{3-3U_n^2}{21+7U_n^2}=\frac37\left(\frac{1-U_n^2}{3+U_n^2}\right)=\frac37V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac37$ et de premier terme $V_0=\dfrac13$.

b) $V_n=V_0\,q^n=\dfrac13\left(\dfrac37\right)^n$

On a : $V_n=\dfrac{1-U_n^2}{3+U_n^2}\Leftrightarrow V_n(3+U_n^2)=1-U_n^2$

$\Leftrightarrow U_n^2(V_n+1)=1-3V_n$.

$\Leftrightarrow U_n^2=\dfrac{1-3V_n}{1+V_n}>0$ car $V_n=\dfrac13\left(\dfrac37\right)^n>\dfrac13$

d'où $U_n = \sqrt{\dfrac{1-3V_n}{1+V_n}}$ car $U_n > 0$

et par suite $U_n = \sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{7}\right)^n}{1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{7}\right)^n}}$

9 La suite (U_n) est définie par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 1$

Pour $n = 1$, $U_1 = 1 \geq 1$

Supposons que $U_n \geq 1$, montrons que $U_{n+1} \geq 1$

$U_n \geq 1 \Rightarrow U_n^2 \geq 1$,comme $\dfrac{1}{2^n} \geq 0$ donc $U_n^2 + \dfrac{1}{2^n} \geq 1 + \dfrac{1}{2^n} \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \geq 1 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 1$.

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} - U_n = \dfrac{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n} - U_n^2}{\sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} + U_n} = \dfrac{\dfrac{1}{2^n}}{\sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} + U_n} > 0$

d'où la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{\dfrac{1}{2^n}}{\sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} + U_n} = \dfrac{\dfrac{1}{2^n}}{U_{n+1} + U_n}$

On a : $\left.\begin{matrix} U_n \geq 1 \\ U_{n+1} > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow U_n + U_{n+1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{U_n + U_{n+1}} < \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2^n}}{U_n + U_{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ d'où } U_{n+1} - U_n < \frac{1}{2^{n+1}}$$

et par suite $U_{n+1} < U_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$

On a : $\left.\begin{array}{l} 0<U_{n+1}\text{-}U_n<\dfrac{1}{2^{n+1}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0=0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}}=0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_{n+1}\text{-}U_n) = 0$

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n^2 = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

Pour $\quad n=1, U_1^2 = 2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] = 1$ vrai

On suppose que $U_n^2 = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, montrons que $U_{n+1}^2 = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$$U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^n} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{2^n} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

$$= 2\left[1-\frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

d'où $U_{n+1}^2 = 2\left[1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n^2 = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

$U_n^2 = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) < 2$ alors $|U_n| < \sqrt{2}$

donc (U_n) est majorée par $\sqrt{2}$ et croissante donc elle converge.

on a : $U_n^2 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ comme U_n est positif

alors $U_n = \sqrt{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = \sqrt{2} \text{ car } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

10 1) $U_{n+1} - 3 = \dfrac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \dfrac{-3U_n + 9}{2U_n}$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$

Supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 9}{2U_n} > 0$ car $U_n > 0$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

donc $\dfrac{-3}{2U_n} < 0$ et comme on a : $U_{n+1} - 3 = \dfrac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$

donc $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signe contraire.

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

Pour $p = 0$; $U_0 = 1$ et $U_1 = 6$ donc on a : $U_0 \leq 3 \leq U_1$

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$ et montrons que $U_{2p+2} \leq 3 \leq U_{2p+3}$.

On a : $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signes contraires donc pour $n = 2p+1$ on a : $U_{2p+2} - 3$ et $U_{2p+1} - 3$ sont de signe contraire

Or $U_{2p+1}-3\geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

et par suite $U_{2p+2}\leq 3$.

De même pour $n=2p+2$ on a $U_{2p+3}-3$ et $U_{2p+2}-3$ sont de signe contraire or $U_{2p+2}-3\leq 0$ donc $U_{2p+3}-3\geq 0$.

C'est-à-dire $3\leq U_{2p+3}$ d'où $U_{2p+2}\leq 3\leq U_{2p+3}$.

Conclusion : pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a : $U_{2p}\leq 3\leq U_{2p+1}$.

2) Si (U_n) converge vers ℓ alors (U_{2p}) converge vers ℓ et (U_{2p+1}) converge vers ℓ on a : $U_{2p}\leq 3\leq U_{2p+1}$

d'où $\ell\leq 3\leq \ell$ donc $\ell=3$

3) On a $U_{2p}\leq 3\leq U_{2p+1}$

Si n est impair, $U_n=U_{2p+1}\geq 3>2$ donc $U_{2p+1}\geq 2$

Si n est pair, $U_n=U_{2p}$, montrons par récurrence que $U_{2p}\geq 2$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Pour $p=1$, $U_2=\dfrac{3U_1+9}{2U_1}$ or $U_1=\dfrac{3U_0+9}{2U_0}=6$

donc $U_2=\dfrac{9}{4}>2$ vrai

Supposons que $U_{2p}\geq 2$, montrons que $U_{2p+2}\geq 2$

$$U_{2p+2}-2=\frac{3U_{2p+1}+9}{2U_{2p+1}}-2=\frac{3U_{2p+1}+9-4U_{2p+1}}{2U_{2p+1}}=\frac{-U_{2p+1}+9}{2U_{2p+1}}$$

$$=\frac{-\dfrac{3U_{2p}+9}{2U_{2p}}+9}{2\cdot\dfrac{3U_{2p}+9}{2U_{2p}}}=\frac{-\dfrac{3U_{2p}-9-18U_{2p}}{2U_{2p}}}{\dfrac{6U_{2p}+18}{2U_{2p}}}=\frac{15U_{2p}-9}{6U_{2p}+18}$$

On a : $U_{2p}\geq 2\Leftrightarrow 15U_{2p}\geq 30\ \Leftrightarrow 15U_{2p}-9\geq 21>0$

de même $U_{2p} \geq 2 \Leftrightarrow 6U_{2p} \geq 12 \qquad \Leftrightarrow 6U_{2p} + 18 \geq 30 > 0$

donc $U_{2p+2} - 2 \geq 0$ et par suite $U_{2p+2} \geq 2$

Conclusion : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*, U_{2p} \geq 2$.

On a : $U_{2p+1} \geq 2$ et $U_{2p} \geq 2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

donc $U_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrons que pour tout $n \geq 2$ on a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

pour $n = 2, |U_2 - 3| = \left|\frac{9}{4} - 3\right| = \frac{3}{4}$

donc $|U_2 - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ vrai

On suppose que $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ et montrons que $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

$$|U_{n+1} - 3| = \left|\frac{3U_n + 9}{2U_n} - 3\right| = \left|\frac{-3U_n + 9}{2U_n}\right| = \left|\frac{-3}{2U_n}(U_n - 3)\right| = \frac{3}{2U_n}|U_n - 3|.$$

On a: $U_n \geq 2 \quad \Leftrightarrow 2U_n \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2U_n} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2U_n} \leq \frac{3}{4}$

d'où $|U_{n+1} - 3| = \frac{3}{2U_n}|U_n - 3| \leq \frac{3}{4} \times |U_n - 3| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

et par suite $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Conclusion : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

5) On a $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-3)=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$

11 1) $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n^2+\frac{1}{2}U_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_0>0$; $U_0=\frac{3}{4}$

a) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}, 0<U_n<1$

Pour $n=0$, $U_0=\frac{3}{4}$ donc $0<U_0<1$.

Supposons que $0<U_n<1$ et montrons que $0<U_{n+1}<1$

On a : $0<U_n<1$ alors $0<U_n^2<1$ et par suite $0<\frac{1}{2}U_n^2<\frac{1}{2}$ (1)

de même $0<U_n<1$ donc $0<\frac{1}{2}U_n<\frac{1}{2}$ (2)

d'après (1) et (2) $0<U_{n+1}<1$.

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}, 0<U_n<1$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2}U_n^2+\frac{1}{2}U_n-U_n=\frac{1}{2}U_n(U_n-1)<0$ donc (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente, soit ℓ sa limite.

$\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ est continue sur $\mathbb{R}$

$U_n\in\left]0,1\right[\subset\mathbb{R}$ et $\ell\in[0,1]$ donc ℓ est solution de l'équation $\ell=f(\ell)$

$\frac{1}{2}\ell^2+\frac{1}{2}\ell=\ell \quad\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\ell^2-\ell)=0\Leftrightarrow\ell=0$ ou $\ell=1$

On a : $U_0=\frac{3}{4}$ et (U_n) est décroissante donc pour tout $n\geq0$

on a $U_n\leq U_0=\frac{3}{4}$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\leq\frac{3}{4}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

d) $U_{n+1}-\frac{7}{8}U_n=\frac{1}{2}U_n^2+\frac{1}{2}U_n-\frac{7}{8}U_n$.

$=\frac{1}{2}U_n^2-\frac{3}{8}U_n=\frac{1}{2}U_n\left(U_n-\frac{3}{4}\right)\leq 0$ d'où $U_{n+1}\leq\frac{7}{8}U_n$

On a : $U_n\leq\frac{7}{8}U_{n-1}$

$U_{n-1}\leq\frac{7}{8}U_{n-2}$

$\vdots$

$U_1\leq\frac{7}{8}U_0$

Comme tous les termes sont positifs, en multipliant membre à membre on trouve : $U_n\leq\left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot U_0$

donc on a: $\left.\begin{array}{l} 0<U_n\leq\left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot U_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}0=0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n U_0=0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

2) $U_0=\frac{4}{3}$

a) Pour $n=0, U_0=\frac{4}{3}>1$ vérifié.

Supposons que $U_n>1$, montrons que $U_{n+1}>1$.

$U_{n+1}-1=\frac{1}{2}U_n^2+\frac{1}{2}U_n-1=\frac{1}{2}(U_n-1)(U_n+2)>0$

donc $U_{n+1}>1$

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}, U_n>1$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n - U_n = \frac{1}{2}U_n^2 - \frac{1}{2}U_n = \frac{1}{2}U_n(U_n - 1) > 0$$

Donc (U_n) est croissante .

b) Montrons que (U_n) n'est pas majorée.

On suppose que (U_n) est majorée équivaut à dire qu'il existe

$M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$

Dans ce cas (U_n) est convergente, soit ℓ sa limite d'après

précédemment $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ d'autre part (U_n) est croissante donc

$\forall n \geq 0$ alors $U_n \geq U_0 = \frac{4}{3}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \geq \frac{4}{3}$ impossible donc (U_n) est une suite croissante non majorée donc elle est divergente vers $+\infty$.

c) $U_{n+1} - \frac{7}{6}U_n = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n - \frac{7}{6}U_n$

$= \frac{1}{2}U_n\left(U_n - \frac{4}{3}\right) > 0$.

Donc $U_{n+1} > \frac{7}{6}U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $U_n \geq \frac{7}{6}U_{n-1}$

$$U_{n-1} \geq \frac{7}{6}U_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$U_1 \geq \frac{7}{6}U_0$$

Tous les termes sont positifs, en multipliant membre à membre on trouve : $U_n \geq \left(\frac{7}{6}\right)^n U_0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

12 $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{U_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

1) Pour $n = 0$; $U_0 = 2 \geq 2$ vérifié.

Supposons que $U_n \geq 2$, montrons que $U_{n+1} \geq 2$.

On a : $U_n \geq 2$ donc $\dfrac{3}{U_n} \geq 0$ et par suite $2 + \dfrac{3}{U_n} \geq 2$

d'où $U_{n+1} \geq 2$.

Conclusion : Pour tout $\mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.

2) $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$.

$f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) a) $V_n = U_{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$; $V_0 = U_0 = 2 \leq 3$. Vérifié.

Supposons que $V_n \leq 3$, montrons que $V_{n+1} \leq 3$.

$V_n \leq 3 \Leftrightarrow U_{2n} \leq 3$.

or la suite (U_n) est définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$.

et comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

alors $f(U_{2n}) \geq f(3) = 3$ équivaut à dire que $U_{2n+1} \geq 3$

alors $f(U_{2n+1)} \leq f(3)$

$\Leftrightarrow U_{2n+2} \leq 3 \Leftrightarrow U_{2(n+1)} \leq 3$

or $U_{2(n+1)} = V_{n+1}$ d'où $V_{n+1} \leq 3$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 3$.

b) Montrons par récurrence que $V_{n+1} \geq V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n=0$, $V_1 = U_2 = 2+\dfrac{3}{U_1}$ or $U_1 = 2+\dfrac{3}{U_0}=\dfrac{7}{2}$

donc $V_1 = 2+\dfrac{6}{7}=\dfrac{20}{7}$.

$V_0 = U_0 = 2$ donc on a bien $V_1 \geq V_0$.

Supposons que $V_{n+1} \geq V_n$, montrons que $V_{n+2} \geq V_{n+1}$

$V_{n+1} \geq V_n$ et comme f est strictement décroissante alors

$f(V_{n+1}) \leq f(V_n) \Leftrightarrow f(U_{2n+2}) \leq f(U_{2n})$

$\Leftrightarrow U_{2n+3} \leq U_{2n+1} \Rightarrow f(U_{2n+3}) \geq f(U_{2n+1})$

$\Leftrightarrow U_{2n+4} \geq U_{2n+2}$ or $U_{2n+4} = U_{2(n+2)} = V_{n+2}$ et $U_{2n+2} = U_{2(n+1)} = V_{n+1}$

d'où $V_{n+2} \geq V_{n+1}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} \geq V_n$ et par suite (V_n) est strictement croissante.

4) a) $\left|U_{n+1}-3\right| = \left|2+\dfrac{3}{U_n}-3\right| = \left|\dfrac{-U_n+3}{U_n}\right| = \dfrac{\left|U_n-3\right|}{\left|U_n\right|} = \dfrac{\left|U_n-3\right|}{U_n}$

or $U_n \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$

donc $\left|U_{n+1}-3\right| = \dfrac{\left|U_n-3\right|}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}\left|U_n-3\right|$.

b) Montrons par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|U_n-3\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Pour $n=0$ $\left|U_0-3\right| = 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$ vérifié.

Supposons que $\left|U_n-3\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, montrons que $\left|U_{n+1}-3\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $\left|U_{n+1}-3\right| \leq \frac{1}{2}\left|U_n-3\right| \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d'où $\left|U_{n+1}-3\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\left|U_n-3\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a : $\left.\begin{array}{l} \left|U_n-3\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-3)=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = 3$.

5) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$.

On a : $\left|U_n-3\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow\ 3-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq U_n \leq 3+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour $n=1$; $3-\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq U_1 \leq 3+\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$$3-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq U_2 \leq 3+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq U_n \leq 3+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$$(3+\dots+3)-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq U_1+U_2+\dots+U_n \leq (3+\dots+3)$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n}\left(3-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\leq nS_n\leq\sum_{k=1}^{n}\left(3+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

or $\sum_{k=1}^{n}3=3n$ et $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

donc $3n-\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\leq nS_n\leq 3n+\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow\ 3n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq nS_n\leq 3n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow\ 3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq S_n\leq 3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=3$ (2)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=3$ (3)

d'après (1) ; (2) et (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=3$.

6) $q_n=\frac{U_n-3}{U_n+1}$.

a) $q_{n+1}=\frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1}=\frac{2+\frac{3}{U_n}-3}{2+\frac{3}{U_n}+1}=\frac{-1+\frac{3}{U_n}}{3+\frac{3}{U_n}}=\frac{-U_n+3}{3(U_n+1)}$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{U_n - 3}{U_n + 1}\right) = -\frac{1}{3} q_n$$

donc (q_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $q_0 = -\frac{1}{3}$ et de terme général $q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

b) $q_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1} \Leftrightarrow q_n(U_n + 1) = U_n - 3 \Leftrightarrow U_n(q_n - 1) = -q_n - 3$

d'où $U_n = \dfrac{-q_n - 3}{q_n - 1} = \dfrac{q_n + 3}{1 - q_n}$

et par suite $U_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

13 $g(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$ et (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) $g(x) - x = \dfrac{x - x - x^2 - x^3}{1 + x + x^2} = \dfrac{-x^2 - x^3}{1 + x + x^2} \le 0$; $\forall x \in [0, +\infty[$

donc $g(x) \le x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - x^3}{1 + x + x^2} = 0$.

$\Leftrightarrow -x^2(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ à rejeter

d'où $S_{\mathbb{R}_+} = \{0\}$

b) Montrons par récurrence que $U_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$; $U_0 = 1 \ge 0$, vérifié.

Supposons que $U_n \geq 0$, montrons que $U_{n+1} \geq 0$.

$$U_n \geq 0 \Rightarrow 1 + U_n + U_n^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{U_n}{1 + U_n + U_n^2} \geq 0$$

d'où $U_{n+1} \geq 0$.

Conclusion : Pour tout $U_n \geq 0$ donc d'après 1) a)

$g(U_n) \leq U_n \Leftrightarrow U_{n+1} \leq U_n$ donc (U_n) est décroissante.

(U_n) est décroissante, minorée par 0 donc (U_n) est convergente vers ℓ.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

$g(U_n) = U_{n+1}$ avec g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$U_n \in \mathbb{R}_+$ et par suite $\ell \in \mathbb{R}_+$

Donc ℓ est solution de l'équation $\ell = g(\ell)$ d'où $\ell = 0$ d'après 1) a)

2) a) $$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+n+1}{n^2}} = \frac{n}{n^2+n+1}$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2+n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2+n-n^2-n-1}{(n+1)(n^2+n+1)} = \frac{-1}{(n+1)(n^2+n+1)} < 0$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

sur $[0,1]$ $(1+x+x^2)$ on a : $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1-x+x^2)^2} \geq 0$ donc g est croissante sur $[0,1]$.

b) Vérifions l'inégalité pour $n = 1$

$U_0 = 1 \leq \frac{1}{1}$ donc vraie.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n-1} \leq \frac{1}{n}$

Montrons que $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

On a $n \geq 1$ donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ d'où $\frac{1}{n} \in [0,1]$

Comme (U_n) est décroissante et $U_0 = 1$ donc $U_{n-1} \leq 1$

Or $U_{n-1} \geq 0$ d'où $U_{n-1} \in [0,1]$.

- g est croissante sur $[0,1]$; $\frac{1}{n}$ et $U_{n-1} \in [0,1]$ et $U_{n-1} \leq \frac{1}{n}$

Donc $g(U_{n-1}) \leq g\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ et $g(U_{n-1}) = U_n$ d'où $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n-1} \leq \frac{1}{n}$.

c) - $U_{p+1} - U_p = \frac{U_p}{1 + U_p + U_p^2} - U_p = \frac{-U_p^2(1+U_p)}{1 + U_p + U_p^2}$

- $$\frac{1}{U_{p+1}} - \frac{1}{U_p} = \frac{U_p - U_{p+1}}{U_p \cdot U_{p+1}} = \frac{\dfrac{U_p^2(1+U_p)}{1 + U_p + U_p^2}}{\dfrac{U_p^2}{1 + U_p + U_p^2}} = 1 + U_p.$$

On sait que $U_p \geq 0$ ou encore $U_p + 1 \geq 1$

par suite $\frac{1}{U_{p+1}} - \frac{1}{U_p} \geq 1$.

d'après (b) $U_p \leq \frac{1}{p+1}$ alors $U_p + 1 \leq \frac{1}{p+1} + 1$

par conséquent $\frac{1}{U_{p+1}} - \frac{1}{U_p} \leq \frac{1}{p+1} + 1$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$; $1 \leq \frac{1}{U_{p+1}} - \frac{1}{U_p} \leq \frac{1}{p+1} + 1$

$$-1 \le \frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_0} \le \frac{1}{1} + 1$$

$$1 \le \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1} \le \frac{1}{2} + 1$$

$$1 \le \frac{1}{U_3} - \frac{1}{U_2} \le \frac{1}{3} + 1$$

$$\vdots$$

$$1 \le \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}} \le \frac{1}{n} + 1$$

On additionne membre à membre et on simplifie on obtient :

$$n \le \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_0} \le n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Comme $U_0 = 1$ on conclut que :

$$-n \le \frac{1}{U_n} - 1 \le n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

d) Vérifions l'inégalité pour $p = 6$ on a $\sqrt{6} \le \frac{5}{2}$ vraie

Supposons que l'inégalité est vraie pour $n \ge 6$.

Ou encore $\sqrt{p} \le \frac{p-1}{2}$; Montrons que $\sqrt{p+1} \le \frac{p}{2}$.

Il suffit de montrer que $p + 1 \le \frac{p^2}{4}$.

$$(p+1) - \frac{p^2}{4} = \frac{4p + 4 - p^2}{4}$$

L'hypothèse de récurrence donne que $p^2 \le \frac{(p-1)^2}{4}$

ou encore $p < p^2 \le \frac{p^2 - 2p + 1}{4}$

$p \le (p^2 - 2p + 1) \cdot \frac{1}{4}$ donc $4p \le p^2 - 2p + 1$

par suite $\frac{4p + 4 - p^2}{4} \le \frac{(p^2 - 2p + 1) + 4 - p^2}{4}$

ou encore $\frac{4p + 4 - p^2}{4} \le \frac{-2p + 5}{4} < 0$

Car $p \ge 6$ soit $-p \le -6$ ou encore $-2p + 5 \le -7 < 0$.

On conclut alors que $(p+1)-\frac{p^2}{4}<0$ ou encore $\sqrt{p+1}<\frac{p}{2}$

Conclusion : $\forall p\in\mathbb{N}$, $p\geq 6$ on a $\sqrt{p}\leq\frac{p-1}{2}$.

- $\sqrt{p+1}-\sqrt{p}=\frac{p+1-p}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}$

Pour $p\geq 6$ on sait que $\sqrt{p}\leq\frac{p-1}{2}$ et $\sqrt{p+1}\leq\frac{p}{2}$.

donc $\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\leq p-\frac{1}{2}\leq p$.

d'où $\frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}\geq\frac{1}{p}$ soit $\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\geq\frac{1}{p}$.

$\sqrt{7}-\sqrt{6}\geq\frac{1}{6}$

$\sqrt{8}-\sqrt{7}\geq\frac{1}{7}$

$\vdots$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq\frac{1}{n}$

On additionne membre à membre.

On obtient : $\sqrt{n+1}-\sqrt{6}\geq\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n}$

Soit $\sqrt{n+1}\geq\sqrt{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n}$

Comparons $\sqrt{6}$ et $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

$\sqrt{6}\cong 2{,}44$ et $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cong 2{,}28$

d'où $\sqrt{6}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

Conclusion : $\sqrt{n+1}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}$

e) On sait que $n\leq\frac{1}{U_n}-1\leq n+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

soit $n+1\leq\frac{1}{U_n}\leq n+2+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq n+1+\sqrt{n+1}$

ou encore $\dfrac{1}{n+1} \geq U_n \geq \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$

$\dfrac{n}{n+1} \geq nU_n \geq \dfrac{n}{n+1+\sqrt{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1+\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = 1$

14 1) a) $U_2 = U_1 + 1 = \dfrac{3}{2}$, $U_3 = U_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$,$U_4 = \dfrac{25}{12}$

b) $U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow U_n - U_{n-1} = \dfrac{1}{n}$

$\sum\limits_{k=2}^{n} U_k - \sum\limits_{k=2}^{n} U_{k-1} = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$

$U_n - U_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$ or $U_1 = 1$ d'où $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

2) a) $k \geq 1$; $k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$ d'où $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leq \dfrac{1}{k}$

b) $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leq \dfrac{1}{k}$

alors $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}dx \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$

$U_n - 1 \leq \int_1^n \dfrac{1}{x}\,dx \leq U_n - \dfrac{1}{n}$

D'où $U_n - 1 \leq \text{Log}\, n \leq U_n - \dfrac{1}{n}$

$-U_n + \dfrac{1}{n} \leq -\text{Log}\, n \leq -U_n + 1$

$\dfrac{1}{n} \leq U_n - \text{Log}\, n \leq 1$

$0 < \dfrac{1}{n} \leq V_n \leq 1$ d'où $0 < V_n \leq 1$.

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \text{Log}\,(n+1) - U_n + \text{Log}\, n$

$= U_{n+1} - U_n + [\text{Log}\, n - \text{Log}\, n(n+1)]$

$= \dfrac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leq 0$ Car $\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\,dx \geq \dfrac{1}{n+1}$ d'après 2) a)

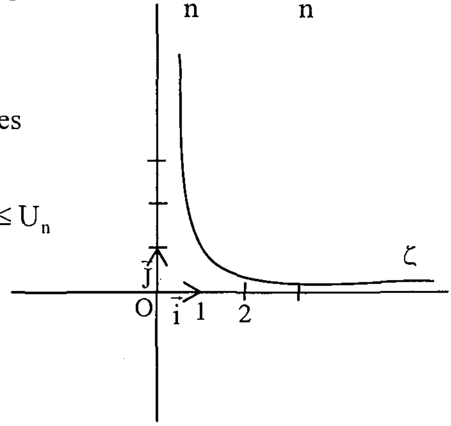
D'où (V_n) est décroissante et comme elle est minorée par 0 d'où (V_n) est convergente vers δ.

b) On a $V_n = U_n - \text{Log } n \Leftrightarrow U_n = V_n + \text{Log } n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + \text{Log } n = +\infty$. Car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \delta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log } n = +\infty$.

15 1) Voir figure

2) U_n est la somme des aires des rectangles des cotés $\frac{1}{n}$ et $1 + \frac{i}{n}$ situés au dessus de ζ donc $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le U_n$



V_n est la somme des aires des rectangles situés au dessous de ζ

donc $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \ge V_n$ d'où $V_n \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le U_n$

3) a) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \text{Log } 2$

b) $U_5 = 0{,}7457$ et $V_5 = 0{,}6456$

$U_{10} = 0{,}71878$ et $V_{10} = 0{,}59245$

On sait que $\forall n$, $V_n \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le U_n$ donc $V_n \le \text{Log } 2 \le U_n$

$V_{10} \le \text{Log } 2 \le U_{10}$ et $V_5 \le \text{Log } 2 \le U_5$

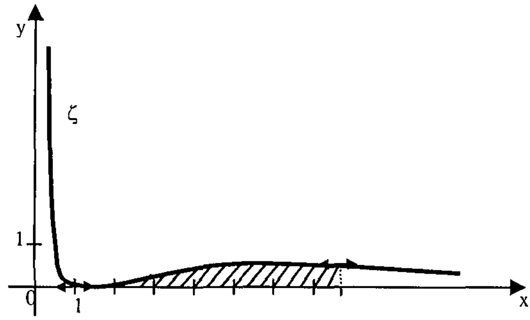
$0{,}59245 \le \text{Log } 2 \le 0{,}71878$ et $0{,}6456 \le \text{Log } 2 \le 0{,}7457$

16 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (facile) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

2) $f'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$ du signe de $\ln x\,(2 - \ln x)$, d'où le tableau :

x	0		1		e^2		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

4) a) $\begin{cases} u(x)=\ln x & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=\dfrac{1}{x^2} & v(x)=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$



$$I_1=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{2}{e^2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}=\frac{-2}{e^2}-\frac{1}{e^2}+1,$$

soit $I_1 = 1-\dfrac{3}{e^2}$ (environ 0,594).

b) $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^{p+1} & u'(x)=(p+1)\times\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^p \\ v'(x)=\dfrac{1}{x^2} & v(x)=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$

d'où $I_{P+1}=\left[-\dfrac{1}{x}(\ln x)^{p+1}\right]_1^{e^2}+(p+1)\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}dx,$

c'est-à-dire $I_{P+1}=-\dfrac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$.

c) $I_2=\dfrac{2^2}{e^2}+2(1-\dfrac{3}{e^2})=2-\dfrac{10}{e^2}\simeq 0{,}64$, et $I_3=-\dfrac{2^3}{e^2}+3(2-\dfrac{10}{e^2})=6-\dfrac{38}{e^2}\simeq 0{,}857$;

$I_4=-\dfrac{2^4}{e^2}+4(6-\dfrac{38}{e^2})=24-\dfrac{168}{e^2}\simeq 1{,}264$.

d) $V=\displaystyle\int_1^{e^2}\pi\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^4}{x^2}dx=\pi I_4$ donc $V=\pi(24-\dfrac{168}{e^2})\approx 3{,}970$ u.v.

17 1) a) φ est dérivable sur $[0,2]$ et $\varphi'(t)=\dfrac{1}{(t+2)^2}>0$

d'où φ est strictement croissante sur $[0,2]$

d'où $0\le t\le 2$ alors $\varphi(0)\le\varphi(t)\le\varphi(2)$

donc $\dfrac{3}{2}\le\varphi(x)\le\dfrac{7}{4}$

b) En multipliant les trois membre de l'inégalité par $e^{\frac{t}{n}}$ et en intégrant entre

$[0,2]$ on obtient $\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt\le\int_0^2\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt\le\frac{7}{4}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt$

or $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt = \left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2 = ne^{\frac{2}{n}} - n$

par suite $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{3}{h}(e^h - 1)$ avec $h = \frac{2}{n}$

$$= \lim_{h\to 0} 3\left(\frac{e^n - 1}{h}\right) = 3 \text{ car } \lim_0 \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{7}{2}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = \frac{7}{2}$ d'où $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$

2) a) $t \in [0,2]$, on a : $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{2}{n}$

$e^0 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ soit $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

b) $\forall\ t \in [0,2]$ on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

or $\varphi(t) > 0$ d'où $\varphi(t) \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}$

En intégrant de 0 à 2 on obtient : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \cdot I$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} Ie^{\frac{2}{n}} = I$ et $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}}I$

Alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt = \int_0^2 \frac{2t+4-4+3}{t+2}dt$

$I = \int_0^2 2 - \frac{1}{t+2}dt = \left[2t - \text{Log}|t+2|\right]_0^2$

$= 4 - \text{Log}4 + \text{Log}2 = 4 - \text{Log}2$

18 1) $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$

Posons $\begin{cases} U(x) = 1 - x \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = -1 \\ V(x) = e^x \end{cases}$

$I_1 = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -e^x dx = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e - 2$

2) a) $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx$

Posons $\begin{cases} U(x) = (1-x)^{n+1} \\ V'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = (n+1)(1-x)^n \\ V(x) = e^x \end{cases}$

$$(n+1)!I_{n+1} = \left[e^x (1-x)^{n+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

$$(n+1)!I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} + I_n$$

b) $\dfrac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$ qui n'est autre que l'égalité précédente appliquée avec $n+1 = k$.

Donc $1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} I_k$

$$= 1 + (I_0 + I_1 + \ldots + I_{n-1}) - (I_1 + I_2 + \ldots + I_n)$$

$= 1 + I_0 - I_n$ or $I_0 = e - 1$

d'où $1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = e - I_n$.

3) Pour tout $x \in [0,1]$; $0 \le (1-x)^n \le 1$ et $0 \le e^x \le e$

Donc $0 \le (1-x)^n e^x \le e$

En intégrant entre 0 et 1 on obtient :

$$0 \le \int_0^1 (1-x)^x e^n \le \int_0^1 e\,dx$$

$$0 \le n!I_n \le [e \cdot x]_0^1$$

$$0 \le n!I_n \le e$$

$$0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$$

Et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e}{n!} = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} I_n = 0$ comme $1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = e - I_n$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = \lim\limits_{+\infty} e - I_n = e$

Les Cahiers des Mathématiques

كراس الرياضيات

Exercices corrigés

تمارين وحلول

pour s'entraîner toute l'année

Proposent pour chacune des notions fondamentales du programme:

> Des rappels de cours
> Des exercices progressifs et classés par thèmes couvrant la totalité du programme
> Tous les corrigés des exercices et des problèmes détaillés et commentés.

هذه المجموعة مقترحة لمعالجة كلّ المعطيات الأساسية المبرمجة:

> ملخّصات شاملة ومركّزة لجميع الدروس
> تمارين متدرّجة ومنتظمة حسب المحاور وتهمّ كلّ البرامج
> فروض مراقبة وتأليفية مقترحة تمكّن التلميذ من تقييم مكتسباته
> إصلاح لكلّ التمارين والمسائل الرياضية إصلاحا مفصّلا ومحلّلا.

Dans la même collection ضمن نفس السلسلة

Cycle de l'enseignement de base مرحلة التعليم الأساسي

السابعة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

الثامنة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

التاسعة أساسي
> جبر و هندسة + فروض مراقبة وتأليفية

Cycle de l'enseignement secondaire مرحلة التعليم الثانوي

1ère Année
> Algèbre
> Géométrie
> Devoirs de contrôle et de synthèse

2ème Année
- Section Sciences et technologie de l'informatique
  > Analyse
  > Géométrie
  > Devoirs de contrôle et de synthèse
- Section Economie et Services
  > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

3ème Année
- Section Mathématiques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section sciences expérimentales
  > Analyse et géométrie
- Section techniques
  > Analyse et géométrie
- Section Sciences de l'informatique
  > Analyse et géométrie
- Section Economie et Gestion
  > Résumé de cours + Exercices corrigés + Devoirs de contrôle et de synthèse

BAC
- Section Mathématiques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
  > Bac blanc
- Section sciences expérimentales
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section techniques
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section sciences de l'informatique
  > Analyse
  > Géométrie et probabilités
- Section Economie et Gestion
  > Résumé de cours et exercices corrigés

كنوز للنشر والتوزيع
www.Kounouz-Edition.Com

Prix 7D.500

9 789973 879233
ISBN: 978-9973-879-23-3