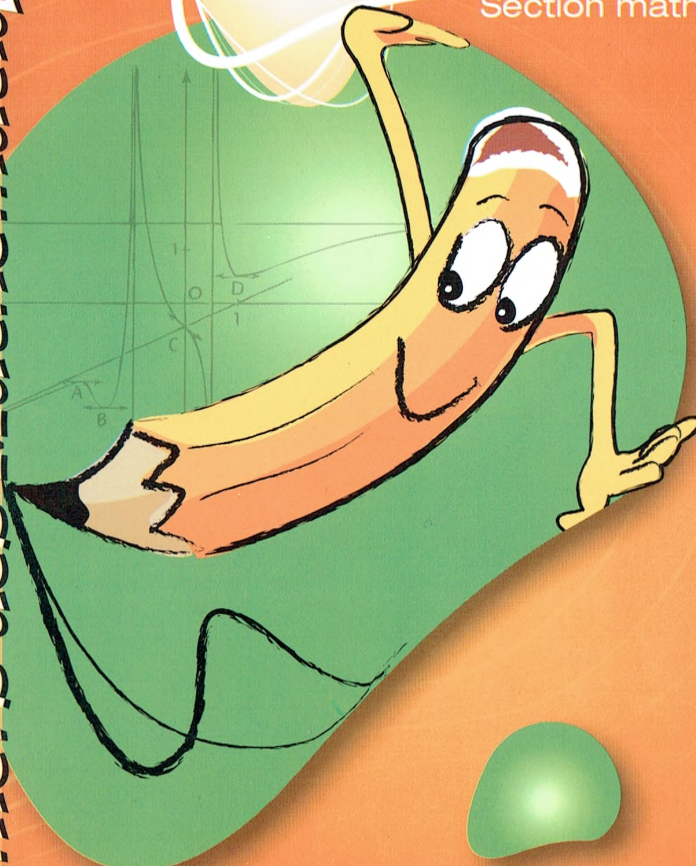
Les Cahiers des Mathématiques

3 éme année secondaire Maths

Section mathématiques



Résumé de cours

Exercices et problèmes

Solutions détaillées

Analyse

Kounouz Editions

Salima Fakhfakh Maalej - Mohamed Salah Maalej

© **Kounouz Edition**
77, Av. Mohamed V Nabeul
Tél.: 72 286 635 - Fax : 72 271 760
E-Mail : info@kounouz-edition.com
Site Internet = http://www.Kounouz-Edition.com

Avant Propos

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme officiel de la $3^{ème}$ année secondaire, section Mathématique, applicable à partir de l'année scolaire 2006-2007.

Le cour est bien entendu, nécessaire, et ses principaux résultats doivent être parfaitement connus avant toute chose. Mais il ne saurait suffire. Combien d'élèves a-t-on vu qui malgré une bonne maîtrise de leurs cours, ne parvenaient même pas à démarrer un exercice ? Dans la plupart des cas, ils manquent tout simplement de méthode. **Le cour sans les méthodes, c'est le savoir sans le savoir – faire : ça ne sert à rien.** *Cet ouvrage est par conséquent nécessaire pendant l'année scolaire afin d'assimiler utilement le cours en vue des exercices, et à plus forte raison indispensable dans la perspective de la préparation aux devoirs et aux épreuves du Bac.*

Ce livre est un véritable outil de travail :

- ***Les résumés de cours*** *: rappellent les résultas essentiels illustré d'application directes pour surmonter les difficultés du cours.*
- ***Les réflexes*** *: La plupart des élèves bloque souvent sur les mêmes difficultés, connaître les astuces et les réflexes qui les débloquent améliorera leur compétence.*
- ***Des exercices*** *groupés par thèmes et par ordre de difficulté croissante.*
- ***Des problèmes*** *puisés dans des situations réelles, de la vie courante, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement et ce en conformité avec les objectifs du nouveau programme.*
- *Tous les exercices et les problèmes sont* ***corrigés*** *intégralement et commenté dans un langage simple et rigoureux.*

✪ ***Une règle d'or :***

Attachez vous à résoudre les exercices sans regarder le corrigé (éviter même le "petit coup d'œil"). Si au bout de 10 minutes vous n'y parvenez pas, lisez la solution puis refaites l'exercice quelques jours après, pour voir si vous avez vraiment compris.

Nous souhaitons que cet ouvrage vous permettrait d'acquérir les bons réflexes, ceux qui vous donnerez l'aisance nécessaire pour aborder, avec confiance et sérénité, les devoirs de mathématiques.

Nous conclurons cet avant - propos par une remarque frappée au coin du bon sens, empruntée au mathématicien George Polya, dont chacun devinera sans peine les destinataires : « ***De même que apprendre à ,nager , il faut se mettre à l'eau , pour savoir résoudre des problèmes , il faut en résoudre*** ».

Sommaire

Chapitre I

Généralités sur les fonctions

Définition d'une fonction :

- Une fonction est une relation qui a tout élément d'un ensemble A de départ associe au plus un élément appelé image dans l'ensemble d'arrivée B :
- Notation: $f : A \to B$
  $x \mapsto f(x)=y$

d'une fonction f dans un repère

On lit y égale f de x.

Ensemble de définition.

- On dit que f est définie sur un ensemble D .

Si et seulement si pour tout x de D f (x) existe.

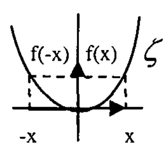
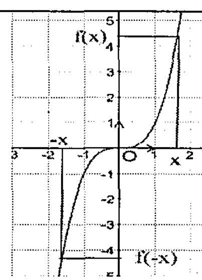
Représentation graphique :

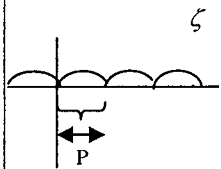
La représentation graphique est l'ensemble des points M(x,f(x)) $(o,\vec{i},\vec{j})$

Définition :

Soit f définie sur D, I une partie de D.
On appelle restriction de f à I, la fonction g définie sur I par g(x) = f(x)

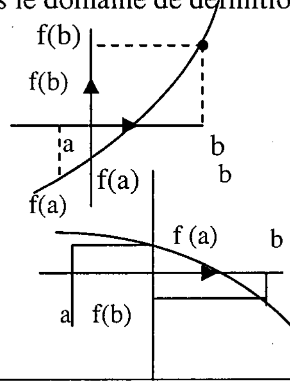
Exemple : $f(x) = x^2$ sur IR
$g(x) = x^2$ sur IR_+ alors g est la restriction de f sur IR_+

Propriétés	Relation	Intervalle d'étude	Propriétés pour ζ_f	Représentation
paire	Pour tout $x \in D$, $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x)=f(x) \end{cases}$	$IR_+ \cap D$	Dans un repère orthogonal (oy) axe de symétrie de ζ_f	
Impaire	Pour tout $x \in D$ on ait $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$	$IR_+ \cap D$	Dans un repère O est un centre de symétrie de ζ_f	

Périodique (de période P) P>0	Pour tout $x \in D$ on ait $\begin{cases} x+p \in D \\ f(x+p)=f(x) \end{cases}$	$[x_0, x_0+p] \cap D = I$	ζ_f est obtenue en translatant la courbe f sur I par le vecteur $p\,k\,\vec{i}$ avec $k \in Z$	

Sens de variation

f une fonction et I un intervalle continue dans le domaine de définition de f.



- f est **croissante** sur I
Si et seulement si pour tout $a, b \in I$
Si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$
- f est **décroissante** sur I
Si et seulement si pour tout $a, b \in I$
Si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- f est **constante** sur I signifie que
pour tout $a,b \in I$ on a $f(a)= f(b)$
- f est **monotone** signifie que
f est Croissante où décroissante.

Théorèmes:

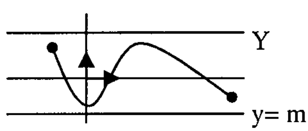
- f est croissante et positive sur I $\Rightarrow \sqrt{f}$ est croissante sur I
- f est décroissante et positive sur I $\Rightarrow \sqrt{f}$ est décroissante sur I

Majorant – Minorant

f est une fonction définie sur I

- $M \in IR$, On dit que f est **majorée** sur I par M
Si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$
- $m \in IR$, on dit que f est **minorée** sur I par m
Si et seulement si pour tout $x \in I$; $f(x) \geq m$.
- f est **bornée** sur I si et seulement si il existe
$m, M \in IR$ tel que $m \leq f(x) \leq M$

Exemple :



•Remarque :
Si M est majorant de f alors tout réel M' tel que $M' \geq M$ est un majorant de f.
Si m est un minorant de f alors tout réel tel que m' < m est un minorant de f.

Maximum – Minimum

f définie sur un intervalle I de IR
- $x_0 \in I$, on dit que f présente en x_0 un maximum égal à $f(x_0)$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$
- $x_0 \in I$, on dit f présente en x_0 un minimum égal à $f(x_0)$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$

Opérations sur les fonctions:

1) **Produit** d'une Fonction par un réel k:
$(k f)(x) = k.\ f(x)$
- Domaine de définition de k.f est égale à D_f
- $k > 0 \Rightarrow f$ et k.f ont même sens de variation
- $k < 0 \Rightarrow f$ et k.f ont des sens de variation contraires

2) Fonction **somme** : f+ g
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- f et g est croissante sur I $\Rightarrow f + g$ est croissante
- f et g est décroissante sur I $\Rightarrow f + g$ est décroissante sur I

3) Fonction **produit** : $f \times g$

$(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$
Domaine de définition de $f \times g$ est égale à $D_f \cap D_g$
On peut rein déduire pour les variations.

Réflexes

Situations	Réflexes
• Comment étudier la parité d'une fonction ?	Il faut vérifier • Si Df est symétrique par rapport à 0 puis on test alors $f(-x) = \pm\ f(x)$

• Comment interpréter graphiquement les équations et les inéquations ?	• ζ et ζ' les courbes respectives de f et g → Les solutions de l'équation f(x)=g(x) sont les abscisses des points d'intersection de ζ_f et ζ_g → les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de ζ_g situes au dessus de ζ_f
Comment montrer qu'un nombre réel M est majorant de f? (où m un minorant de f?)	• Etudier le signe de f(x) – M et prouver que $f(x)\text{-}M \leq 0$ $\begin{pmatrix} \text{respectivement} \\ f(x)\text{-}m \geq 0 \end{pmatrix}$ • utiliser les opérations sur les inégalités • utiliser le tableau de variation.
ζ_f la courbe de f comment représentent les fonctions g, h, L? $g(x) = f(x+k)$	• $\zeta_g = t_{-k\vec{i}}(\zeta_f)$
$h(x) = f(x) + k$	• $\zeta_h = t_{k\vec{j}}(\zeta_f)$
$L(x) = k\,f(x)$	• ζ_L c'est l'ensemble des points M' tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ $(M\,(x\,,\,y) \in \zeta_f)$
Comment étudier les variations d'une fonction ?	• On utilise la définition a < b on étude le signe de f(b) –f(a). • On cherche le signe du taux de variation $T = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ • On utilise les opérations sur les fonctions.

ENONCES

1

Etudier la parité des fonctions définies f par :

a) $f(x) = x^2 + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{|x|+4}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ d) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$

2

1) Montrer que si f est impaire et f(0) existe alors f(0)=0

2) f et g deux fonctions de même parité

que peut – on dire de la parité de f + g et de $f\times g$

3

Soit f une fonction définies sur IR.

Etudier la parité des fonctions g et h définies sur IR par :

$g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

4

1) Le tableau de variation ci dessous représente une fonction paire définie sur IR. Compléter ce tableau

x	$-\infty$		-3		0	… ? ……
f(x)			5			
		$\nearrow$		$\searrow$		………………?………..
	$-\infty$				?	

2) Reprenez la question précédente en supposant que f est impaire

5

Soit f définie sur IR telle que pour tout couple (a, b) de IR^2 :

$f(a+b) - f(a)=f(b)$

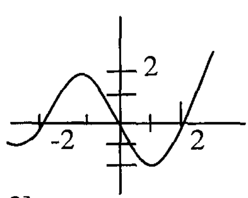
1) Montrer que f(0)=0
2) Montrer que f est impaire
3) Montrer que si f est périodique de période T alors f(T) =0

6

Considérons la fonction f définie sur IR

et ζ_f sa courbe respective dans

Le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ ci dessous.



1) Examiner la parité de f.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Dresser le tableau de variation de g la restriction de f à l'intervalle [-2,2]

b) Donner un maximum atteint par g puis en déduire deux majorants de g

c) Donner un minimum atteint par g puis en déduire deux minorants de g

d) g est elle bornée.

7 Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Montrer que f est minorée par $-\dfrac{1}{2}$ et majorée par $\dfrac{1}{2}$.

8 Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \dfrac{x^2}{1+x+x^2}$.

Montrer que f est minorée par 0 et majorée par $\dfrac{4}{3}$.

9 1) Ecrire le polynôme $3x^2-2x+1$ sous la forme canonique.

2) Montrer que les Fonctions suivantes sont bornées sur leurs ensembles de définitions.

$f(x)=\dfrac{1}{3x^2-2x+1}$ et $g(x)=\dfrac{|\cos x|}{3x^2-2x+1}$

10 Soit f la fonction définie par $f(x)= \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

3) Montrer que $\forall x \in D_f$, f est minorée par 0 et majorée par 1.

11 Etudier le sens de variations des fonctions f en utilisant les opérations sur les fonctions.

1) $f(x)=-x+\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^* = I$

2) $f(x)=-5(x-\dfrac{1}{x})$ sur $]-\infty,0[=I$

3) $f(x)=(x^2+3)\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+=I$

12 Montrer que f admet un extremum en x_0 sur l'intervalle I.

a) $f(x)=2x^2+10x-5$, $x_0=-5/2$ (-minimum) , $I=\mathbb{R}$

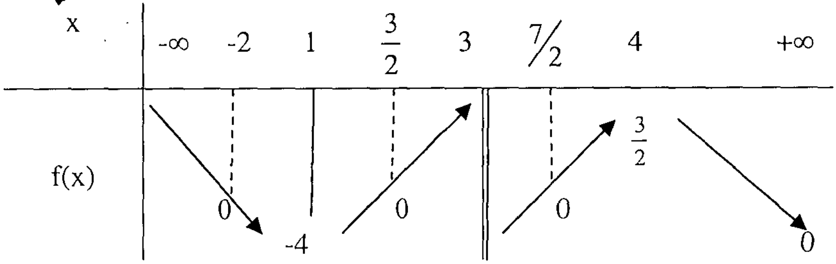
b) $f(x)=-2x^3+42x^2$, $x_0=14$ (maximum) , $I=[14,20]$

13 Montrer en utilisant les variations que f admet un extremum sur l'intervalle I préciser le réel x_0 et la valeur $f(x_0)$ de cet extremum.

a) $f(x)=3(x-4)^2+8$, I=IR (distinguer $x \leq 4$ puis $x \geq 4$)

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$, I=]2,4] utiliser le taux de variations

14 On considère le tableau de variation suivant :



a) Quel est le minimum de f sur]-∞ ,3[? sur $[\frac{7}{2},4]$?

b) Quel est le maximum de f sur $]3,+\infty[$? sur $[-2,1]$?

c) comparer f(10) et f(100) puis f(-8) et f(0)

d) résoudre $f(x) \leq 0$

15 f définie sur IR^* ,par $f(x)=\dfrac{1-3x}{x}$

a) Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x \neq 0$, $f(x)=\dfrac{a}{x}+b$.

b) Déterminer les variations de f.

c) dans un repère, tracer l'hyperbole H: $y=\dfrac{1}{x}$ et en déduire le tracé de ζ_f

d) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation

$$\frac{1-3x}{x}=-2x^2$$

16 1) f définie sur IR_+ par $f(x)=\sqrt{x}$. Construire ζ_f

2) Soit $g(x)=\sqrt{x+1}$

a) Déterminer les variations de g.

b) Construire ζ_f la courbe de g à partir de ζ_f .

3) Soit la fonction $h(x)=-\sqrt{x+1}+4$. Préciser par quelle transformation géométrique obtient – on la courbe ζ_h à partir de ζ_g

17

Indiquer la bonne réponse a, b ou c. Justifier votre réponse

.1) La Fonction $f : x \mapsto 4 - x^2$ est décroissante sur

a) $[0,+\infty[$ b) $[-2,+\infty[$ c) $]-\infty,0]$

2) la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - 3$ est l'image de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur.

a) $-3\vec{i}$ b) $3\vec{i}$ c) $-3\vec{j}$

3) La fonction $f : x \mapsto (x+4)^2-3$ est l'image de la fonction $g : x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur.

a) $-4\vec{i}-3\vec{j}$ b) $4\vec{i}-3\vec{j}$ c) $-3\vec{i}+4\vec{j}$

4) Voici le tableau de variation de la fonction f

x	-3		-1		2		4
f(x)			7				5
		↗		↘		↗	
	2				4		

Le maximum de f sur [-3,4] est

a) 4 b) 7 c) 5

5) f est la fonction définie sur IR par $f(x) = 1+2 \sin x$. un majorant d f sur IR est

a) 1 b) 2 c) 4

6) soit la fonction $f(x) = x^3+1$ définie sur IR_+

a) f est bornée b) f est majorée c) f est minorée

7) f est une fonction décroissante sur IR : $f(1) = 7$ et $f(6) = -4$

Alors pour tout $x \in [1,6]$ on a f(x) appartient à l'intervalle :

a) [0,7] b) [-4,8] c) $[-4,\sqrt{47}]$

8) f la fonction définie sur [3,4] par : $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$ alors

a) f est croissante sur I b) f est décroissante sur I

c) f est constante sur I

9) f la fonction définie par $f(x) = x^3-3$ sur IR alors f est décroissante sur l'intervalle

a) $]-\infty,-1]$ b) [-1,1] c) IR.

10) voici le tableau de variation de la fonction f.

x	-7		-4		-3
f(x)		↘		↗	

On peut dire que :

a) $f(-7) \leq f(-4)$ b) $f(-6) \geq f(-5)$ c) $f(-6) \leq f(-3)$

18

1) Soit la fonction définie sur $[1,2]$ par

$f(x) = x + \sqrt{x+8}$

Montrer que pour tout $x \in [1,2], 4 \leq f(x) \leq 6$

2) soit la fonction $g(x) = \dfrac{12x^2+12}{x^2+2}$ définie sur IR

Montrer que g est majorée par 12 et minorée par 6

3) Montrer alors que pour tout $x \in [1,2]$

$$x + \sqrt{x+8} < \frac{12x^2+12}{x^2+2}$$

19

Un producteur de fraises peut récolter 1200 kg de fraises et les vendre à 5 dinars le kg s' il attend, sa récolte augmente de 60kg par jours et le prix du kg baisse de 0,100 dinars par jour, le délai ne dépassant pas 40 jours.

a) Montrer que le prix de vente P après n jours est donné par :

$P(n) = 6(-n^2 + 30n + 1000)$

b) vérifier que $P(n) = -6(n-15)^2 + 7350$

Étudier le sens de variation de P sur $[0,40]$

c) quel est le nombre de jours au bout des quels on obtient le maximum de P.

20

1) On considère la fonction u définie par $u(x) = x - \dfrac{1}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition de u et étudier sa parité.

b) Montrer que u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

c) Sur $]0,+\infty[$, résoudre $u(x) = 0$ et chercher le signe de $u(x)$.

d) déterminer les variations de u^2.

2) On considère la fonction $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

b) Exprimer f en fonction de u^2.

En déduire les variations de f sur$]0, +\infty[$

On montrera en particulier que f admet un minimum égal à 2 sur cet intervalle.

Dresser le tableau de variation de f.

CORRIGÉS

1 a) $f(x)= x^2+2$, f est définie sur IR
donc symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = (-x)^2 +2 = x^2+ 2 = f(x)$
$\Rightarrow$ f est paire

b) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{|x|+4}$, D_f=IR, $x \in$ IR alors $-x \in$ IR

et $f(-x) = \dfrac{(-x)^3-(-x)}{|-x|+4} = \dfrac{-x^3+x}{|x|+4} = -\dfrac{x^3-x}{|x|+4} = -f(x)$ donc f est impaire .

c) $f(x)= \sqrt{x-1}$, $D_f=[1,+\infty[$
$[1,+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f est ni paire ni impaire.

d) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$
$D_f=\{x \in IR/|x|-1 \geq 0\}$
$|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ $D_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$
$\forall x \in D_f$ alors $|x| \geq 1 \Rightarrow |-x| \geq 1$ car $|x| = |-x|$
d'ou D_f est symétrique par rapport à 0
* $f(-x) = \sqrt{|-x|-1} = \sqrt{|x|-1} = f(x) \Rightarrow$ f est paire

2 1) f est impaire et définie en 0 alors $f(-0) = -f(0)$
soit $f(0) = -f(0)$ ou encore $f(0) = 0$

2) En supposant que f et g sont paires alors pour tout $x \in$ IR on a :
* $f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$ d'où $(f+ g)(-x) = (f+ g)(x)$ $\Rightarrow$ f + g est paire.
* $f(-x) \times g(-x) = f(x) \times g(x)$
$\Rightarrow (f\times g)(-x) = (f\times g)(x) \Rightarrow f \times g$ est paire.

<u>Conclusion :</u> Si f et g sont paires alors $f + g$ et $f\times g$ sont paires.

b) supposons que f et g sont impairs alors pour tout $x \in$ IR on a :
$f(-x) + g(-x)= - f(x) - g(x)$ $\Rightarrow$ $(f+g)(-x)= - (f+g)(x)$ $\Rightarrow$ f+g est impaire.
* $f(-x) \times g(-x) = (-f(x) \times (-g(x))$ $\Rightarrow (f\times g)(-x)=(f\times g)(x)$ $\Rightarrow$ $f\times g$ est paire.

<u>Conclusion :</u> Si f et g sont impaires alors f + g est impaires mais $f\times g$ est paire. Finalement on déduit que :
Si f et g sont de même parité alors f + g est de même parité mais $f\times g$ est toujours paire.

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$

* $g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}= g(x) \Rightarrow$ g est paire

* $h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x) \quad \Rightarrow$ h est impaire.

4 1) f est paire $\Rightarrow$ la symétrie de la ζ_f par rapport à l'axe des ordonnées conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f(x)			5				5		
		↗		↘		↗		↘	
	$-\infty$				?				$-\infty$

On peut donner n'importe quelle valeur à f(0) , inférieur à 5.

2) f est impaire $\Rightarrow$ f(0) = 0 et symétrie de ζ_f par rapport à l'origine du repère permet de compléter le tableau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f(x)			5						$+\infty$
		↗		↘		↘		↗	
	$-\infty$				0		-5		

5 1) On a : $f(a+b) - f(a) = f(b)$

pour a = b= 0 l'égalité devient $f(0+0) - f(0) = f(0)$

d'où $\cancel{f(0)} - \cancel{f(0)} = f(0)$ ainsi $f(0)= 0$

2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

On prend $b =-x$ et $a = x$

L'égalité $f(a+b) - f(a) = f(b)$

devient : $f(x-x) - f(x) = f(-x)$

$f(0)- f(x) = f(-x)$ or $f(0) = 0$

d'où $f(-x) = -f(x)$ ainsi f est impaire

3) f est périodique de période T $\Rightarrow f(x+T) = f(x)$

or $f(a+b) - f(a)= f(b)$ on prend : $a = x$, $b = T$

d'où $f(x+T) - f(x) = f(T)$ Or $f(x+T) = f(x)$ Ainsi l'égalité devient $0= f(T)$

6 1) ζ_f admet l'origine 0 pour centre de symétrie, f est donc impaire.

2) La lecture de la courbe permet de distinguer trois intervalles où f est monotone. Le tableau de variation suivant en résulte

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3) a)

x	-2		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

b) g présente un maximum égal à 2 atteint pour x=-1 alors tout nombre supérieur à 2 est un majorant pour g (il ya une infinité) par exemple : 3 et 5

c) g présente un minimum égal à -2 atteint en x=1 alors tout nombre inférieur à -2 est un minorant pour g (il ya une infinité) par exemple : -3 et -10

d) g admet un minorant -2 et un majorant 2 alors $-2 \leq g(x) \leq 2$ donc g est bornée.

7

$$* \; f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2x+(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0$$

car $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 > 0)$ d'où $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

$$* \; f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)} \qquad = -\frac{x^2-2x+1}{2(1+x^2)} = \frac{-(x-1)^2}{2(1+x^2)} \leq 0$$

Car $(x-1)^2 \geq 0$ et $2(1+x^2) > 0$

D'où $f(x) - \frac{1}{2} \leq 0$ par suite $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion : f est majorée par $\frac{1}{2}$ et minorée par $-\frac{1}{2}$

8

* $1 + x + x^2$ est polynôme du $2^{ème}$ degré de discriminant $\Delta = -3$ donc $1 + x + x^2 > 0$

d'autre part $x^2 \geq 0$

d'où $f(x) \geq 0$.

$$* \; f(x) - \frac{4}{3} = \frac{x^2}{1+x+x^2} - \frac{4}{3} = \frac{3x^2-4(1+x+x^2)}{3(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{-x^2-4x-4}{3(1+x+x^2)}=-\frac{x^2+4x+4}{3(1+x+x^2)}=-\frac{(x+2)^2}{3(1+x+x^2)}\leq 0$$

car $(x+2)^2\geq 0$ et on a $1+x+x^2>0$

d'ou $f(x)-\frac{4}{3}\leq 0$ soit $f(x)\leq\frac{4}{3}$

Conclusion : f est minorée par 0 et majorée par $\frac{4}{3}$

9 1) $3x^2-2x+1=3(x^2-\frac{2}{3}x)+1$

$$=3(x^2-2.\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9})+1=3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}$$

2) Comme on a :

$3x^2-2x+1=3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$

car $(x-\frac{1}{3})^2\geq 0$ d'où $D_f=IR=D_g$

* On sait que $(x-\frac{1}{3})^2\geq 0$

Soit $3(x-\frac{1}{3})^2\geq 0$ équivaut à $3(x-{}^1\!/_3)^2+{}^2\!/_3\geq{}^2\!/_3$

d'où $3x^2-2x+1\geq{}^2\!/_3$

et en inversant : $0<\frac{1}{3x^2-2x+1}\leq\frac{3}{2}$

soit $0<f(x)\leq{}^3\!/_2$

f est donc bien bornée sur D_f.

* $g(x)=\frac{|\cos x|}{3x^2-2x+1}$ ayant $-1\leq\cos x\leq 1$

On a donc $|\cos x|\leq 1$ et comme $0<\frac{1}{3x^2-2x+1}\leq{}^3\!/_2$

donc $0<\frac{|\cos x|}{3x^2-2x+1}\leq{}^3\!/_2$ par suite g est bornée sur son $D_f=IR$.

10 * $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

1) f est définie lorsque $x+1\geq 0$ et $x\geq 0$

ou encore $x\geq -1$ et $x\geq 0$

on a donc $D_f = IR_+$

2) $f(x)=\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ on multiplie et on divise par l'expression conjuguée

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

3) on a $x \in D_f = IR_+$

$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1$ d'ou $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1$

donc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq 1$ par suite $0 < f(x) \leq 1$

Finalement f est minorée par 0 et majorée par 1.

11

1) $f(x) = -x + \dfrac{1}{x}$ sur $IR_+^* = I$

soit $U(x) = -x$ décroissante sur I et $V(x) = \dfrac{1}{x}$ décroissante sur I

Comme $f(x) = U(x) + V(x)$ alors f est décroissante sur I

2) $f(x) = -5(x - \dfrac{1}{x})$

soit $u(x) = x$ croissante sur I et $V(x)= \dfrac{1}{x}$ décroissante sur I alors – V est croissante sur I donc la fonction U-V est croissante sur I comme f définie par -5 (U-V) donc f est décroissante sur I

3) $f(x) = (x^2+3)\sqrt{x}$, $I = IR_+$

Soit $U(x)=\sqrt{x}$ croissante sur IR_+

$V(x)= x^2+ 3$ croissante sur IR_+ et $U(x) \geq 0$ et $V(x) > 0$

Comme $f(x) = U(x).V(x)$ donc f est croissante sur IR_+

12

a) Il s'agit de montrer que $f(x) \geq f(\frac{-5}{2})$ pour tout réel x.

$$f(x) - f(\frac{-5}{2}) = 2x^2+10x-5-(\frac{25}{2} - 25 - 5)$$

$$= 2x^2+10x-5+\frac{35}{2} = 2x^2+10x+\frac{25}{2}$$

$$= 2(x^2+5x+\frac{25}{4}) = 2(x+\frac{5}{2})^2 \geq 0$$

Donc $f(x) \geq f(-5/2)$ d'ou $f(-\frac{5}{2})$ est un minimum de f sur IR.

b) $f(x) - f(14) = -2x^3 + 42x^2 - (-2\times14^3 + 42\times14^2)$

$$= -2(x^3 - 14^3) + 42(x^2 - 14^2)$$
$$= -2(x-14)(x^2 + 14x + 14^2) + 42(x-14)(x+14)$$
$$= (x-14)(-2x^2 + 14x + 196)$$

$-2x^2 + 14x + 196$ a pour discriminant $\Delta = 1764 = 42^2$

$$x' = \frac{-14-42}{-4} = 14 \text{ et } x'' = \frac{-14+42}{-4} = -7$$

Ainsi $-2x^2 + 14x + 196 = -2(x-14)(x+7)$

D'où $f(x) - f(14) = -2(x-14)^2(x+7)$.

Comme $(x-14)^2 \geq 0$ et $x + 7 > 0$ car $x \geq 14$

D'ou $f(x) - f(14) \leq 0$ ou encore $f(x) \leq f(14)$

Ainsi $f(14)$ est un maximum de f sur $[14,20]$.

13

a) $f(x) = 3(x-4)^2 + 8$

- sur $]-\infty, 4]$ on a $x \leq 4 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0$

a et b $\in]-\infty, 4]$ tel que $a \leq b$

$\Rightarrow (a-4) \leq (b-4)$ comme $a - 4 \leq 0$ et $b - 4 \leq 0$

$\Rightarrow (a-4)^2 \geq (b-4)^2$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$

- a et b $\in [4, +\infty[\Rightarrow a \geq 4$ et $b \geq 4$

$a \leq b \Rightarrow a - 4 \leq b - 4 \quad \Rightarrow (a-4)^2 \leq (b-4)^2$

$\Rightarrow f(a) \leq f(b) \quad \Rightarrow$ f est strictement croissante sur $[4, +\infty[$

<u>Tableau de variation :</u>

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	8	$\nearrow$	

Pour tout réel x on a: $f(x) \geq f(4)$ et $f(4) = 8$

$\Rightarrow$ 8 est minimum de f sur IR.

b) a, b $\in]2,4]$ tel que $a \neq b$

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}}{b-a} = \frac{b(a-2) - a(b-2)}{(b-a)(a-2)(b-2)}$$

$$= \frac{-2b+2a}{(b-a)(a-2)(b-2)} = \frac{-2(b-a)}{(b-a)(a-2)(b-2)} = \frac{-2}{(a-2)(b-2)}$$

or $a > 2$ et $b > 2 \Rightarrow a - 2 > 0$ et $b - 2 > 0$

d'ou $T < 0 \Rightarrow$ f est strictement décroissante sur$]2,4]$

$2 < x \leq 4$ et f est strictement décroissante sur $]2,4]$

donc $f(x) \geq f(4)$ or $f(4) = 2 \Rightarrow f(x) \geq 2$

par suite 2 est un minimum de f sur$]2,4]$

14 D'après le tableau de variation de f on a :

a) • Pour $x \in]-\infty,3[$, $f(x) \geq -4$

$\Rightarrow$ -4 est un minimum de f sur$]-\infty,3[$

• Pour $x \in [\frac{7}{2},4]$, $f(x) \geq f(\frac{7}{2})$ et $f(\frac{7}{2}) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ 0 est un minimum de f sur $[\frac{7}{2},4]$

b) • Pour $x \in]3,+\infty[$, $f(x) \leq f(4)$ et $f(4) = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}$ est un maximum de f sur $]3,+\infty[$

• Pour $x \in [-2,-1], f(x) \leq f(-2)$ et $f(-2) = 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ 0 est un maximum de f sur [-2,-1].

c) 10 et 100 $\in [4,+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[4,+\infty[$

$10 < 100 \Rightarrow f(10) > f(100)$

• -8 et 0 $\in]-\infty,1]$et f est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$

$-8 < 0 \Rightarrow f(-8) > f(0)$

d) sur $]-\infty,2[$, f est stictement décroissante $\Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0$

sur [-2,1], f est décroissante et $f(\frac{3}{2}) = 0 \quad \Rightarrow f(x) \leq f(-2) \Rightarrow f(x) \leq 0$

sur [1,3[f est croissante et $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

• $f(x) \leq f(\frac{3}{2}) \Rightarrow f(x) \leq 0$ pour $x \in [1,\frac{3}{2}]$

• $f(x) > 0$ sur $]\frac{3}{2},3[$ de même sur]3,4] puis sur $[4,+\infty[$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	||	-	0	+	

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,\frac{3}{2}] \cup]3,\frac{7}{2}]$ donc $S_{IR} = [-2,\frac{3}{2}] \cup]3,\frac{7}{2}]$

15 a) 1[ère] méthode :

$$f(x) = \frac{1-3x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{1}{x} - 3 \text{ donc } a = 1 \text{ et } b = -3$$

2[ème] méthode :

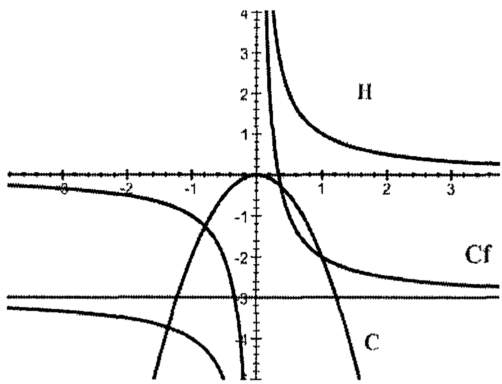
$$f(x) = \frac{a}{x} + b = \frac{a+bx}{x} = \frac{1-3x}{x}$$

par identification on obtient : a =1 et b = -3

b) $f(x) = \frac{1}{x} - 3$

sur IR^* on sait que $\frac{1}{x}$ est strictement décroissante

donc $f(x)=\frac{1}{x}-3$ est strictement décroissante sur IR^*



c) H : $y = \frac{1}{x}$ est une hyperbole d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$.

- $f(x)= \frac{1}{x}$ -3 $\quad \Rightarrow t_{-3\vec{j}}(H) = \zeta_f$

d) On trace la courbe $\zeta : y = -2x^2$

les courbe ζ et ζ_f se coupent en 3points

A , B et C donc l'équation

$\frac{1-3x}{x} = -2x^2$ admet 3 solutions

16 1) $f(x)=\sqrt{x}$

x	0	1	2	3
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

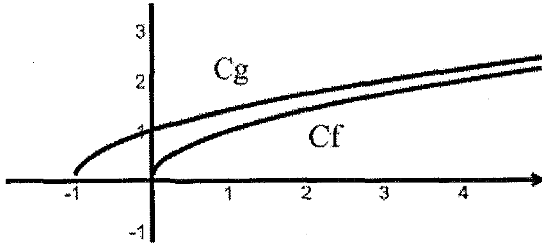
2) a) $g(x) = \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1,+\infty[$

Soit u(x)= x+1 croissante sur [-1, + ∞[et U(x) > 0

$\Rightarrow$ g est croissante sur $]-1,+\infty[$

b) g(x)= $\sqrt{x+1}$=f(x+1)

$\Rightarrow t_{-\vec{i}}(\zeta_f) = \zeta_g$.



3) $h(x) = -\sqrt{x+1} + 4 = -g(x) + 4$

ζ_h se déduit de la courbe de g par :

- On construire ζ_1 symétrique ζ_g par rapport à (xx') puis en déduit ζ_h de ζ_1 par la translation du vecteur $4\vec{j}$

17

1) la réponse est $\boxed{a}$: u(x)=x^2est croissante sur IR_+

$\Rightarrow -u$ est décroissante sur IR_+

$\Rightarrow$ f est décroissante sur IR_+

2) La réponse est $\boxed{c}$:

f(x)= $\sqrt{x}$ - 3 = g (x) - 3 $\Rightarrow$ $\zeta_f = t_{-3\vec{j}}\ (\zeta_f)$

3) La réponse est $\boxed{a}$: f(x)=g(x+ 4) -3 donc ζ_f est l'image de ζ_g par la translation du vecteur $-4\vec{i} - 3\vec{j}$.

4) La réponse est $\boxed{b}$: 7 est le maximum de f sur [-3,4]

5) La réponse est $\boxed{c}$: on a $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 + 2\sin x \leq 3 < 4$

$\Rightarrow 4$ est un majorant de f sur IR.

6) La réponse est $\boxed{c}$:

$x \in IR_+ \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow$ f est minorée par 1

7) La réponse est $\boxed{b}$: f est décroissante sur [1,6] alors $f(6) \leq f(x) \leq f(1)$

$\Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 7 < 8 \Rightarrow f(x) \in [-4, 8]$

8) La réponse est $\boxed{a}$: $f(x) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$;

Soit $u(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur I

$\Rightarrow$ -2u est croissante sur I $\Rightarrow$ f est croissante sur I

9) La réponse est $\boxed{c}$:

f(x)= x^3-3 or $x \mapsto x^3$ est croissante sur IR $\Rightarrow$ f est croissante sur IR

10) La réponse est $\boxed{b}$: f est décroissante sur [-7,-4]

-6 et -5 $\in[-7,-4]$ et $-6<-5$ donc $f(-6)\geq f(-5)$

18

1) On a : $1\leq x\leq 2$

$\Rightarrow 9\leq x+8\leq 10$

$\Rightarrow \sqrt{9}\leq\sqrt{x+8}\leq\sqrt{10}$

$\Rightarrow 3\leq\sqrt{x+8}\leq\sqrt{10}$ et $1\leq x\leq 2$

donc $4\leq x+\sqrt{x+8}\leq\sqrt{10}+2$ or $\sqrt{10}<\sqrt{16}=4$

$\Rightarrow \sqrt{10}+2<6$ finalement $4\leq f(x)\leq\sqrt{10}+2\leq 6$

2) $g(x)=\dfrac{12x^2+12}{x^2+2}$

* $g(x)-12=\dfrac{12x^2+12}{x^2+2}-12=\dfrac{12x^2+12-12(x^2+2)}{x^2+2}=\dfrac{-12}{x^2+2}<0$

car $(x^2\geq 0\Rightarrow x^2+2>0)$

$\Rightarrow g(x)-12\leq 0\Rightarrow g(x)\leq 12$

* $g(x)-6=\dfrac{12x^2+12}{x^2+2}-6=\dfrac{12x^2+12-6(x^2+2)}{x^2+2}$ car $6x^2>0$ et $x^2+2>0$

$\Rightarrow g(x)-6\geq 0\Rightarrow g(x)\geq 6$

ainsi g est majorée par 12 et minorée par 6.

3) sur [1,2] on a $4\leq f(x)\leq 6$

sur IR on a $6\leq g(x)\leq 12$

donc $\forall x\in[1,2]$ on a : $f(x)\leq 6$ et $6\leq g(x)$

par suite $g(x)\geq 6\geq f(x)\Rightarrow g(x)\geq f(x)\Rightarrow x+\sqrt{x+2}\leq\dfrac{12x^2+12}{x^2+2}$

19

a) Après n jours le poids de la récolte est 1200 + 60 n est le prix du kg est (5 - 0,1 n)

D'ou $P(n)=(1200+60\,n)(5-0{,}1\,n)=6000-120\,n+300\,n-6n^2$

$=6(-n^2+30\,n+1000)$

b) $-6(n-15)^2+7350=-6(n^2-30\,n+225)+7350$

$=-6\,n^2+180\,n-1350+7350=-6\,n^2+180\,n+6000$

$=6(-n^2+30\,n+1000)=P(n)$

$P(n)=-6(n-15)^2+7350$

$u(n)=(n-15)^2$ croissante sur [15,40] et décroissante sur [0,15]

$\Rightarrow$ -6 u est décroissante sur [15,40] et croissante sur [0,15]

$\Rightarrow$ P est décroissante sur [15,40] et croissante sur [0,15]

n	0		15		40
$P(n)$		$\nearrow$		$\searrow$	

c) le maximum de P est atteint pour n =15
Donc au bout du 15ème jours le profit maximum est obtenu.

20 1) a) $u(x)=x-\frac{1}{x}$ d'ou $D_u=\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ on a $-x\in\mathbb{R}^*$ et $u(-x)=-x-\frac{1}{-x}=-x+\frac{1}{x}=-u(x)$

Donc u est impaire.

b) sur$]0,+\infty[$, $u(x)=x-\frac{1}{x}$

u est la somme de deux fonction $x\mapsto x$ et $x\mapsto -\frac{1}{x}$ qui sont strictement croissantes sur $]0,+\infty[$
d'ou u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
c) * $u(x)=0$ et comme $x\neq 0$

alors l'équation est équivalente à $\frac{x^2-1}{x}=0$ soit $x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ or $x\in]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow x=1$ d'ou $S\{1\}$

* $u(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$

comme $x>0$ alors $x+1>0$
d'ou le signe de u(x) est celui de (x-1)

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$-$	0	$+$	

d) * sur $[1,+\infty[$ on a u est strictement croissante signifie que pour tout a, b de $[1,+\infty[\,\in]1,+\infty[$.

$a>b\Rightarrow u(a)>u(b)$ or u est positive sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow u^2(a)\geq u^2(b)$

$\Rightarrow u^2$ est strictement croissante sur$[1,+\infty[$

* sur$]0,1]$ on a u strictement croissante signifie que pour tout

a, b de]0,1], a >b $\Rightarrow$ u (a) > u (b) or u est négative sur]0,1]

D'ou $u^2(a) < u^2(b)$

Ainsi u^2 est strictement décroissante sur]0,1].

x	0	1	$+\infty$
$u^2(x)$	$\searrow$	|	$\nearrow$

2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

a) * $Df = \mathbb{R}^*$

* $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-x \in \mathbb{R}^*$

$f(-x) = (-x)^2 + \dfrac{1}{(-x)^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2} = f(x)$ alors f est paire.

b) $u(x) = x - \dfrac{1}{x}$ alors $u^2(x) = (x - \dfrac{1}{x})^2$

$$= x^2 - 2.\frac{1}{x}x + \frac{1}{x^2}$$

ainsi $u^2(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$

$u^2(u) = f(x) - 2$

d'ou $f(x) = u^2(x) + 2$

par suite f est u^2 ont les même variations

d'ou le tableau de variation de f

	0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$\searrow$	2	$\nearrow$	

f(1)=2 pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $f(x) \geq 2$

$\Rightarrow$ 2 est un minimum pour f.

Chapitre II

Continuité

- **Définition:**

f définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est continue en **a** signifie que pour tout nombre $\beta > 0$ il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$, $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Exemple :

$f(x) = 2x - 1$ et $a = 2$. Montrer que f est continue en 2 ?

pour tout $\beta > 0$ existe-t-il un $\alpha > 0$ tel que $|x - 2| < \alpha$ alors $|f(x) - f(2)| < \beta$

on sait que $|f(x) - f(2)| < \beta$ or $f(2) = 3 \Leftrightarrow |(2x - 1) - 3| < \beta$

soit $|2x - 4| < \beta$ où encore $2|x - 2| < \beta \Leftrightarrow |x - 2| < \dfrac{\beta}{2}$ il suffit de choisir $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

ainsi f est continue en 2.

- **Continuité de certaines fonctions usuelles en un point a :**

Fonction	Continue en tout point a de
$x \mapsto c$ constante	IR
$x \mapsto x$	IR
$x \mapsto ax$	IR
$x \mapsto ax + b$	IR
$x \mapsto x^2$	IR
Toute fonction polynôme	IR
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	IR*
Toute fonction rationnelle	Domaine de définition
$x \mapsto \sqrt{x}$	IR_+
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$	Son domaine de définition

- **Opérations sur les fonctions continues :**

Théorèmes : 1) f continue en $a \Rightarrow |f|$ est continue en a.

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ f(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{f}$ est continue en a.

3) Soient f et g deux fonctions continues en a et $\alpha \in IR$

$\Rightarrow f + g$, $f \times g$, αf sont continues en a.

4) $\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue en } a \\ f(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{f}$ est continue en a.

5) f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ est continue en a.

Exemple : • $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2+2x+5}$ .Justifier que f est continue en 2.

$x \mapsto \sqrt{x-2}$ continue en 2.

$x \mapsto x^2+2x+5$ est une fonction polynôme donc continue

en 2 et $2^2+2\times 2+5=13 \neq 0. \Rightarrow$ f est continue en 2.

■ **Illustration graphique :**

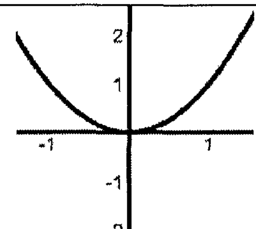
• On reconnaît qu'une fonction est continue lorsque sa courbe représentative eut être tracer sans lever le crayon

:

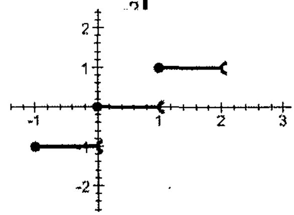
• Exemple :

$f(x) = x^2$ est continue sur IR ξ_f est une parabole,

f peut être tracée sans lever le crayon.



• **Contre exemple** : f(x) = E(x) la partie entière de x lorsqu'on trace sa courbe il faut lever le crayon en tout point d'abscisse entière



■ **Continuité à gauche et à droite :**

• **Définitions** :

1) f définie sur [a, b[= I

f est **continue à droite** en a signifie que pour $\beta \rangle 0$, il existe un $\alpha \rangle 0$ tel que

Si $x \in I$, $0 \leq x-a \leq \alpha$ alors $|f(x)-f(a)| \langle \beta$

Exemple :

$f(x)=\sqrt{x}$, $a=0$, $Df=[0,+\infty[$

Soit $\beta \rangle 0$, existe il un $\alpha \rangle 0$ tel que $0 \leq x \leq \alpha$ alors $|\sqrt{x}-\sqrt{0}| \langle \beta$

on sait que $|\sqrt{x}| \langle \beta \Rightarrow \sqrt{x} \langle \beta \Rightarrow 0 \leq x \leq \beta^2$

ainsi on peut choisir $\alpha=\beta^2$ d'où l'existence de α par suite f est continue à droite en 0.

2) f définie sur]b, a] = I
f est **continue à gauche** en a signifie que pour tout $\beta > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

théorème :
f définie sur I intervalle ouvert contenant a ,f est **continue en a** $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en a.

- **Continuité sur un intervalle**:

- f est continue sur]a, b[$\Leftrightarrow$ f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.
- f est continue sur [a, b[$\Leftrightarrow$ f est continue sur]a, b[et à droite en a.
- f est continue sur]a, b] $\Leftrightarrow$ f est continue sur]a, b[et à gauche en b.

- **Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle** :

Théorèmes:

1) Toute fonction polynôme est continue sur IR.
2) Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
3) $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
4) fonction continue sur I et positif $\Rightarrow \sqrt{f}$ est continue sur I.
5) f et g sont continue sur I, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f \times g$, $f + g$ et α f sont continue sur I.
6) f est g sont continue sur I et $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ est continue sur I.

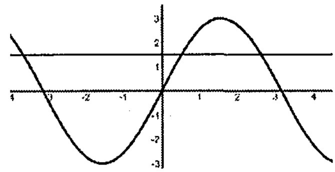
- **Le théorème des valeurs intermédiaires** :

- **Théorème** :
  L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- **Définition** : f définie sur un intervalle A alors $f(A) = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}$.
- **Théorème des valeurs intermédiaires** :
  f continue sur un intervalle I, a ,b deux réels de I
  Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) il existe au moins sur c
  Compris entre a et b tel que f(c) = k.

- **Cas particulier** :
  Si f continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I(a < b) et f(a) . f(b) < 0 alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans]a, b[.

- Remarque : Si on sait de plus que f est croissante où décroissante sur [a,b] alors la solution est unique.

- **<u>Interprétation graphique</u>** :
  f continue sur [a, b [et ζ est la courbe de f.
  Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b),
  la droite $\Delta : y = k$ coupe au moins une fois la courbe ζ .



<u>Remarque</u> :
Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une solution à l'équation f(x) = k.
Mais il n'indique pas comment la calculer ni le nombre de solution de cette équation.

<u>Exemple</u> :
$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
Montrer sur l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans [-3, -1].
Réponse : f (-3) = -1 et f (-1) = 1
f est une fonction polynôme donc continue sur IR
donc f est continue sur [-3, -1]
comme f (-3). f (-1) = -1 < 0
donc il existe au moins un $c \in]-3, -1[$ tel que f(c) = 0
ainsi c est une solution de f(x) = 0.

ENONCES

1 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$ est continue sur IR.
2) La fonction partie entière est continue sur [5, 7[.
3) l'équation $E(x) = \frac{1}{3}$ n'a pas de solution.
4) f est définie sur [0, 1] telle que f(0) = -3 et f(1) = 3 alors il existe un réel $c \in [0,1]$ tel que f(x) = 0.
5) l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet au moins une solution comprise entre –1 et 2.

2 **QCM**

Indiquer la bonne réponse par a, b où c avec justification :

1) La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ est continue sur :

   $\boxed{a}$ $]-\infty, 1[$ $\boxed{b}$ $IR - \{1\}$ $\boxed{c}$ $]1, +\infty[$

2) f une fonction continue sur [-2, 5] et f(-2) = 1 et f(5) = -4 alors on peut dire que l'équation f(x) = -1

   $\boxed{a}$ n'admet pas de solution.
   $\boxed{b}$ admet une seule solution.
   $\boxed{c}$ admet au moins une solution.

3) la fonction partie entière est continue :

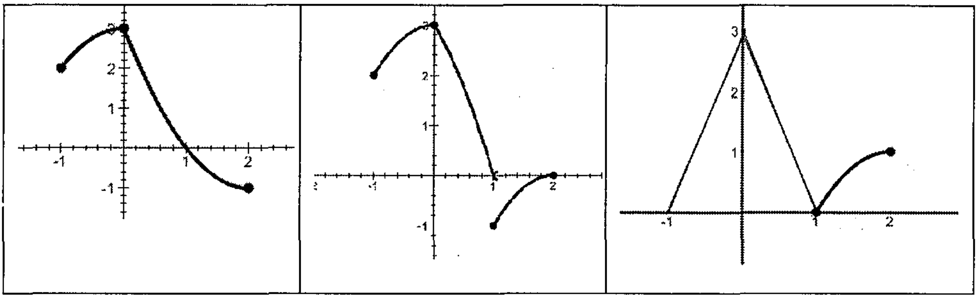
   $\boxed{a}$ sur IR.
   $\boxed{b}$ sur tout intervalle [n, n + 1[avec $n \in \mathbb{Z}$.
   $\boxed{c}$ sur [0, 1[.

4) La fonction $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ est continue sur :

   $\boxed{a}$ IR $\boxed{b}$ $IR - \{1\}$ $\boxed{c}$ $[1, +\infty[$

3 ζ_1, ζ_2 et ζ_3 Sont les représentations graphiques des trois fonctions f, g et h définies sur [-1, 2].

a) Dire dans chaque cas si la fonction est continue sur [-1, 2].
b) Si la fonction n'est pas continue sur [-1, 2] citer un intervalle sur le quel est continue.



4 Parmi les fonctions suivantes. Indiquer celles qui sont continues sur IR.

$$f(x)=3x^2-x-3 \quad , \quad g(x)=\frac{x-1}{x^2+4}$$

$$h(x)=E(x) \quad , \quad \ell(x)=\frac{3}{x}$$

et $\varphi(x)=\dfrac{|x|+3}{|x|+1}$

5 Justifier la continuité de f en un point a :

1) $f(x)=2x+\sqrt{x+3}$; $a=0$.

2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, $a=2$.

3) $f(x)=|x-1|+2x+1$, $a=1$.

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-1}$, $a=\dfrac{1}{2}$.

5) $f(x)=\sqrt{3x^2+x+7}$, $a=-1,7$.

6

$$f(x)=\begin{cases} -x \text{ si } x\leq 0 \\ x^2 \text{ si } 0\langle x\langle 1 \\ x-1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

1) Tracer ζ la courbe représentative de f dans un repère.

2) Justifier que f est continue sur $]-\infty,0]$, sur $]0,1[$ puis sur $]1,+\infty[$.

3) Justifier à l'aide du graphique que f n'est pas continue en 1.
4) Déterminer à l'aide du graphique le nombre de solution de chacune équations :
a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = -1$

7 Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 - 4x + 5$.
Montrer que l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution comprise entre -2 et 3.

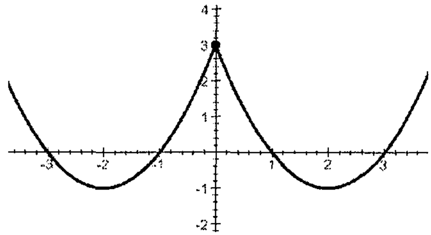
8 Montrer que l'équation $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$ admet au moins une solution Dans $[-2, 1]$.

9 $f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1$
1) Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 4 solutions.

10 1) Montrer que l'équation $\sqrt{x-2} = \frac{8}{x^2}$ admet au moins une solution α dans $[3, +\infty[$.
2) Vérifier que α est aussi une solution de l'équation $x^5 - 2x^4 - 64 = 0$.

11 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$
1) Tracer dans un même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de f puis celle de g.
2) a) Justifier que f est continue sur IR.
b) Justifier que g est continue sur IR*.
3) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[-2, 2]$.
4) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution α sur $[-2, 2]$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

12



ζ est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR.

1) Déterminer f(0), f(1), f(2).
2) Résoudre graphiquement :
   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) \geq 0$
   figure (courbe)
3) Quelles sont les images par f des intervalles suivants:
   $I =]-1, 1[$, $J = [0, 2[$, $K =]2, 3]$, $L =]-2, 2[$, $H = [2, +\infty[$
4) Déterminer l'ensemble des antécédents positif par f des réels de l'intervalle $[-1, 0]$

13

A partir des tableaux de variations suivant trouver f(I) dans chaque cas :

1)

x	$-\infty$	2
f(x)		1
	$-\infty$	

$I =]-\infty, 2]$

2)

x	-2	0	3
f(x)		1	
	-4		-4

a) $I = [-2, 0]$ b) $I = [0, 3]$ c) $I = [-2, 3]$

3)

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f(x)	7		5	
		2		$-\infty$

a) $I =]-\infty, 1]$ b) $I = [1, 3]$ c) $I =]-\infty, 3]$
d) $I = [3, +\infty[$ e) $I = IR$.

14

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$

1) a) Déterminer D le domaine de définition de f.
   b) Etudier la continuité de f sur D.
   c) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ possède une seule solution sur $]3, +\infty[$.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

15

$f(x) = \sqrt{x} + x$

a) justifier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c) En déduire que l'équation f(x) = 5 admet une solution α sur [3, 4].

16 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur IR.

1) Justifier la continuité de f sur IR.

2) a) Compléter le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f(x)	?	$\nearrow$	?	$\searrow$	?	$\nearrow$	$+\infty$

b) Déterminer les images des intervalles suivants par [0, 1];]1, $+\infty$[par f.

3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution sur IR.

b) Vérifier que $\alpha \in [1,6 ; 1,7]$.

4) Déduire alors le signe de f(x) sur IR.

CORRIGES

1 Vrai- Faux

1) Vrai : f est une fonction polynôme donc continue sur IR.
2) Faux : $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue en tout entier en particulier en 6.
3) Vrai : E(x) est un entier donc $\neq \frac{1}{3}$.
4) Faux : f doit être continue pour appliquer le théorème de cours.
5) Vrai : on pose $f(x) = x^3 - x - 1$continue sur IR et $f(-1) = -1$ et $f(2) = 5$ et $f(2) \times f(-1) = -5 \langle 0$ f est continue sur [-1, 2]
$\Rightarrow$ il existe au moins sur $C \in]-1, 2[$ tel que $f(C) = 0$.

2 1) La réponse est $\boxed{b}$ car f est une fonction rationnelle donc continue sur $Df = IR - \{1\}$.

2) La réponse est $\boxed{c}$ car f est continue sur [-2, 5]
$\Rightarrow h : x \mapsto f(x) + 1$ est continue sur [-2, 5].
$h(-2) = f(-2) + 1 = 2$
$h(5) = f(5) + 1 = -4 + 1 = -3$
$h(-2) \times h(5) \langle 0$
$\Rightarrow$ il existe au moins un $c \in [-2, 5]$ tel que $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = -1$.
3) La réponse est $\boxed{b}$ la partie entier est continue sur IR - $\mathbb{Z}$.
4) La réponse est $\boxed{a}$ la fonction $x \mapsto \sqrt{|x - 1|}$ est continue sur Df = IR.

3 a) Les courbes représentatives des fonctions f et h sont tracées sans lever le crayon alors f et f_1 sont continue sur [-1, 2]

- ζ_g n'est pas continue en 1 $\Rightarrow$ g n'est pas continue sur [-1, 2].

b) g est continue sur [-1, 0] par exemple (sur [1, 2]).

4 • f est une fonction polynôme $\Rightarrow$ f est continue sur IR.

- g est une fonction rationnelle définie sur IR $\Rightarrow$ g est continue sur IR.
- φ est définie sur IR et $|x|$ continue sur IR.

Conclusion : f, g, φ sont continue sur IR remarque
(h continue sur IR - $\mathbb{Z}$; ℓ continue sur IR*).

5 $x \mapsto 2x$ est continue sur IR.

1) $x \mapsto \sqrt{x+3}$ continue sur son domaine de définition $[-3,+\infty[$

$\Rightarrow$ f est continue sur $[-3,+\infty[$ en particulier en 0.

2) f est une fonction rationnelle donc continue sur Df = IR – {-2} donc f continue en 2.

3) • $x \mapsto x-1$ continue sur IR $\Rightarrow x \mapsto |x-1|$ continue sur IR.

• $x \mapsto 2x+1$ une fonction polynôme $\Rightarrow$ continue sur IR

d'où f est continue sur IR en particulier en 1.

4) • $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est continue en $\frac{1}{2}$.

• $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est rationnelle $\Rightarrow$ continue sur IR - $\{1\}$ $\Rightarrow$ continue en $\frac{1}{2}$

d'où f est continue en $\frac{1}{2}$.

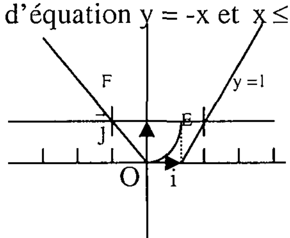
5) $f(x) = \sqrt{3x^2+x+7}$ est continue sur Df = IR car $\Delta = -20 < 0$

d'où f est continue en –1,7.

6 1) sur $]-\infty,0]$ on trace la demi droite d'équation y = -x et $x \leq 0$

sur]0, 1[on trace une branche de parabole $y = x^2$

sur $[1,+\infty[$ on trace la demi-droite d'équation $y = x-1$ et $x \geq 1$.



2) • $x \mapsto -x$ continue sur IR $\Rightarrow x \mapsto -x$ est continue sur $]-\infty,0]$

d'où f est continue sur $]-\infty,0]$.

• $x \mapsto x^2$ polynôme $\Rightarrow$ continue sur IR en particulier sur $]0,1[$

d'où f est continue sur]0,1[.

• $x \mapsto x-1$ fonction polynôme donc continue sur IR et en particulier sur $[1,+\infty[$ $\Rightarrow$ f est continue sur $[1,+\infty[$.

3) La fonction f ne peut être tracer sans lever la main en 1

$\Rightarrow$ f est discontinue en 1.

4) a) f(x) = 1 la droite d'équation y = 1 coupe ζf en deux points F et E d'abscisses respectives –1 et 2 donc 2 solutions.

b) f(x) = -1, la droite d'équation y = -1 ne coupe pas ζf donc le nombre de solution est 0.

7 $f(x) = x^3 - 4x + 5$ est une fonction polynôme donc continue sur IR et $f(-2) = 5$ et $f(3) = 20$ or $5 < 8 < 20$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe au moins un réel $\alpha \in [-2,3]$ tel que $f(\alpha) = 8$ ainsi α est une solution de $f(x) = 8$.

8 On pose $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ est une fonction polynôme donc continue sur IR et $f(-2) = -8 + \frac{3}{2}.4 + 1 = -1$ et $f(1) = \frac{7}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [-2,1] \\ f(1)\,f(-2) = \frac{-7}{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{il existe au moins un c sur} \in \left]-2,1\right[\text{ tel que } f(c) = 0$$

par suite c est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

9 $f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1$

1) $f(-2) = 16 - 16 + 2 + 1 = 3$
   $f(-1) = 1 - 4 + 1 + 1 = -1$
   $f(0) = 1$
   $f(1) = 1 - 4 - 1 + 1 = -3$
   $f(3) = 3^4 - 4.3^2 - 3 + 1 = 81 - 36 - 2 = 43$
2) f est une fonction polynôme $\Rightarrow$ f est continue sur IR
   $\Rightarrow$ f est continue sur $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 3]$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [-2,-1] \\ f(-2).f(-1) = -3 \langle 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{il existe sur } \alpha \in \left]-2,-1\right[\text{ tel que } f(\alpha) = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [-1,0] \\ f(-1).f(0) = -1 \langle 0 \end{array}\right.$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\beta \in \left]-1,0\right[$ tel que $f(\beta) = 0$ de même sur $[0, 1]$ on a $f(0) . f(1) = -3 < 0$ et sur $[1, 3]$ et $f(1)\,f(3) < 0$

$\Rightarrow$ il existe $\delta \in \left]0,1\right[$ et $\lambda \in \left]1,3\right[$ tel que $f(\delta) = 0$ et $f(\lambda) = 0$

comme $f(x) = 0$ est une équation de $4^{\text{èmé}}$ degré donc α, β, δ et λ sont les seule solutions de l'équations $f(x) = 0$.

10 1) $\sqrt{x-2} = \frac{8}{x^2}$ pour $x \geq 3$ est equivalente à $x^2\sqrt{x-2} = 8$

on pose $f(x) = x^2\sqrt{x-2}$ il faut alors résoudre $f(x) = 8$.

On remarque que f(3) = 0 et f(4) = 16
Comme f est le produit d'une fonction polynôme qui est continue sur IR et d'une racine carrée qui est continue sur $[2,+\infty[$

$\Rightarrow$ f est continue sur $[3,+\infty[$

comme 8 est comprise entre f(3) et f(4) alors d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation f(x) = 8 admet au moins une solution $\alpha \in]3,4[\subset]3,+\infty[$

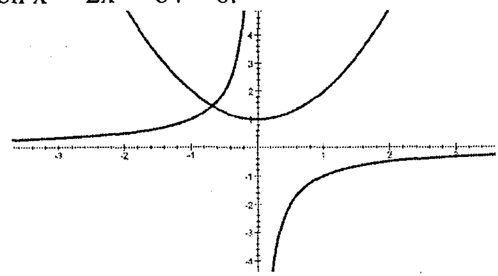
2) On a $f(\alpha)=8 \Leftrightarrow \alpha^2\sqrt{\alpha-2}=8 \Leftrightarrow \alpha^4\sqrt{\alpha-2}^2=64$

$\alpha^4(\alpha-2)=64$

$\alpha^5-2\alpha^4-64=0$

d'où α est une solution de l'équation $x^5-2x^4-64=0$.

11 1) ζf est une parabole de sommet S(0, 1) d'axe de système $(S,\vec{j})$.



x	0	1	2
f(x)	1	2	5

ζg est une hyperbole d'asymptotes x = 0 et y = 0 de centre de symétrie 0(0, 0)

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
g(x)	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

2) a) f est une fonction polynôme donc f est continue sur IR.
b) g est une fonction rationnelle donc continue sur IR*.

3) ζf et ζg se coupent en un seul point A(-0,8, 1,4) donc f(x) = g(x) admet qu'une seul solution dans [-2, 2].

4) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3+x+1=0$

on pose $h(x)=x^3+x+1$, h(-2) = -9 et h(2) = 11 et h est continue sur [-2,2] (c'est une fonction polynôme) alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation h(x) = 0 admet au moins une solution dans [-2, 2]. Notons α cette solution.

* on fait un balayage de [-2, 2] par pas de 0, 1
et en utilisant la calculatrice on

* on fait un balayage de [-2, 2] par pas de 0, 1
et en utilisant la calculatrice on
obtient h(-0,7)< 0 et h(-0, 6) > 0 $\Rightarrow -0{,}7 \langle \alpha \langle -0{,}6$
on trouve h(-0,69) < 0 ; h(-0, 68) > 0
d'où $-0{,}69 \langle \alpha \langle -0{,}68$ ainsi –0,69 est une valeur approchée
de α à 10^{-2} près par défaut.

12 1) f(0) = 3 car le point (0,2) $\in \zeta$
f(1) = 0 et f(2) = -1

2) a) f(x) = 0. les solutions sont les abscisses des points d'intersection de ζ et de l'axes des abscisses qui sont : -3, -1, 1, 3.
b) $f(x) \geq 0$. les solutions sont les abscisses des points de ζ situes au dessus de l'axe des abscisses d'un : $S_{IR} =]-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty[$

3) * f([-1, 1]) =]0, 3[= f(I) * f(K) = f(]2, 3]) =]-1, 0]
* f([0, 2[) =]-1, 3] = f(J) * f(L) = f(]-2, 2[) =]-1, 3]
et f(H) = f([2, +∞ [) = [-1, +∞ [.

4) Les abscisses des points de ζ dont les $x \geq 0$ et $y \in [-1, 0]$ sont $x \in [1, 3]$ ainsi les antécédent de [-1, 0] tel que $x \geq 0$ sont $x \in [1, 3]$.

13 1) f(]−∞, 2]) =] −∞, 1].

2) a) f([-2, 0]) = [-4, 1] b) f([0, 3]) = [-4, 1].
* f([-2, 3]) = [-4, 1].

3) a) f(]−∞, 1]) = [2, 7[.
b) f([1, 3])) [2, 5].
c) f(]−∞, 3]) = [2, 7[.
d) f([3, +∞ [) =] −∞, 5].
e) f(IR) =] −∞, 7[.

14 1) a) $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$ il faut que : $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ d'où D = [3, +∞ [.
b) $x \mapsto x - 3$ est une fonction polynôme donc continue sur IR en particulier sur [3, +∞ [comme $x - 3 \geq 0$ sur cette intervalle alors $x \mapsto \sqrt{x-3}$ est continue sur D. et $x \mapsto x^2$ est une fonction polynôme elle continue sur IR. Finalement f est continue sur D.
c) Soient a et b deux réels de D tel que $a \geq b$
alors $a - 3 \geq b - 3$ et $a^2 \geq b^2$
donc $\sqrt{a-3} \geq \sqrt{-3}$ et $a^2 \geq b^2$

par suite $a^2\sqrt{a-3} \geq b^2.\sqrt{6-3}$ ainsi f est strictement croissante sur D.

x	3		+∞
f(x)	0	↗ 4 ↗	+∞

$f(3) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

2) a) D'après le tableau de variation $4 \in [0,+\infty[$ alors l'équation $f(x) = 4$

admet une unique solution α [3, +∞ [

b) *$f(3,17) = 4{,}14$ et $f(3,16) = 3{,}99$.

* $f(3,16) = 3{,}99$ et $f(3,17) = 4{,}14$ et $f(\alpha) = 4$

$f(3,16) < f(\alpha) < f(3,17)$ comme f est strictement croissante sur

[3, +∞ [donc $3{,}16 < \alpha < 3{,}17$.

15 $f(x) = \sqrt{x}+x$

a) $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$v : x \mapsto x$ est continue sur IR.

Alors f = u+v est continue sur $[0,+\infty[$

b) u est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

v est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

alors f = u+v est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

c) f es t continue sur [3,4] et $f(3)= \sqrt{3}+3 \simeq 4{,}7$

et $f(4) = \sqrt{4}+4 = 6$ comme $4{,}7 < 5 < 6$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $\alpha \in [3,4]$ tel que $f(\alpha) = 5$

16

$f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) f est une fonction polynôme donc f est continue sur IR

2) a)

x	-∞		0		1		+∞
f(x)	-∞	↗	1	↘	-2	↗	+∞

b) $f([0,1]) = [-2,-1]$ et $f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$

3) a) sur $]-\infty,0]$, f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$

$f(x) \leq f(0)$ et $f(0)=-1$

donc $f(x) \leq -1$ ainsi $f(x)=0$ ne possède pas de solution sur $]0,+\infty]$

* sur [0,1], f est strictement décroissante
$\Rightarrow -2 \le f(x) \le -1 \Rightarrow f(x) \le -1$
ainsi l'équation f(x)=0 n'a pas de solution dans [0,1]
* sur $[1,+\infty[$ on a $0 \in [-2,+\infty[$
donc l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in [1,+\infty[$
finalement : f(x)=0 $\Leftrightarrow x = \alpha$
b) f(1,6) = -0,488 et f(1,7)= = 0,156 et f(x)=0
f(1,6)< f(α) <f(1,7) comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$
donc 1,6< α <1,7
c) sur $]-\infty,1]$ et d'après a) on a f(x) ≤ -1 donc f(x)<0
d'autre peut sur $[1,+\infty[$, f est strictement croissante
Si $x \in [1,\alpha]$ alors $f(x) \le f(\alpha) = 0$
$\Rightarrow f(x) \le 0$
Si $x \in [\alpha,+\infty[$ alors $f(\alpha) \le f(x)$
$\Rightarrow 0 \le f(x)$
conclusion :

x	$-\infty$	1		α		$+\infty$
f(x)	-		-	0	+	

Chapitre III
Limites et continuité

■ Limites finies en un réel :

soit f définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en a de I ..

1) Définition : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ signifie que :

$\forall\beta>0$, il existe un $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in I$

$0<|x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$.

2) Théorème : Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

- Notation : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{a} f=L$

3) Limite à droite – limite à gauche en un réel.

Limite à droite en a	Limite à gauche en a
f définie sur I =[a, b[ou]a,b[$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ signifie que $\forall\beta>0$ il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in I, 0<x-a<\alpha \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$	f définie sur I=]c,a] ou]c,a[$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ signifie que $\forall\beta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in I, 0<a-x<\alpha \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$

- Théorème : $\boxed{\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=L}$

- Exemples : $\begin{cases} f(x)=x+1 & \text{si } x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{5-x}{x+1} & \text{si } x<1 \end{cases}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{5-x}{x+1}=\dfrac{4}{2}=2$

d'ou $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

- conséquence : Si $\lim\limits_{x\to a^+} f\neq\lim\limits_{x\to a^-} f$ alors $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas.

4) Opérations sur les limites finies :

$\lim\limits_{x\to a} f$	$\lim\limits_{x\to a} g$	$\lim\limits_{x\to a} f+g$	$\lim\limits_{x\to a} f\times g$	$\lim\limits_{x\to a} \alpha f$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}$
L	L'	L + L'	L × L'	α . L	$\frac{L}{L'}$ si $L'\neq 0$

• Remarque : si on se retrouve avec $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{0}$ c'est une forme indéterminée il faut alors simplifier l'écriture pour calculer cette limite.

5) Théorèmes : 1) $f(x)\geq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow L\geq 0$

2) $f(x)\leq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow L\leq 0$

3) $f(x)\geq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$

■ **Continuité en un point x_0** :

• **Définition** : soit I un intervalle centré en x_0 et $I\subset D_f$.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

• **Continue à droite et à gauche** : $(x_0\in D_f)$

* f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

* f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

* f est continue en $x_0 \Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en x_0.

■ **Continuité sur un intervalle** :

• f est continue sur $]a,b[\Leftrightarrow$ f est continue en tout point $x_0\in]a,b[$.

• f est continue sur $[a,b[\Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et à droite en a.

• f est continue sur $]a,b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et à gauche en b.

■ **Opérations sur les fonctions continues** :

• Toute fonction polynôme est continue sur IR.

• Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

• $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• f est continue sur I et positif $\Rightarrow\sqrt{f}$ est continue sur I.

• f est continue sur I $\Rightarrow |f|$ est continue sur I.

• Soient f et g deux fonctions continues sur I, $\alpha\in IR$

Alors $f+g$; $f\times g$; αf sont continue sur I.

Si de plus $g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

■ **Théorème et définition : prolongement par continuité** :

f définie sur un intervalle ouvert I sauf en a de I et $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Alors la fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ g(a) = L \end{cases}$$

On dit que g est le **prolongement par continuité** en a de la fonction f.

Exemple : Déterminer g le prolongement par continuité de f.

* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ définie sur IR-{1}

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} x+1 = 2$$

On considère g définie sur IR par : g(x) f(x) si $x \neq 1$ et g (1) = 2.

Réflexes :

	Situations	Réflexes
1	Comment étudier la continuité d'une fonction définie par intervalles	On étudie la fonction sur chaque intervalle puis on fait une étude particulière de la continuité aux valeurs aux bornes des intervalles (dans D_f)
2	Comment calculer une limite si on se retrouve avec la forme $\frac{0}{0}$	• Simplifier l'expression puis remplacer le x par sa valeur. • Si f comporte des $\sqrt{\ }$ il faut multiplier et diviser par l'expression conjuguée où factoriser
3	Comment calculer une limite (dans le cas $\neq \frac{0}{0}$)	• En remplaçant le x par sa valeur dans l'expression. • En utilise les opérations sur les limites.

ENONCES

1

Déterminer la limite éventuelle de f(x) au point a .

1) $f(x) = 5x^8 - 3x^2 + 2x - 4$; $a = 1$
2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; $a = 2$
3) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 15|}{|x| - 5}$; $a = 4$
4) $f(x) = \dfrac{|x - 5| - 1}{|x + 3| - 3}$; $a = -3$
5) $f(x) = \sqrt{5x - 5}$; $a = 5$
6) $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$; $a = 0,3$
7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$; $a = 1$

2

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2 - 8x^3}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2}$

3

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{2x - 6}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}}{x - 4}$

4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{-2x + 5}{x^2 - 5x + 6}$.

a) Préciser le domaine de f.
b) Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

5

Soit f définie par $f(x) = x[x - E(x)] + 5$.

1) Ecrire f(x) sur chacun des intervalles [3,4[et [4,5[.
2) a) Trouver $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$. f admet-elle une limite en 4 ?

b) Refaire le même raisonnement pour $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$; $n\in \mathbb{Z}^*$.

f admet-elle une limite en $x_0 = n$?

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5$.

6 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 + x - 4}{x^2 - 16}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1}{(x-1)^2}, \text{ avec } n\in \mathbb{N}.$$

Calculer la limite de f (x) quand x tend vers 1.

8 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$ avec a et b, deux réels.

1) Déterminer les valeurs de a et b, pour que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$.
2) Pour les valeurs de a et b, trouver :
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$; $f(x) = x^2 + x + 1$
   b) Retrouver alors la limite de f en 1 et en 2.
   c) Peut on prolonger f par continuité?

9 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = -x+1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.
3) f est-elle continue en 2 ?
4) Déterminer le domaine de continuité de f.

10 Soient $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ et $g(x) = |2x - 1|$.

Montrer que f et g sont continues sur leurs domaines de définition.

11 $f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{\sqrt{9x^2}}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f n'est pas continue en 0

12 Soit f définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+(a^2-3)x-3a}{x-1}$ si $x\neq 1$; $f(1)=4a$.

Déterminer a pour que f soit continue en 1

13 $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-2}{1-|x+1|}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) f est-elle continue en – 1 ?

14 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=a \ ; \ a\in \mathbb{R} \end{cases}$.

1) Préciser D_f.
2) Pour quelle valeur de a la fonction f est continue en 0.

15 $\begin{cases} f(x)=x^2-x+1 \text{ si } x\in]-\infty,-1[\\ f(x)=\sqrt{5-4x} \text{ si } x\in [-1,1] \\ f(x)=ax^2+2bx-4 \text{ si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$

1) Etudier la continuité en (-1).
2) Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en 1

16 1) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
b) Déterminer les limites aux bornes.

2) Soit la fonction g définie par $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} & \text{si } x\rangle 0 \\ f(x)-1 & \text{si } 0\rangle x\geq -1. \\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité de g en 0.
b) Déterminer le domaine de continuité de g.

17 Soit la fonction f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|-1}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) a) Etudier la limite de f en 2.
   b) Calculer la $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
3) On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) \text{ si } x>2 \\ g(x)=\dfrac{ax+E(x)}{x-1} \text{ si } x<2 \\ g(2)=1 \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue en 2.

18

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2x & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+2x-m}{-x+2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer m pour que f soit continue en 1.

Pour quelle valeur de m f est continue sur $IR \setminus \{2\}$

19

$$f: IR \to IR \; ; \; x \mapsto \frac{x^2+E(\frac{x}{2})}{x+1}.$$

a) f est elle continue en 1 ?
b) f est elle continue en 2 ?

20

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-4|-3x^2}{|x|-1}+x & \text{si } |x|\neq 1 \\ f(x)=ax+b & \text{si } |x|=1 \end{cases}$$ avec a et b, deux réels.

1) Ecrire f sans le symbole des valeurs absolues.
2) a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit continue en $x_0 = 1$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit continue en $x_0 = -1$.

c) En déduire les valeurs de a et b pour que f soit continue en 1 et en - 1.
3) On suppose que a = 1 et b = - 8.

Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

21

On considère la fonction $f: IR \to IR$;

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{(a+2)x^2+x+2a}{x+2} & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+b & \text{si } -1\leq x\leq 3 \\ \sqrt{4x-3}-x & \text{si } x>3 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$.
3) Pour a = 1 et b = 6, déterminer le domaine de continuité de f.

22 Pour tout réel m, on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x)=\begin{cases}(1+3m)x^2+3x \text{ si } x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2} \text{ si } x\in\left]\frac{1}{2},2\right[\\ \sqrt{4x^2-1}-mx-1 \text{ si } x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

1) a) Déterminer le domaine de définition D et f_m.
   b) Etudier les limites suivantes (discuter éventuellement suivant m)
   $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f_m(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f_m(x)$
2) Peut on déterminer m pour que f_m soit continue en 2.
3) Préciser suivant m, l'ensemble de continuité de f_m.

23 f définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{1-\sqrt{x^3+1}} \text{ si } x\rangle 0\\ (x+2)E(x) \text{ si } x\langle 0\\ -2 \text{ si } x=0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
2) Etudier la continuité de f en (-1).

24 Soit $f_0(x)=E(\frac{1}{x})$; $f_1(x)=xE(\frac{1}{x})$; $f_2(x)=x^2E(\frac{1}{x})$.

1) Représenter graphiquement les restrictions de f_0 ; f_1 et f_2.
   à l'intervalle : $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$.
2) Etudier la continuité des fonctions f_0 ; f_1 et f_2.

25 Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x)=\dfrac{E(x)}{x}$.

1) Déterminer la restriction de f sur chacun des intervalles :
$[n,n+1[$ et $[n-1,n[$ pour $n\in Z^*$.

2) Sur quel ensemble f est continue ?

26 f est la fonction définie sur D= $[-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

a) Montrer que pour contre de D, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

b) Etudier la limite de f en 0.

c) La fonction f est celle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui défini ce prolongement.

27 f la fonction définie sur IR^* par $f(x)=2x+\dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}$

a) Etudier la continuité de f en 0

b) Peut-on prolonger f par continuité en 0.

CORRIGES

1

1) $\lim\limits_{x\to 1} 5x^8 - 3x^2 + 2x - 4 = 5 - 3 + 2 - 4 = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{4-1}{4+1} = \dfrac{3}{5}$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|x^2 - 15|}{|x| - 5} = \dfrac{|16-15|}{4-5} = -1$

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{|x-5| - 1}{|x+3| - 3} = \dfrac{|-3-5| - 1}{|-3+3| - 3} = \dfrac{8-1}{-3} = \dfrac{-7}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{5x-5} = \sqrt{25-5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

6) $\lim\limits_{x\to 0,3} \sqrt{1-3x} = \sqrt{1-0,9} = \sqrt{0,1} = \sqrt{\dfrac{1}{10}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1} = 0$

2

* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 9}$?

On constate que l'on a la forme "$\dfrac{0}{0}$".

3 est donc une racine commune du numérateur et du dénominateur on a :

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x - \cancel{3})(2x+7)}{-(x - \cancel{3})(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+7}{-(x+3)} = -\frac{13}{6}$$

* Le même raisonnement pour les autres limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 8x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(2-8x)}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} 2 - 8x = 2$$

* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} x^2 + 3x + 9 = 27$

* $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}} = \lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)} = \lim\limits_{0} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = \dfrac{1}{3}$

$$* \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}$$

3 $\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{x+1}}{2x-6}$ lorsqu'on remplace par 3 on obtient la forme "$\frac{0}{0}$"

d'où $\lim_{x\to 3}\frac{(2-\sqrt{x+1})}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{(2x-6)(2+\sqrt{x+1})}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2^2-\sqrt{x+1}^2}{(2x-6)(2+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{4-x-1}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{2(2+\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{8}$$

* $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ c'est aussi la forme "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}^2-1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

* $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ c'est la forme "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=4$$

* $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}{x-4}$ c'est la forme "$\frac{0}{0}$"

alors $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}^2-\sqrt{2x+1}^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+(\sqrt{2x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{6}{6}=1$

4

a) $D_f=\{x\in IR\text{ ; tel que } x^2-5x+6\neq 0\}=IR-\{2,3\}$

b) $\lim\limits_{x\to1}-2x+5=3$ et $\lim\limits_{x\to1}x^2-5x+6=2$ d'où $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{3}{2}=f(1)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

- $\lim\limits_{x\to2^+}-2x+5=1$ et $\lim\limits_{x\to2^+}x^2-5x+6=0^-$ d'où $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to2^-}-2x+5=1$ et $\lim\limits_{x\to2^-}x^2-5x+6=0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to3^-}-2x+5=-1$ et $\lim\limits_{x\to3^-}x^2-5x+6=0^-$ d'où $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+5=-1$ et $\lim\limits_{x\to3^+}x^2-5x+6=0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$.

5

1) si $x\in[3,4[$; $E(x)=3$ donc $f(x)=x^2-3x+5$.

Si $x\in[4,5[$; $E(x)=4$ donc $f(x)=x^2-4x+5$

2) a) • $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}(x^2-3x+5)=9$.

- $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}(x^2-4x+5)=5$.
- $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$. Donc f n'admet pas de limite en 4.

b) si $x\in[n,n+1[$; $E(x)=n$ donc $f(x)=x^2-nx+5$

Si $x\in[n-1,n[$; $E(x)=(n-1)$ donc $f(x)=x^2-(n-1)x+5$.

- $\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}(x^2-nx+5)=n^2-n^2+5=5$.
- $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}(x^2-(n-1)x+5)=n^2-n^2+n+5=n+5$

- $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en n.

c) Si $x \in [-1 , 0[$; $E(x)=-1$ donc $f(x)=x^2+x+5$

Si $x \in [0 , 1[$; $E(x)=0$ donc $f(x)=x^2+5$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+5=5$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x+5)=5$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5$.

6 1) $D_f=\{x \in \mathbb{R};\ \text{tel que } x^2-16\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-4,4\}$.

2) • $\lim\limits_{x\to 4} x^4-4x^3+x-4=0$ et $\lim\limits_{x\to 4} x^2-16=0$ donc

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ est une forme indéterminée $\ll \frac{0}{0} \gg$.

$f(x)=\dfrac{x^4-4x^3+x-4}{x-16}=\dfrac{x^3(x-4)+(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x^3+1}{x+4}$ pour tout $x \in D_f$.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+1}{x+4}=\dfrac{65}{8}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+1}{x+4}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

7 Soit $A(x)=x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$

$= x^{2n}-2x^n+1-n^2(x^{n+1}-2x^n+x^{n-1})=(x^n-1)^2-n^2x^{n-1}(x^2-2x+1)$

$= (x^n-1)^2-n^2x^{n-1}(x-1)^2$.

Or $\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}=1+x+...+x^{n-1}$ (c'est la somme de n terme d'une suite géométrique de raison $x\neq 1$ et de 1er terme 1.

Donc $x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$

D'où $A(x)=(x-1)^2(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)^2-n^2x^{n-1}(x-1)^2$

$=(x-1)^2[(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)^2-n^2x^{n-1}]$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2[(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)^2-n^2x^{n-1}]}{(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^{n-1}+x^{x-2}+...+x+1)^2-n^2x^{n-1}\right]=\underbrace{1+1+...+1}_{\text{n fois}}-n^2= n-n^2$.

8 1) * $\lim\limits_{x\to 1} x^4-2x^3+ax+b=a+b-1$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(x-2)=0$

alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ est finie que lorsque $a+b-1=0$, soit $a=1-b$.

* $\lim\limits_{x\to 2} x^4-2x^3+ax+b=2a+b$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x-2)=0$

alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ est finie que lorsque $2a+b=0$

or $a=1-b$ d'où $2-2b+b=0$ ou encore $b=2$ et $a=-1$.

2) a) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3+ax+b}{(x-1)(x-2)}$.

On remarque que : $1^4-2.1^3-1+2=0$ et $2^4-2.2^3-2+2=0$

Donc 1 et 2 sont des racines de x^4-2x^3-x+2.

$x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(cx^2+dx+e)$

$=(x^2-3x+2)(cx^2+dx+e)$

$=cx^4+(d-3c)x^3+(e+2c-3d)x^2+(-3e+2d)x+2e.$

Par indentification, on obtient :

$$\begin{cases} c=1 \\ d-3c=-2 \\ e+2c-3d=0 \\ -3e+2d=-1 \\ 2e=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ e=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Par suite, $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=x^2+x+1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} f=\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2} f=\lim\limits_{x\to 2} x^2+x+1=7$

f est une fonction rationnelle donc continue sur $D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

comme $\lim\limits_{x\to 1} f=3$, $\lim\limits_{x\to 2} f=7$

alors on peut prolonger f par continuité il suffit de choisir la fonction g

définie sur IR par : $\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x\in \mathbb{R}-\{1,2\} \\ g(1)=3 \\ g(2)=7 \end{cases}$

9

1) $D_f=\{x\in]-\infty,2]\backslash x-1\neq 0\}\cup]2,+\infty[$

$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ or $1\in]-\infty,2]$ d'où $D_f=]-\infty,2]\cup]2,+\infty[-\{1\}=\mathbb{R}-\{1\}$.

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} -x+1=-1$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-1}=3$

$f(2)=\frac{2+1}{2-1}=3$ donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ d'où f est continue à gauche en 2,

et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1\neq f(2)$ d'où f n'est pas continue à droite en 2.

3) f est continue à gauche mais pas à droite en 2 d'où f n'est pas continue en 2.

4) $x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ d'où f est continue sur $]-\infty,2[-\{1\}$; $x\mapsto -x+1$ est une fonction polynôme donc continue sur IR d'où f est continue sur $]2,+\infty[$ or f n'est pas continue en 2.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

10

$f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\}$.

* $2x^2-3x+1=0$. On remarque que $2-3+1=0$ d'où $x'=1$ et $x=\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

$x\mapsto 2x^2-3x+1$ polynôme continue et positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

par suite f est continue sur D_f.

* $g(x)=|2x-1|$. On a $D_g=\mathbb{R}$.

$x\mapsto 2x-1$ est une fonction polynôme alors continue sur IR.

donc $x\mapsto|2x-1|$ est continue sur IR. D' où g est continue sur $D_g=\mathbb{R}$.

11 $f(x)=2x+\dfrac{\sqrt{9x^2}}{|x|}=2x+\dfrac{3|x|}{|x|}=2x+3$ si $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x+3=3\neq -1$ donc f n'est pas continue en 0.

12 f est continue en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1} ax^2+(a^2-3)x-3a=a^2-2a-3$ et $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0.$

Alors la $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ est finie si seulement si : $a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow a=-1$ ou $a=3$.

** Si $a=-1$ alors $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x-1}$.

Factorisons $-x^2-2x+3$: on remarque $-1-2+3=0$ donc $x'=1$ et $x''=-3$

D'où $-x^2-2x+3=-(x-1)(x+3)$

Ainsi $f(x)=\dfrac{-(x-1)(x+3)}{x-1}=-x-3$ si $x\neq 1$

D'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} -x-3=-4=f(1)$ car $f(1)=4a=-4$.

donc f est continue en 1.

** Si $a=3$ alors $f(x)=\dfrac{3x^2+6x-9}{x-1}=\dfrac{3(x-1)(x+3)}{x-1}=3x+9$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 3x+9=12$ or $f(1)=4a=12$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Conclusion : f est continue en 1 si et seulement si a = 3 ou a = -1

13 $f(x)=\dfrac{-x^2-3x-2}{1-|x+1|}=\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|-1}$

1) $D_f=\{x\in IR / |x+1|-1\neq 0\}=IR-\{0,-2\}$. Puisqu'on a

$|x+1|-1=0 \Leftrightarrow |x+1|=1 \Leftrightarrow x+1=1$ ou $x+1=-1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$

2)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x+1		$-$	0	$+$	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$	

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x} \text{ si } x\in[-1,+\infty[$$

$$f(x)=\frac{x^2+3x+2}{-x-2} \text{ si } x\in]-\infty,-1].$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3x+2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x+2}{-x-2}=0 \text{ or } f(-1)=0$$

donc $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$. Par suite f est continue en -1

14

1) $D_f=\{x\in IR^* / x+1\geq 0 \text{ et } x\neq 0\}\cup\{0\}=[-1,+\infty[$

2) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$

f est continue en 0 si seulement si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Ou encore $\frac{1}{2}=a$.

15

1) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\sqrt{5-4x}=\sqrt{9}=3$ et $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} x^2-x+1=3$

or $f(-1)=\sqrt{9}=3$ ainsi $\lim_{x\to -1} f(x)=3=f(-1)$.

Par suite f est continue en – 1.

2) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{5-4x}=1$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} ax^2+2bx-4=a+2b-4$

et f (1) = 1 d'où f est continue en 1 si et seulement si :

a + 2b – 4 = 1 ou encore a + 2b = 5

16

1) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

a) $Df=\left\{x\in IR / \begin{cases}1+x\geq 0\\ 1-x\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}\right\}=[-1,1]\setminus\{0\}$ puisqu'on a

$$* \quad \begin{cases} 1+x\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1,1]\setminus\{0\}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=1.$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)-1\right]=1-1=0.$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x\sqrt{x}+x\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x+\sqrt{x}\right)=0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$ d'où g est continue en 0.

b) * Si $x\in \mathbb{R}_+^*$; $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$

$\begin{cases} x\mapsto\sqrt{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ x\mapsto x \text{ est c ontinue sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$ alors $\begin{cases} x\mapsto x\sqrt{x}+x \text{ est continue} \\ \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car c'est la somme de} \\ \text{deux fonctions continues.} \end{cases}$

$\begin{cases} x\mapsto x\sqrt{x}+x \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ x\mapsto\sqrt{x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$ alors $\begin{cases} x\mapsto\dfrac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{car c'est le quotient de deux} \\ \text{fonctions continues.} \end{cases}$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

* Si $x\in[-1,0[\,;g(x)=f(x)-1$

* la fonction qui a : $x\mapsto 1-x$ est continue et positive sur $[-1,0[$;

donc la fonction qui a : $x\mapsto\sqrt{1-x}$ est continue sur $[-1,0[$.

* la fonction qui a : $x \mapsto 1+x$ est continue et positive sur $[-1,0[$.

donc la fonction qui a $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1,0[$.

donc la fonction qui a $x \mapsto \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ est continue sur $[-1,0[$.

* la fonction $x \mapsto x$ est continue pour tout $x \in [-1,0[$.

donc $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ est continue sur $[-1,0[$.

car c'est le quotient de deux fonctions continues.

d'où $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}-1$ est continue sur $[-1,\ 0[$.

donc g est continue sur $[-1,0[$.

d'où g est continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et on a g continue en 0

d'où g est continue sur $]-1,+\infty[$.

$$\lim_{x\to(-1)^+} g(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\left[f(x)-1\right]=\sqrt{2}-1=g(-1)$$

<u>Conclusion</u> : g est continue sur $[-1,+\infty[$.

17

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{|x-1|-1}$$

1) $D_f=\{x\in IR \text{ tel que } |x-1|-1\neq 0\}$

$\Leftrightarrow |x-1|-1=0 \Rightarrow |x-1|=1 \Leftrightarrow x-1=1$ ou $x-1=-1$.

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=0$; ainsi $Df=IR\setminus\{0,2\}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2} x-1=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{0}{-1}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{ax+E(x)}{x-1}=\dfrac{2a+1}{1}$ et $g(2)=1$

g continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=g(2)$

donc $2a+1=1 \Leftrightarrow a=0$.

18

1) $D_f = \{x \in]-\infty,1] / \; x^2+3 \geq 0\} \cup \{x \in]1,+\infty[/ \; -x+2 \neq 0\}$

$=]-\infty,1] \cup]1,2[\cup]2,+\infty[= \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+2x-m}{-x+2} = 3-m$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{x^2+3} + 2x = 4 = f(1).$

f est continue en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1).$

$\Leftrightarrow 3-m = 4 \Leftrightarrow -1 = m.$

3) • Si $m \neq -1$ alors f n'est pas continue en 1

donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Si m = -1 alors f est continue en 1 et de plus on a :

* $x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ continue sur IR car $x \mapsto x^2+3$ positive et continue sur IR.
* $x \mapsto 2x$ continue sur IR car c'est un polynôme donc f est continue sur $]-\infty,1[$.
* $x \mapsto \dfrac{x^2+2x-m}{-x+2}$ est rationnelle donc elle est continue sur $\mathbb{R} - \{2\}$

Donc f est continue sur $]1,+\infty[\setminus \{2\}$.

<u>Conclusion</u> : f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ si et seulement si m = -1

19

$f(1) = \dfrac{1+E\left(\frac{1}{2}\right)}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ or $E(\frac{1}{2}) = 0$

$E\left(\dfrac{x}{2}\right) = n \Leftrightarrow n \leq \dfrac{x}{2} < n+1 \Leftrightarrow 2n \leq x < 2n+2$

Si $x \in [2n, 2n+2[$ alors $E\left(\dfrac{x}{2}\right) = n.$

Si $x \in [0,2[$ alors $E\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Si $x \in [2,4[$ alors $E\left(\frac{x}{2}\right)=1$ donc $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$.

comme $1 \in [0,2[$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}=f(1)$ donc f est continue en 1.

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{5}{3}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ d'où f n'est pas continue en 2

20 1)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$\lvert x^2-4 \rvert$		x^2-4	0	$-x^2+4$		$-x^2+4$	0	x^2-4	
$\lvert x \rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x	

Si $x \in]-\infty,-2]$ alors $f(x)=\frac{2x^2+4}{x+1}+x=\frac{3x^2+x+4}{x+1}$.

Si $x \in [-2,0]\setminus\{-1\}$ alors $f(x)=\frac{-4x^2+4}{-x-1}+x=\frac{4(x^2-1)}{x+1}+x=5x-4$

Si $x \in [0,2]\setminus\{1\}$ alors $f(x)=-3x-4$.

Si $x \in [2,+\infty[$ alors $f(x)=\frac{-x^2-x-4}{x-1}=\frac{x^2+x+4}{1-x}$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} -3x-4=-7$ et $f(1)=a+b$.

f est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow a+b=-7$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} 5x-4=-9$ or $f(-1)=-a+b$.

f est continue en -1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1) \Leftrightarrow -a+b=-9$.

c) f est continue en 1 et en -1 si seulement si

$\begin{cases} a+b=-7 \\ -a+b=-9 \end{cases}$ On additionne membre à membre , on obtient $2b=-16$

Ainsi $b=-8$ d'où $a=1$.

3) Pour $a = 1$ et $b = -8$, on sait que f est continue en 1 et en -1.

Sur $]-\infty,-2[$; $f(x)=\frac{3x^2+x+4}{x+1}$ est la restriction d'une fonction rationnelle donc continue sur $]-\infty,-2[$.

Sur $]-2,-1[\cup]-1,0[$; $f(x)=5x-4$ est la restriction d'une fonction affine donc continue sur $]-2,-1[\cup]-1,0[$.

Sur $]0,1[\cup]1,2[$; $f(x)=-3x-4$ affine donc continnue sur $]0,1[\cup]1,2[$.

Sur $]2,+\infty[$; $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{1-x}$ est la restriction d'une fonction rationnelle donc continue sur $]2,+\infty[$.

Continuité en 2 :

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-} -3x-4=-10 \text{ et } \lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+x+4}{1-x}=-10$$

et f(2) = -10 donc f est continue en 2.

Continuité en –2 :

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{3x^2+x+4}{x+1}=-14.$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+} 5x-4=-14=\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2).$$

D'où f est continue en -2.

<u>**Conclusion**</u> : f est continue sur IR.

21

1) $D_f=\{x\in]-\infty,-1[\,/\,x+2\neq0\}\cup\{x\in[-1,3]\}\cup\{x\in]3,+\infty[\,/\,4x-3\geq0\}$

$$=(]-\infty,-1[\setminus\{2\})\cup[-1,3]\cup]3,+\infty[=IR\setminus\{-2\}.$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{(a+2)x^2+x+2a}{x+2}=\frac{a+2-1+2a}{1}=3a+1$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+b=4+b=f(-1).$$

f est continue en -1 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 3a+1=4+b \Leftrightarrow 3a-b=3.$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+b=-6+b=f(3)$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\sqrt{4x-3}-x=0.$$

f est continue en 3 $\Leftrightarrow$ $-6+b=0 \Leftrightarrow b=6.$

Or $3a-b=3$ donc $3a=9$ ou encore $a=3$.

4) b = 6 alors f est continue en 3 or a = 1 donc f n'est pas continue en –1 .

Sur $\left]-\infty,-1\right[\setminus\{-2\}; f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{x+2}$ est la restriction d'une fonction rationnelle donc continue sur $\left]-\infty,-1\right[\setminus\{-2\}$.

Sur $\left]-1,3\right[$ f est la restriction d'un polynôme donc continue sur $\left]-1,3\right[$.

Sur $\left]3,+\infty\right[$ on a : $x\mapsto 4x-3$ est continue et positive donc $x\mapsto\sqrt{4x-3}$ est continue sur $\left]3,+\infty\right[$ et $x\mapsto -x$ continue sur $\left]3,+\infty\right[$ d' où f est continue sur $\left]3,+\infty\right[$.

Conclusion : f est continue sur $IR\setminus\{-2,-1\}$.

22 1) a) Si $x\in\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[; f(x)=(1+3m)x^2+3x$ pas de condition

donc $D_1=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[$.

$D_2=\left\{x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[\text{ tel que } 2x^2-5x+2\neq 0\right\}$

$D_3=\left\{x\in\left]2,+\infty\right[\text{ tel que } 4x^2-1\geq 0\right\}$.

* $2x^2-5x+2=0$.

$\Delta=25-16=9$ donc $x=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{5+3}{4}=2$

d'où : $D_2=\left]\dfrac{1}{2},2\right[$.

* $4x^2-1\geq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	-	0	+	

D'ou $D_3=\left[2,+\infty\right[$; par suite $D_f=D_1\cup D_2\cup D_3=IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

* $\lim\limits_{x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=(1+3m)\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}m+\dfrac{7}{4}$

$$\lim_{x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^-} f_m(x)=+\infty \text{ , car } \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(x^2-8\right)=\frac{1}{8}-8\langle 0 \text{ et } \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(2x^2-5x+2\right)=0^-$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ n'existe pas.

$$*\lim_{x\to2^-} f_m(x)=\lim_{2^-}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}=\lim_{2^-}\frac{x^2+2x+4}{2x-1}=\frac{12}{3}=4.$$

2) $\lim_{x\to2^+} f_m(x)=f(2)=\sqrt{15}-2m-1.$

f est continue en 2 si et seulement si $\lim_{2^-} f_m(x)=\lim_{2^+} f_m(x)=f(2)$.

$$\sqrt{15}-2m-1=4 \Leftrightarrow 2m=\sqrt{15}-5 \Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{15}-5}{2}$$

f est continue en 2 si et seulement si $m=\frac{\sqrt{15}-5}{2}$.

3) * si $x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$; $f(x)=(1+3m)x^2+3x$.

$x \mapsto (1+3m)x^2+3x$ est continue sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

car c'est la restriction d'une polynôme.

* si $x\in\left]\frac{1}{2},2\right[$; $f_m(x)=\frac{x^3-8}{2x^2-5x+2}$

$x \mapsto \frac{x^3-8}{2x^2-5x+2}$ est la restriction d'une fonction rationnelle avec un dénominateur non nul sur $\left]\frac{1}{2},2\right[$ donc elle est continue sur $\left]\frac{1}{2},2\right[$.

si $x\in]2,+\infty[$; $f_m(x)=\sqrt{4x^2-1}-mx-1$

$x\mapsto 4x^2-1\geq0$ et continue sur $]2,+\infty[$

donc la fonction $x\mapsto\sqrt{4x^2-1}$ est continue sur $]2,+\infty[$

$x \mapsto -mx-1$ est continue sur $]2,+\infty[$

donc $x \mapsto \sqrt{4x^2-1}-mx-1$ est continue sur $]2,+\infty[$

*Si $m=\dfrac{\sqrt{15}-5}{2}$ alors f_m continue en 2

et on a f_m continue sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},2\right[\cup]2,+\infty[$.

par suite $Df_m=IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}=$ Domaine de continuité de f

* Si $m\neq\dfrac{\sqrt{15}-5}{2}$ alors $Df_m=IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2},2\right\}$.

23

1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{1-\sqrt{x^3+1}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)}{1-\left(x^3+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)}{-1}=-2.$$

* Si $x\in[-1,0[$ alors $E(x)=-1$ donc $f(x)=-(x+2)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}-(x+2)=-2.$

* $f(0)=-2$ donc $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-2$ ainsi f est continue en 0.

2) Si $x\in[-1,0[$ alors $E(x)=-1$ donc $f(x)=-(x+2)$

Si $x\in[-2,-1[$ alors $E(x)=-2$ donc $f(x)=-2(x+2)$.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(x+2)E(x)$.

* $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}-2(x+2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}-(x+2)=-1$

donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ d'où f est discontinue en -1.

24

1) $x\in\left]\dfrac{1}{4},+\infty\right[\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}<4$ et $\dfrac{1}{x}>0$

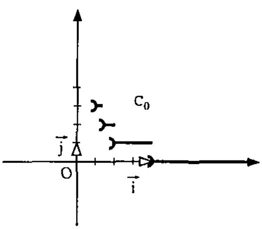
$0<\dfrac{1}{x}<1\Leftrightarrow x>1$ donc $E(\dfrac{1}{x})=0$

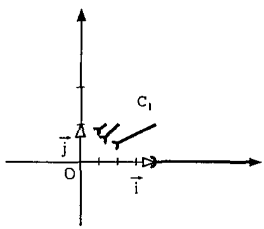
$1 \leq \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \langle x \leq 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 1$

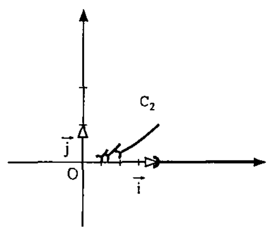
$2 \leq \frac{1}{x} \langle 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \langle x \leq \frac{1}{2}$ donc $E(\frac{1}{x}) = 2$

$3 \leq \frac{1}{x} \langle 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \langle x \leq \frac{1}{3}$ donc $E(\frac{1}{x}) = 3$. D'où:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\\ 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \\ 2 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \\ 3 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] \end{cases} ; f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\\ x \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \\ 2x \text{ si } x \in \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \\ 3x \text{ si } x \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] \end{cases} , f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\\ x^2 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \\ 2x^2 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \\ 3x^2 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] \end{cases}$$







2) * La restriction de f_0 sur $]1,+\infty[$ respectivement sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$; $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$

et $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ est une constante donc continue sur chaque intervalle:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_0(x) = 1$ donc f n'est pas continue en 1

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f_0(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f_0(x) = 1$ et

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} f_0(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} f_0(x)$.

<u>Conclusion</u> : f_0 est continue sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}\right\}$.

* La restriction de f_1 sur $]1,+\infty[$ respectivement sur : $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$; $\left]\frac{1}{2},1\right[$;

$\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ est une fonction linéaire donc continue sur chaque intervalle.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x)=0\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x)=1.$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f_1(x)=\frac{1}{2}\neq \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f_1(x)=1.$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} f_1(x)=\frac{2}{3}\neq \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} f_1(x)=1.$

* La restriction de f_2 sur $]1,+\infty[$ respectivement sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$; $\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$

et $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ est une fonction polynôme donc continue sur chaque intervalle.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x)=0\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f_2(x)\frac{1}{4}\neq \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f_2(x)=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} f_2(x)=\frac{2}{9}\neq \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-} f_2(x)=\frac{1}{3}.$

Donc f_0, f_1 et f_2 sont continue sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[-\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right\}.$

25 1) $n\leq x\leq n+1 \Rightarrow E(x)=n \Rightarrow f(x)=\frac{n}{x}.$

$n-1\leq x\langle n \Rightarrow E(x)=n-1 \Rightarrow f(x)=\frac{n-1}{x}.$

2) $x\mapsto E(x)$ continue sur $IR\setminus Z$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ continue sur IR^*

Alors f est continue sur $IR\setminus Z$

*Continuité de f en n avec $n\in Z^*$

$\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}\frac{n}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to n^-}\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n}$ et $f(n)=1.$

Donc f n'est pas continue en tout point $n\in Z^*$

<u>Conclusion</u> : f est continue sur $IR\setminus Z$.

26 a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\dfrac{\sqrt{1+x}^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$ alors f est prolongeable par continuité en 0 il suffit de choisir

g définie sur $[-1,+\infty[$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

27 a) On a : $\sqrt{9x^2}=3|x|$

$f(x)= 2x + \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}= 2x +\dfrac{3|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^+} 2x +\dfrac{3x}{x}$ (car $x \geq 0 \Rightarrow |x|=x$)

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 2x + 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 0^-} 2x+\dfrac{-3x}{x}$ (car $x \leq 0 \Rightarrow |x|=-x$)

$= \lim\limits_{x\to 0^-} 2x-3 = -3$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f$

d'ou f n'a pas de limite en 0 par suite f n'est pas continue en 0.

b) On ne peut pas prolonger f par continuité car $\lim\limits_{x\to 0} f$ n'existe pas.

Chapitre IV
Limites et comportement asymptotique

I) Limite infinie à l'infini :

- **Définitions** :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que

   Si $x>\beta$ alors $f(x)>A$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que

   Si $x>\beta$ alors $f(x)<-A$.

3) $\lim\limits_{-\infty} f(x)=-\infty$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que

   Si $x<-\beta$ alors $f(x)<-A$.

4) $\lim\limits_{-\infty} f(x)=+\infty$ signifie que $\forall A>0$ il existe $\beta>0$ tel que

   Si $x<-\beta$ alors $f(x)>A$.

- **Théorèmes** :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-a}=+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty}\sqrt{a-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-a)^n=+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty}(x-a)^n=\begin{cases}+\infty & \text{si n est pair}\\ -\infty & \text{si n est impair}\end{cases}$

II) Limites finies en $+\infty$ et $-\infty$:

- **Définitions :**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que $x>\beta$

   alors $|f(x)-L|<A$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que $x<-\beta$

   alors $|f(x)-L|<A$.

- **Théorème** : Si $\lim\limits_{\infty} f=\infty$ alors $\lim\limits_{\infty}\dfrac{1}{f}=0$

III) Limites infinies en un réel :

Définitions :

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que

   $0<|x-a|<\beta$ alors $f(x)>A$.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ signifie que $\forall A>0$, il existe $\beta>0$ tel que

Si $0 < |x - a| < \beta$ alors $f(x) < -A$.

3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que

Si $0 < x - a < \beta$ alors $f(x) > A$.

4) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que

Si $0 < a - x < \beta$ alors $f(x) > A$.

IV) Calculs de limites :

α un réel fini où $+\infty$ où $-\infty$; ℓ *et* ℓ' sont deux réels finies.

➤ **limite d'une somme de fonction.**

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

F.I : Forme indéterminée. Ce sont les cas où l'on ne peut pas conclure directement.

➤ **Limite d'un produit de fonctions :**

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$	$\ell\times\ell'$	∞	∞	F.I

Ce tableau a été simplifié pour rendre la mémorisation plus facile ; il faut naturellement appliquer la règle de signe au résultat.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -2$ alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\times g(x) = -\infty$

➤ **Limite d'un quotient de fonction :**

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	0	∞	∞	ℓ
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0	∞	$\ell = 0^+$ ou 0^-	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell<0$ $-\infty$ si $\ell>0$	F.I	F.I	∞ avec règle de signe	0

Formes indéterminées :

Formes indéterminées	Comment lever l'indétermination ? pistes
$+\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$	Mettre en facteur l'expression « prépondérante »
$0\times\infty$	Chercher une simplification ou se ramener à $\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{0}$	Chercher une simplification
Comportant des $\sqrt{\ }$	Multiplier et diviser par l'expression conjuguée ou factoriser.

➢ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ \text{ou} \\ x\to-\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ \text{ou} \\ x\to-\infty}} a_n x^n$$

➢ $g(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ \text{ou} \\ x\to-\infty}} g(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ \text{ou} \\ x\to-\infty}} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

➢ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell \\ f(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.

Théorèmes :

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \\ \text{et } f(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$

▪ **Les Asymptotes :**

Soit f une fonction et C sa représentation graphique dans un repère du plan.

➢ $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ où $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$.

On dit alors que Δ **: x = b est une asymptote verticale à C.**

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$. On dit alors que

Δ' **: y = a est une asymptote horizontale à C** au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

➢ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (on remplace ∞ par soit $+\infty$ où $-\infty$).

On cherche à écrire f sous la forme : $f(x) = ax + b + g(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, on déduit alors que :

Δ : $y = a x + b$ est une asymptote au voisinage de ∞.

■ **<u>Position $\underline{\zeta}$ et Δ :</u>**

➢ Δ une droite, $\Delta : y = a x + b$:

* Si $f(x) - (a x + b) \geq 0$; alors $\underline{\zeta}$ est au dessus de Δ.

* Si $f(x) - (a x + b) \leq 0$; alors $\underline{\zeta}$ est au dessous de Δ.

➢ Montrer que deux courbes $\underline{\zeta}$ et $\underline{\zeta}$' sont tangentes au point d'abscisse x_0 :

On détermine les équations des tangentes aux deux courbes au point commun d'abscisse x_0 et on constate qu'il s'agit de la même droite.

<u>Remarque</u> : En utilise souvent les théorèmes et les opérations sur les limites et rarement les définitives des limites.

ENONCES

1 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} -2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1+\frac{1}{x}}$

2 Dresser à chaque fois le tableau de signe du dénominateur, puis calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-3x}{-2x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+7}}{2-x}$

3 On donne $f : IR \to IR$; $x \mapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

a) Déterminer D_f.

b) Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

c) Déduire la limite de f(x) en $+\infty$.
Montrer que $\forall x \in D_f \,; 0 \le f(x) \le 1$.

4 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-x-1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-x-1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2}{x+1}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-2x^2-x+1}{3(x+1)^3}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x+2x^2}{-x+4}$.

5 Calculer les limites en $+\infty$ puis en $-\infty$, des fonction suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{9x^2-8x+6} - x$.

b) $g(x) = \sqrt{x^2-8x+6} - x$.

c) $h(x) = \sqrt{x^2+3} + x$.

d) $k(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$.

6 Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2x-6}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-4\sqrt{x}$.

7 Soit la fonction g définie par : $g(x) = x+1+\sqrt{x^2+x+2}$

1) Déterminer le domaine de définition de g.
2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-2x]$.

8 Soit la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-2x^2}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de h.
2) Peut-on parler de la limite de h en $+\infty$?
3) Calculer la limite de h en 0.

9 Soit la fonction f_m définie par : $f_m(x) = \sqrt{x^2+4} + mx$, ou $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer suivant m, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

10 Soit pour tout x de IR ; $f(x) = (2x+1)^2$ et $g(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{2}$.

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - g(x))$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(f(x) - g(x))$.

11 On considère deux fonctions f et g définies sur IR par :

$f(x)=|x|(1-x^2)$ et $g(x)=-x^2+x$. On pose $h(x)= \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

1) Déterminer le domaine de définition de h.
2) Déterminer la limite de h(x) quand x tend vers 0 respectivement vers $-\infty$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [h(x) + x]$.

12 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{x^2+2}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Déterminer la limite de f (x) lorsque x tend vers 0 respectivement $-\infty$.
3) Soit la fonction g définie par g (h)= f (1+ h).

a) Préciser le domaine de définition de g.
b) Déterminer la limite de f (1+ h) lorsque h tend vers 0.

13 Soit la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{(m^2-1)x^2+2m^2\ x-2m}{x-1}$

Discuter suivant m, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)$

14 1) soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}{x-4}$ si $x \neq 4$ et $f(4) = m ; m \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et la limite de f en 4

b) Etudier la continuité de f en 4

2) $\begin{cases} g(x) = \dfrac{ax+4}{x^2-1} & \text{si } x<1 \\ g(x) = \dfrac{bx^2+cx+3}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Déterminer a, b, c pour que g admette une limite finie en 1.
b) Discuter suivant a, b et c $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

15 1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-8x+7}{\sqrt{x}-1}$.

2) soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}$

a) Montrer que la fonction f (x) est définie et positive et continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Etudier la limite de f (x) quand x tend vers $+\infty$ respectivement vers $-\infty$.

2) On considère la fonction définie par $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

a) Montrer que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$

b) rechercher $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (g(x)-x)$

16 Soient a et b deux réels et f l'application de IR vers IR définies par :
$f(x) = a\,x + b - \sqrt{x^2+1}$.

Déterminer a et b pour que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-2x] = 2$.

17 Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}-1} \; ; \; \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

18 Soit $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+\beta}{|x^2-\delta|}$.

Calculer les nombre réels α, β et δ, sachant que :

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

19

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-8x+7}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 13x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la limite de f quand x tend vers 1.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

20 Soit f définie sur IR, par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} + 4 - x & \text{si } x \ge 1 \\ f(x) = \dfrac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x-1} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ f(x) = x^2\sqrt{-x} + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec m un paramètre réel donné.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) b) Etudier suivant les valeurs de m, la limite à gauche de f en 1.

c) pour quelle valeur de m, on a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

21 Vrai - Faux

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes avec justification .

1) une fonction rationnelle a toujours deux asymptotes

* Pour questions 2) : 3) et 4 on donne le tableau de variations d'une fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

2) l'équation f(x) =0 admet deux solutions
3) f admet une asymptote oblique
4) f admet deux asymptotes horizontales

5) $\Delta : y = 2x + 3$ est une asymptote oblique de la fonction $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{x}{x+1}$

au voisinage de $+\infty$.

22 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{|x - 3|}$ et($\mathcal{C}$) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer D_f son domaine de définition

2) a) déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) En déduire les asymptotes de ($\mathcal{C}$)

23 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à ($\mathcal{C}$)

3) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

b) En déduire que la droite $\Delta : y = x - 3$ et une asymptote à ($\mathcal{C}$)

24 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 4}$ et ($\mathcal{C}$) désigne sa courbe.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

3) En déduire que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote dont on déterminera l'équation.

25 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$

1) Déterminer D_f son domaine de définition.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f, f(x) = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}}$

3) a) Montrer que la droite Δ: $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ

26 La fonction $f: x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$

1) Vérifier que f est définie sur $D =]-\infty,-] \cup [1,+\infty[$

2) Montrer que pour tout $x \in D$: $f(x).\ f(-x) = -1$ (1)

3) a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) En déduire de (1) celle en $-\infty$. Interpréter géométriquement.

4) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

27 On considère une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ est donnée ci dessous dans un repère orthogonal et la droite d'équation $y = x$

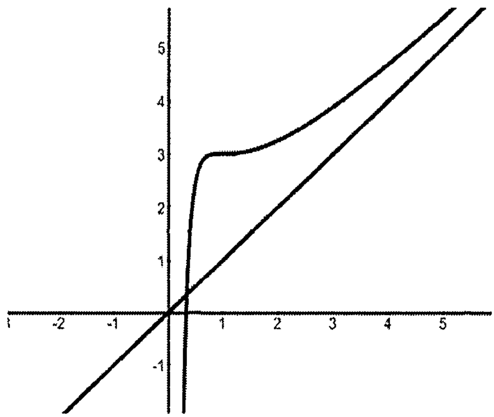
A) Exploitation du graphique :

1) On admet que l'axe des ordonnées et D sont asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$

donner alors $\lim\limits_{x\to 0} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f$

2) Le point $K\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ et le point commun de $\mathcal{C}$ et D.

D'après le graphique , quelle est en fonction de x la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à D ?



3) D'après le graphique, quel est le sens de variations de f.

B) justification des observations graphiques :

La fonction f est définie par $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f$,puis justifier que la droite D:y = x est asymptote à $(\mathcal{C})$

b) En étudiant le signe de $f(x) - x$. retrouver les résultats de la question A)2)

c) Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de $(\mathcal{C})$ et D.

2) a) Ecrire f sous forme d'un quotient.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f$ et en déduire l'existence de la seconde asymptote.

CORRIGÉS

1

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} -2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} -2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = -2.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 1 + \dfrac{1}{x} = +\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}} = +\infty$.

2

- $\lim\limits_{x\to 0} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x} = -\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Donc il est nécessaire d'étudier la limite à droite et à gauche en 2.

On a : $\lim\limits_{x\to 2^-} x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} x - 1 = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-2} = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 1 = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-2} = +\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-2}$ donc la limite en 2 n'existe pas.

- $\lim\limits_{x\to -1} x - 1 = -2$ et $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)^2 = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{(x+1)^2} = -\infty$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-2)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a :

❖ $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)(x-1)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2+1=2$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)(x-1)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x^2+1=2$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=-\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$. Donc la limite en 1 n'existe pas.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a :

❖ $\lim\limits_{x\to 0^+} 0^+ -2x^2+3x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}1-3x=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-3x}{-2x^2+3x}=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 0^-}-2x^2+3x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}1-3x=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-3x}{-2x^2+3x}=-\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-3x}{-2x^2+3x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-3x}{-2x^2+3x}$. Donc la limite en 0 n'existe pas.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

❖ $\lim\limits_{x\to 2^-}2-x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x+7}=3$ d'où $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x+7}}{2-x}=+\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 2^+}2-x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+7}=3$ d'où $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+7}}{2-x}=-\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x+7}}{2-x}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+7}}{2-x}$. Donc la limite en 2 n'existe pas.

3 a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $x+1\geq 0$ et $x\geq 0\}=\mathbb{R}_+$

b) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$; par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

On a : pour tout $x\in D_f$; $x\geq 0$ donc $\sqrt{x+1}\geq 1$.

Donc $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1$ et par suite $0\leq\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leq 1$.

Finalement : $0\leq f(x)\leq 1$.

4

• En $-\infty$ ou $+\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

• En $-\infty$ ou $+\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite de son termes de plus haut. degré du numérateur divisé par le terme de plus haut degré du dénominateur.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1.$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty.$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x^2-x+1}{3(x+1)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3x^3}=\dfrac{1}{3}.$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2x^2}{-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty.$

5

a) $\lim\limits_{-\infty}9x^2-8x+6=\lim\limits_{-\infty}9x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

donc d'après le théorème on a :

$\lim\limits_{-\infty}\sqrt{9x^2-8x+6}=+\infty$, comme $\lim\limits_{-\infty}-x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{-\infty}f(x)=+\infty$

Il n'y a pas d'indétermination dans ce cas il ne faut pas transformer l'expression.

Par contre en $+\infty$ il y a une indétermination du type $+\infty - \infty$;

factorisons $f(x) = \sqrt{x^2(9 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2})} - x = |x|\left(\sqrt{9 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}}\right) - x$

lorsque x tend vers $+\infty$; x est positif donc $|x| = x$

D'où $f(x) = x\left(\sqrt{9 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1\right)$

On a $\lim\limits_{+\infty}\left(\sqrt{9 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1\right) = 2$ donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

b) comme l'exemple a) la limite de g (x) en $-\infty$ ne pose pas de problème on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 8x + 6} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

Pour la limite en $+\infty$, essayons de procéder comme dans l'exemple précédent.

En factorisant on obtient : $g(x) = x\left(\sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1\right)$ le terme entre parenthèse a pour limite 0 on a donc la forme indéterminée du type $\infty \times 0$.

Cette méthode ne permet pas de conclure dans ce cas essayons alors la <u>$2^{ème}$ Méthode</u> : multiplions et divisons g (x) par $\sqrt{x^2 - 8x + 6} + x$. On a :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 8x + 6} - x)(\sqrt{x^2 - 8x + 6} + x)}{(\sqrt{x^2 - 8x + 6} + x)}$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 6} + x} = \frac{-8x + 6}{\sqrt{x^2 - 8x + 6} + x}.$$

l'indétermination n'est pas toujours levée : numérateur et dénominateur tendent vers l'infini dans un tel cas on essais à nouveau la factorisation.

$$\text{On a : } g(x) = \frac{x\left(-8 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1\right)} = \frac{-8 + \frac{6}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}}}$$

Le numérateur tend vers -8 ; le dénominateur vers 2 d'où $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -4$.

c) $\lim\limits_{+\infty} x^2+3=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{+\infty} h(x)=+\infty$.

Par contre en $-\infty$ il y a une indétermination de la forme $+\infty -\infty$

on a $h(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+3}+x)(\sqrt{x^2+3}-x)}{\sqrt{x^2+3}-x}=\dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}$

or $\lim\limits_{-\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} -x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{-\infty} h(x)=0$.

d) En $+\infty$, k (x) se présente sous forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On a : $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}+x}{x}=\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x}$ or $x>0$, soit $|x|=x$

donc $k(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$ d'où $\lim\limits_{+\infty} k(x)=\lim\limits_{+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1=2$.

* en $-\infty$, le numérateur se présente sous la forme indéterminée $+\infty -\infty$

$k(x)=\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x}$ ($|x|=-x$ car $x<0$

d'où $k(x)=\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=0$

6 a) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2x-6}$, au voisinage de 3, f (x) se présente sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

On peut écrire $f(x)=\dfrac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})}$

$f(x)=\dfrac{-(x-3)}{2(x-3)(2+\sqrt{x+1})}=\dfrac{-1}{2(2+\sqrt{x+1})}$

Lorsque x tend vers3, cette expression a pour limite $\dfrac{-1}{8}$.

b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ au voisinage de 23, g (x) se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut écrire :

$$g(x)=\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

d'où $\lim\limits_{2} g(x)=\lim\limits_{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$.

c) • Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$;

$D_f=\{x \in \mathbb{R};\ \text{tel que } x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x}-1 \neq 0\}$.

$\quad = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 1} x^2-1=0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}-1=0$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ est une forme indéterminée $\ll \frac{0}{0} \gg$.

Pour tout $x \in D_f$;

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=(x+1)(\sqrt{x}+1)$$

Par suite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=4$

d) • $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -4\sqrt{x}=-\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-4\sqrt{x}$ est une forme indterminée $\ll +\infty\ -\infty \gg$.

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-4\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty} x(2-\frac{4\sqrt{x}}{x})=\lim_{x\to+\infty} x(2-\ 4.\frac{1}{\sqrt{x}})=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$.

7

1) $D_g=\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2+x+2 \geq 0\}$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}; x^2+x+2 > 0$ donc $D_g=\mathbb{R}$.

2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+2}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ est une forme indéterminée $\ll +\infty\ -\infty \gg$.

$$g(x)=x+1+\sqrt{x^2+x+2}=\frac{(x+1)^2-(x^2+x+2)}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{x-1}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{-\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}.$$ Or $x \to -\infty$ donc $|x|=-x$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} .\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}.$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=2.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1+\sqrt{x^2+x+2})=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$

  et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1+\sqrt{x^2+x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x})$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x})$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}})=2.$ car $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty} [-x+1+\sqrt{x^2+x+2}]=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-x)^2-x^2-x-2}{1-x-\sqrt{x^2+x+2}}$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1-3x}{1-x-\sqrt{x^2+x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(-\frac{1}{x}-3)}{1-x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$ or $|x|=x$ car $x\to+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{x}-3}{\frac{1}{x}-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\dfrac{3}{2}$

8 1) $D_h=\{x\in \mathbb{R}$ tels que $x^2+1\geq 0$ et $1-2x^2\geq 0$ et $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-2x^2}\neq 0\}$

* pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $x^2+1>0$.

* $1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

* $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-2x^2}$ équivaut à $1+x^2=1-2x^2$ où encore $3x^2=0$

d'où x=0. Donc $D_h=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]-\{0\}$.

2) On ne peut pas parler de limite de h en $+\infty$ puisque h n'est pas définie en $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-2x^2}=0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ est une forme indéterminée $\ll\frac{0}{0}\gg$.

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-2x^2})}{x^2+1-1+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-2x^2}}{3}=\frac{2}{3} \text{ car } \lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-2x^2}=2.$$

9 $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}+mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+mx)$ or $|x|=-x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+m)$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+m=m-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

<u>1^{er} cas</u> : m-1 >0ou encore m>1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=(m-1)\times(-\infty)=-\infty$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : m-1< 0 ou encore m<1.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=(m-1)\times(-\infty)=+\infty$.

<u>$3^{ème}$ cas</u> : m-1= 0 équivaut à m = 1.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ est une forme indéterminée $\ll 0\times\infty\gg$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}+x)(\sqrt{x^2+4}-x)}{\sqrt{x^2+4}-x}$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}=0$ car ($\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=+\infty$.)

10 1) * $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})}\dfrac{(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{2}}$ est une forme indéterminée

de type $\dfrac{0}{0}$ on utilise la méthode de la multiplication par la quantité conjuguée :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(2x+1)^2(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2}}=\frac{(2x+1)^2(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2})}{4x^2-1}$$

par suite $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})}\dfrac{(2x+1)^2(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2}}{4x^2-1}$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})}\frac{(2x+1)^2(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2})}{(2x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})}\frac{(2x+1)(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2})}{(2x-1)}=\frac{0}{-2}=0$$

• Lorsque $x\to\dfrac{1}{2}$ et en utilisant le calcul déjà fait. Il y a lieu de distinguer la limite $\left(\dfrac{1}{2}\right)^+$ de la limite $\left(\dfrac{1}{2}\right)^-$.

$\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\dfrac{1}{2x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{1}{2x-1}=-\infty$

comme d'autre part: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x+1)(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

on obtient: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

<u>Conclusion:</u>

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ donc $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'admet pas de limite en $\dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme indéterminée de type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

on a: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{(2x)^2(1+\frac{1}{2x})^2}{|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2x}}$ or si $x\to+\infty;|x|=x$. d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2(1+\frac{1}{2x})^2}{2x(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(1+\frac{1}{2x})^2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2x}}=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}2x(1+\frac{1}{2}x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2x}=1$

2) * $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)^2-\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{2}$

$$=\lim_{x\to-\infty}4x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}-\frac{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}{4x^2}+\frac{\sqrt{2}}{4x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}4x^2=+\infty.$$

* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)-\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}g(x)=4.$

11 1) $h(x)=\dfrac{|x|(1-x^2)}{-x^2+x}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R};\ \text{tel que } -x^2+x\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|(1-x)(1+x)}{x(1-x)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(1-x)(1+x)}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}x+1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x(1-x)(1+x)}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}-(1+x)=-1$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)$ par suite la limite en 0 de h(x) n'existe pas.

* Quand $x\to-\infty$, on a : $|x|=-x$ d'où:

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x(1-x)(1+x)}{x(1+x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}-(1+x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-(1+x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}-1=-1.$

12 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\ \text{tel que } 1-x\geq 0\}$; $1-x\geq 0\Leftrightarrow 1\geq x$ d'où $D_f=]-\infty,1]$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{1-x}}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)}}{x^2(1+\dfrac{2}{x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}{x^2(1+\dfrac{2}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=0.$

3) $g(h)=f(1+h)$.

a) $h\in D_g \Leftrightarrow 1+h\in D_f \Leftrightarrow 1+h\le 1 \Leftrightarrow h\le 0$.d'où $D_g=\mathbb{R}_-$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(1+h)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(h+1)(\sqrt{1-(h+1)}}{(h+1)^2+2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(h+1)\sqrt{-h}}{h^2+2h+3}=0.$

13

• $f_m(x)=\dfrac{(m^2-1)x^2+2m^2x-2m}{x-1}$ cherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$

<u>1^{er} cas :</u> $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=1$ où $m=-1$.

* $m=1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2=2.$

* $m=-1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2.$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$ et $m\neq -1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(m^2-1)x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(m^2-1)x.$

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
m^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

* si $m^2-1>0 \Leftrightarrow m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$

* Si $m^2-1<0 \Leftrightarrow m\in\left]-1,1\right[$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=+\infty$.

• cherchons la $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(m^2-1)x^2+2m^2x-2m}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}[(m^2-1)x^2+2m^2x-2m)]=3m^2-2m-1.$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3m^2-2m-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>1^er cas</u> : $m \in]-\infty,-\frac{1}{3} \cup [1,+\infty[; 3m^2-2m-1>0$

Il y a lieu distinguer la limite en 1^+ de la limite en 1^-

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

on obtient donc: $\lim\limits_{x\to 1^+} f_m(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_m(x) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)$, n'existe pas.

<u>2^ème cas :</u> $m \in]-\frac{1}{3},1[$; $3m^2-2m-1<0$,

on obtient donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f_m(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

Donc la $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)$,n'existe pas.

<u>3^ème cas :</u>

* $m = 1$

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

* $m = -\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to 1} f_{-\frac{1}{3}}(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{2}{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-8}{9}(x-1)(x+\frac{3}{4})}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{-8}{9}(x+\frac{3}{4}) = -\frac{14}{9}.$$

14 1) * $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1}}{x-4}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-7}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-7-2x-1}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-8}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left[\frac{2}{x}+1\right]}{x\left(\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$* \lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} \frac{x+2}{(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{2x+1})} = \frac{6}{3+3} = 1$$

b) f est continue en 4 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to4} f(x)=f(4)=m \Leftrightarrow m=1$

si m=1 alors f est continue en 4.

si $m\neq1$ alors f n'est pas continue en 4.

2) a) g admet une limite finie en 1 si et seulement si :

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1} g(x)$$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{bx^2+cx+3}{x-1}$ finie lorsque $b+c+3=0$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{ax+4}{x^2-1}$ finie lorsque $a+4=0$.

D'où $a=-4$ et $b+c=-3$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{-4x+4}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-4(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-4}{x+1} = -2$$

$b+c=-3 \Leftrightarrow c=-3-b$.

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{bx^2-(3+b)+3}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{b(x-1)(x-\frac{3}{b})}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} (bx-3) = b-3$.

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) =. \lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ signifie que $b-3=-2$

Signifie que $b=1$ d'où $c=-4$.

<u>Conclusion</u> : la fonction g admet une limite finie en 1 pour :
$a=-4$; $b=1$ et $c=-4$.

b) * $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{bx^2+cx+3}{x-1}$

1^{er} cas : $b\neq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{bx^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} bx$

Si $b>0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} bx=+\infty$.

Si $b<0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=bx=-\infty$.

2ème cas : $b=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{cx+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{cx}{x}=c$;

lorsque $c\neq 0$. Si $c=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a}{x}=0$. si $a\neq 0$

et si $a=0$ alors $\lim\limits_{-\infty} g=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$

conclusion: $\forall a\in\mathbb{R}\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

15 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x2-8x+7}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{1}\frac{(x-1)(x-7)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{1}\frac{(x-1)(x-7)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim\limits_{1}(x-7)(\sqrt{x}+1)=-12$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2+x+1\geq 0$ et $x+1+\sqrt{x^2+x+1}\neq 0\}$.

* $x^2+x+1=0$

$\Delta=1-4=-3<0$ donc $x^2+x+1>0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

* $\sqrt{x^2+x+1}=-x-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-1\geq 0\\ x^2+x+1=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\geq x\\ x=0\end{cases}$ impossible.

donc $\sqrt{x^2+x+1}\neq -x-1$ d'où $D_f=\mathbb{R}$.

* $x\mapsto x^2+x+1$ polynôme donc continue$\mathbb{R}$.

comme $x^2+x+1>0$ d'où $\sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto x+1$ continue sur $\mathbb{R}$ d'où $U: x\mapsto x+1+\sqrt{x^2+x+1}$ continue sur $\mathbb{R}$ comme $U(x)\neq 0$ d'où $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

* $x+1+\sqrt{x^2+x+1}>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}>-x-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-x-1		+	0	−	

Si $x \in]-\infty,-1]$ alors $x^2+x+1>x^2+2x+1$ donc $x<0$ ainsi

$S_1=\mathbb{R}_-^* \cap]-\infty,-1]=]-\infty,-1]$

Si $x \in [-1,+\infty[$ alors $\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{\in \mathbb{R}_+^*} > \underbrace{-x-1}_{\in \mathbb{R}_-}$

d'où $S_2=[-1,+\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$,on a: $x+1+\sqrt{x^2+x+1}>0$.

donc $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x)>0$

b) * $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x+1+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1+|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$; si $x \to +\infty$ alors $|x|=x$.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{2}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}(x+1-\sqrt{x^2+x+1})}{(x+1)^2-(x^2+x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}\ (x+1-\sqrt{x^2+x+1})$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(x+1-\sqrt{x^2+x+1})}{x}$; si $x \to -\infty$; $|x|=-x$.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(x+1-\sqrt{x^2+x+1})}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}(x+1-\sqrt{x^2+x+1}) = =(-2).(-\infty)=+\infty$$

2) a) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \to +\infty \text{ alors } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=1 \\ \text{Si } x \to -\infty \text{ alors } \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=1.$$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} [g(x)-x] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} x[\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1]$

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\sqrt{\frac{x}{x-2}}-1\right]\left[\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right]}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{x}{x-2}-1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(x-2)\left[\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x(1-\frac{2}{x})\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [g(x)-x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1\right)} = 1$$

d'où $\lim\limits_{|x|\to+\infty} [g(x)-x]=1.$

16

$$\left\{ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=2 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} [(f(x)-2x]=2 \right.$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}a+\frac{b}{x}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\frac{b}{x}-|x|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$ or $|x|=-x$ car $x\to-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(a+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{b}{x})=a+1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{b}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ si et seulement si $a+1=2$ équivaut à: $\boxed{a=1}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+b-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}[b-(\sqrt{x^2+1}+x)]$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}[b-\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}]=\lim\limits_{x\to-\infty}[b-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}]$

(car $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$ par suite $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$].

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=2$ donc $b=2$.

17

- On a : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ si $x\to-\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{x^2}.\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x^3-1}}$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x+1}{x^3-1}}=-1$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=\frac{0}{4}=0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=-\infty$$

- $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\sqrt{x+1}+\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$=\sqrt{2}+\lim_{x\to1^+}\left[\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}.\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=\sqrt{2}+\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}\right]$$

$$=\sqrt{2}\ \text{car}\ (\lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0\ \text{et}\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{x}+1=2\ \text{d'où}\ \lim_{x\to1^+}\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}\right]=0)$$

18

- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-2$ équivaut à $\dfrac{\beta}{|-\delta|}=-2.$

- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$ équivaut à $\begin{cases}4\alpha+\beta<0\\ |4-\delta|=0\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ équivaut à $\alpha=1$; $\delta=4$ et $\beta=-8$

Donc $f(x)=\dfrac{x^2-8}{|x^2-4|}$.

19

1) * $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-8x+7}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty^+}\dfrac{(x-1)(x-7)}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-7)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1^+}(x-7)(\sqrt{x}+1)=-12.$$

* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x^2-13x=-12=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-12.$

2) * $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$; comme $x<0$ alors $x=-\sqrt{-x}.\sqrt{-x}$

d'où $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{-x}\sqrt{\frac{(-x)(x-1)}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{-x}.\sqrt{1-x}=0.$

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2-13x=0\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0.$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-8x+7}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-7)(\sqrt{x}+1)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=1$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

20 * $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+4-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}+4-x)(\sqrt{x^2-1}-4+x)}{\sqrt{x^2-1}-4+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-(4-x)^2}{\sqrt{x^2-1}-4+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-17}{\sqrt{x^2(-1-\frac{1}{x^2})}-4+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(8-\frac{17}{x})}{x\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{17}{x}}{\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}+1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 8-\frac{17}{x}=8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}+1=2$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{8}{2}=4.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\sqrt{-x}+2x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\sqrt{-x}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

or $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$

2) a) $\lim\limits_{x\to1^-}(m+1)x^3-3x+m^2=m-2+m^2$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0^-$

On étudie alors le signe m^2+m-2.

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
m^2+m-2		+	0	−	0	+	

<u>1^{er} cas :</u> $m\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty.$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $m \in]-2,1[$ alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$.

<u>$3^{ème}$ cas :</u> m=1 alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x^3-3x+1}{x-1}$.

On remarque que 1 est une solution de $2x^3 - 3x + 1$

D'où $2x^3-3x+1=(x-1)(2x^2+ax+b)=2x^3+(a-2)x^2+(b-a)x-b$

Par identification on retrouve a = 2 et b = -1.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(2x^2+2x-1)}{x-1}=2x^2+2x-1=3.$

<u>$4^{ème}$ cas :</u> m=-2 alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^3-3x+4}{x-1}$.

La même méthode que le $3^{ème}$ cas, on trouve :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2-x-4=-6.$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)= \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1}+4-x=3= \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ si et seulement si m = 1.

21 1) Faux : Contre exemple : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est définie sur IR et n'a qu'une seule asymptote $y = 0$.

2) Vrai : sur $]-\infty,0]$, f est décroissante et change de signe donc $f(x) = 0$ admet une solution sur $]-\infty,0]$ et de même sur $[0,+\infty[$

donc $f(x) = 0$ admet 2 solutions.

3) Faux : les limites à l'infinie sont finies.

4) Vrai : $\lim\limits_{-\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)=5$ par conséquent y = 2 et y = 5 sont deux asymptote horizontales.

5) Faux : Δ n'est pas une asymptote oblique .

car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+3) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{x+1}=1\neq 0$

22 1) $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ d'où $Df = IR - \{3\}$.

2) Ecrivons f sans valeurs absolue.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-3} & \text{si } x\rangle 3 \\[2ex] \dfrac{2x-1}{-x+3} & \text{si } x\langle 3 \end{cases}$$

a) * $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x-1}{x-3} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$

* $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2x-1}{-x+3} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}} = -2$

* $\lim\limits_{3^+} f = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1}{x-3} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} 2x-1=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+ \end{cases}$

* $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 3^-} 2x-1=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0^- \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{3^-} f = -\infty$

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2$ alors $y=2$ est une asymptote en $+\infty$ à ζ.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -2$ alors $y=-2$ est asymptote en $-\infty$ à (C).

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{3^+} f = +\infty \\ \lim\limits_{3^-} f = -\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=3$ est une asymtote à (ζ)

23

1) f est définie pour $x \neq 1$ alors $Df = IR - \{1\}$

2) * $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

* $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

* $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4x+4}{x-1} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{1^+} x^2-4x+4=1 \\ \lim\limits_{1^+} x-1=0^+ \end{cases}$

* $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-4x+4}{x-1} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{1^-} x^2-4x+4=1 \\ \lim\limits_{1^-} x-1=0^- \end{cases}$

b) $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$ alors $x = 1$ est asymptote verticale pour (ζ)

3) a) $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ en réduisons au même dénominateur on obtient

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1} \text{ or } f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$$

par identification on obtient $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-4 \\ -b+c=4 \end{cases}$

ainsi a = 1 , b = -3 et c = 1

b) On a $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

donc $\Delta : y=x-3$ est une asymptote à (ξ) en $+\infty$ et en $-\infty$.

24 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x+4}$

1) f est définie lorsque $x^2 + 2x + 4 \neq 0$

$\Delta=-12<0$ alors $x^2+2x+4>0$ ainsi $Df=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$

$\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$

3) $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=1$ on déduit alors que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$

25 1) f est définie lorsque $x^2-3x+1\geq 0$

$\Delta=5>0$ alors $x'=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x''=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
x^2-3x+1		+	0	-	0	+	

$Df = \left]-\infty,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$

2) $\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4}}=\sqrt{x^2-3x+1}=f(x)$

3) a) $\lim\limits_{+\infty}\left[f(x)-(x-\frac{3}{2})\right]=\lim\limits_{+\infty}\left[\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2})\right]$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\left[\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2})\right]\left[\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x+\frac{1}{3})\right]}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2})}$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}^{\,2}-(x-\frac{3}{2})^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+(x-\frac{3}{2})}=\lim_{+\infty}\frac{(x-\cancel{\frac{3}{2}})^2-\frac{5}{4}-(x-\cancel{\frac{3}{2}})^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+(x-\frac{3}{2})}$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+(x-\frac{3}{2})}=0$$

car $\lim\limits_{+\infty}x^2-3x+1=\lim\limits_{+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\ x-\frac{3}{2}=+\infty$ par conséquent

$y=x-\frac{3}{2}$ est une asymptote à (ζ) en $+\infty$.

b) $f(x)-(x-\frac{3}{2})=\dfrac{\frac{-5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-\frac{3}{2}}$

- Si $x\in[x'',+\infty[$ alors $x\geq\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x-\frac{3}{2}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}>0$

  et $\sqrt{x^2-3x+1}>0$ d'où $f(x)-(x-\frac{3}{2})<0$

  donc ζ_f est au dessous de Δ

- Si $x\in]-\infty,x']$ alors $x\leq\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x-\frac{3}{2}\ -\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x-\frac{3}{2}<0\Rightarrow -(x-\frac{3}{2})>0$

  d'où $f(x)-(x-\frac{3}{2})=\sqrt{x^2-3+1}-(x-\frac{3}{2})>0$ donc ζ_f est au dessus de Δ

26 $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

1) f est définie lorsque $x^2-1\geq0\ \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ donc f est définie sur D.

2) $f(x)\,.\,f(-x)=(x+\sqrt{x^2-1})(-x+\sqrt{(-x)^2-1})=(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)$

$$=\sqrt{x^2-1}-x^2=x^2-1-x^2=-1.$$

3) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} x^2 - 1 = +\infty$

$= +\infty$

b) On a : f(x).f(-x)=-1 alors $f(-x) = \dfrac{-1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{f(x)} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

par conséquent y = 0 est une asymptote en $-\infty$ par $\mathcal{C}_f$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2-1} - 2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2-1}$ or $f(-x) = -x + \sqrt{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

donc Δ: y =2x est une asymptote oblique en $+\infty$ pour $\mathcal{C}_f$.

27

A)1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$

2) par lecture graphique, nous avons pour $x \in]0, \frac{1}{3}[$, D est au dessus de ($\mathcal{C}$)

et pour $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$ D, est au dessous de ($\mathcal{C}$)

3) D'après le graphique, nous déduisons que f est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$

B) 1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\to} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}) = 0$

Donc la droite D : y = x est une asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

b) $f(x) - x = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3x-1}{x^2}$ il s'ensuit que f(x)-x > 0 pour $x > \dfrac{1}{3}$

et que f(x)-x < 0 pour $0 < x < \dfrac{1}{3}$

par suite : D est au dessus de $\mathcal{C}$ si $x \in]0, \frac{1}{3}[$

D est au dessous de $\mathcal{C}$ si $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$

c) $K \in \mathcal{C} \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ f(x) = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \dfrac{3x - 1}{x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ donc $K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2) a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^3 + 3x - 1}{x^2}$

b) Nous avons $\lim\limits_{x \to 0} x^3 + 3x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{x^2} = -\infty$

par suite la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

Chapitre V
Nombre dérivé

- **Nombre dérivé en un point :**

Soit f définie sur un intervalle I contenant x_0.

f est dérivable en a et f ' (a) est appelé le nombre dérivé de f en a ;

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ et $\ell \in IR$; on note : $f'(a) = \ell$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$ et $\ell \in IR$.

- **La vitesse :** soit $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t.

La vitesse instantané à l'instant t_0 du mobile est égale à

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h} = d'(t_0)$

- **Approximation affine d'une fonction**

• Théorème : soit f une fonction dérivable en a

Une valeur approchée de $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)\times h$

On dit alors que :

• $f(a)+f'(a)\times h$ est une approximation affine de f en a

• Exemple: Pour trouver une approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h voisin de 0.

* On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} = f'(1)$$

donc l'approximation affine de $\sqrt{1+h}$ au voisin de 0 est

$f'(1)\,h + f(1) = \dfrac{1}{2}h + 1$

- **Dérivabilité à droite- dérivabilité à gauche :**

f définie sur $]a-h\,,\,a]$ f est dérivable à gauche en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$; $\ell \in IR$ et on note $\ell = f_g'(a)$.	f définie sur $[a, a+h[$ f est dérivable à droite en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$; $\ell \in IR$ et on note $\ell = f_d'(a)$.

$$\boxed{f \text{ définie sur}]a - h\,,\, a + h[\;;\; f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f'_d(a) = f'_g(a)}$$

- **dérivabilité et continuité :**
  - **théorème** :Si f est dérivable en a alors f est continuée en a.

Remarque : Si f est continue en a, alors on ne peut rien conclure pour la dérivabilité en a.

- **Interprétation géométrique du** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$:

➢ 1er cas : **f est dérivable en a**:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell = f'(a)$$

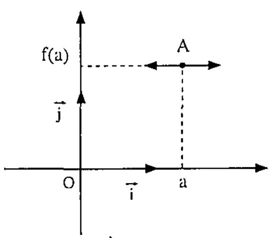
On dit que ζ la courbe de f admet une tangente

$\Delta : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

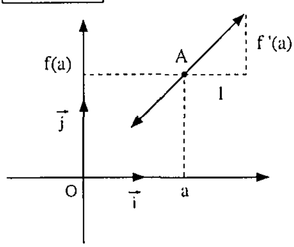
au point A (a, f (a)) de coefficient directeur f' (a) et de vecteur directeur :

$\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

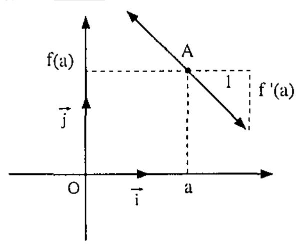
Si $f'(a) = 0$



Si $f'(a) > 0$



Si $f'(a) < 0$

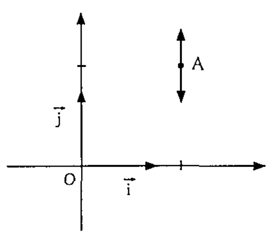


2ème cas : **f n'est pas dérivable en a** :

➢ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $-\infty$.

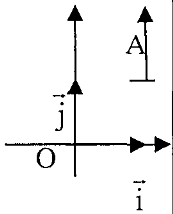
On dit que ζ la courbe de f,

admet une tangente verticale



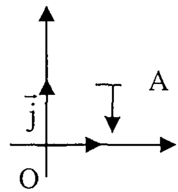
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ figure

ζ admet en A, une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs.



$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ figure

ζ admet en A, une demi tangente verticale dirigée vers les y négatifs.



➢ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \neq \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

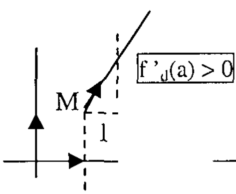
avec des limites finies.

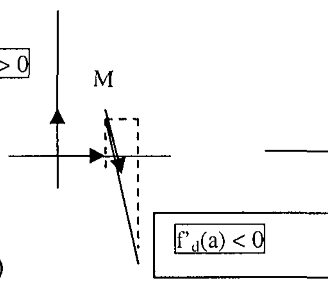
$\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$

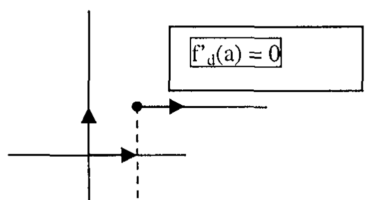
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet une demi tangente au point M (a,f(a)) d'équation :

$y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ et $x \geq a$ de vecteur directeur $\vec{u}_d \begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$

$\boxed{*f'_d(a) > 0}$ $\boxed{*\ f'_d(a) < 0}$ $\boxed{*\ f'_d(a) = 0}$





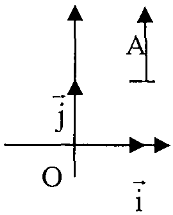
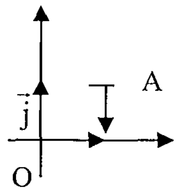


a droite du point M

$* \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$

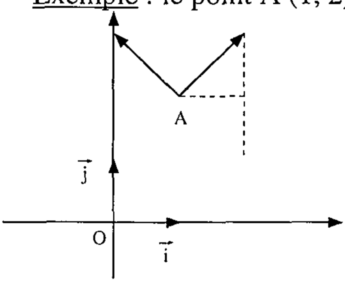
$\Leftrightarrow$ ζ_f admet une demi tangente au point M(a,f(a)) d'équation

$y = f'_g(a)\ (x- a) + f(a)$ et $x \leq a$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_g} \begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(a) \end{pmatrix}$

$\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ζ admet en A, une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs  	$\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ζ admet en A, une demi tangente verticale dirigée vers les y négatifs. 

- **Point anguleux :**

Si les deux demi- tangentes en A ne sont pas portées par la même droite,
On dit que le point A est un point anguleux.
<u>Exemple</u> : le point A (1, 2) et $f_d'(1) = 1$ et $f_g'(1) = -1$



■ **Remarque :**

- f est dérivable en a et la tangente en A (a, f (a)), a pour équation :
  $T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Soit $\Delta : y = mx + p$ (avec m et p deux réels donnés)
Pour déterminer le point A (x_0, y_0) de la courbe tel que Δ soit tangente.
Il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x_0) = m \\ y_0 = f(x_0) = m x_0 + p \end{cases}$$

Pour determiner la position d'une tangente et d'une droite Δ : $y = mx + p$:

* $\boxed{T \mathbin{//} \Delta \Leftrightarrow f'(a) = m}$

$\boxed{T \perp \Delta \Leftrightarrow f'(a) \times m = -1}$

■ **Dérivés de quelques fonctions usuelles .**

fonction f	f '(a)
$f(x) = c$ constante	$f'(a)=0$
$f(x) = \alpha x+\beta$	$f'(a)=\alpha$
$f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$	$f'(a)=2(a-\alpha)$
$f(x)=\dfrac{1}{\alpha x+\beta}$	$f'(a)=\dfrac{-1}{(\alpha a+\beta)^2}$
$f(x)=\sqrt{x+\alpha}$	$f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a+\alpha}}$
$f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\delta x+\lambda}$	$f'(a)=\dfrac{\alpha\lambda-\beta\delta}{(\delta a+\lambda)^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(a) = n\times a^{n-1}$

• **Opérations sur les fonction dérivables en a :**

Théorème :

• Si f et g sont 2 fonctions dérivables en a

Alors $f+g$, $f\times g$ et $\alpha f+\beta g$ sont dérivables en a et on a :

* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

* $(f\times g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$

* $(\alpha f+\beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

* $(f^n)'(a) = n f^{n-1}(a). f'(a)$ avec $n \in \mathbb{N}^*_-\{1\}$

* $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = \dfrac{-f'(a)}{f^2(a)}$ si $f(a) \neq 0$

* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a).g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

théorème : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } a \\ f(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{f})'(a)=\dfrac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$

Exemple : $f(x)=\sqrt{4x+1}$. Déterminer le nombre dérivé en 1.

On pose $u(x) = 4x+1$ alors $f'(1) = \dfrac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}}=\dfrac{4}{2\sqrt{4+1}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ENONCES

1 a) soit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.montrer que f est dérivable en 0, et déterminer $f'(0)$.

b) soit $f(x) = \sqrt{x+3}$. Montrer que f est dérivable en -2 et déterminer f' (-2).

c) soit $f(x) = \sqrt{x-1}$. Montrer que f n'est pas dérivable en 1.

d) soit $f(x) = |x+1|$. Montrer que f n'est pas dérivable en -1.

e) soit $f(x) = x - \sqrt{2x+1}$. Montrer que f est dérivable en 4 et déterminer $f'(4)$.

2 Soit $f(x) = 2x^3 - x + 3$.montrer que f est dérivable en tout point a de IR et calculer $f'(a)$.

3 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, une équation de la tangente à la courbe représentative (C) au point A d 'abscisse a :

1) $f(x) = 2x^3 - 4x + 3$ et $a = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ et $a = -2$

4 a) soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -2x & \text{si } x < -1 \end{cases}$

Calculer s'ils existent les nombres dérivées à droite et à gauche au point $x_0 = -1$?

Que peut- on conclure ?

b) Même question pour $f(x) = \dfrac{1}{|x|+1}$ au point $x_0 = 0$.

5 f est définie par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1, 1]$ et ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1. En déduire les tangentes à ζ aux point d'abscisses 1 et -1.

6 Soit f défini sur IR_+ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut- on déduire pour ζ_f ?

7 QCM

Indiquer la réponse exacte par a, b ou c avec justification.

1) f est une fonction telle que f(2)=3 et f'(2)= -1
la tangente à ζ_f au point d'abscisse 2 a pour équation :
$\boxed{a}$ $y = -x+5$ $\boxed{b}$ $y=-x+3$ $\boxed{c}$ $y=3x- 3$

2) f est la fonction définie sur]-1,1[par $f(x)= \sqrt{1-x^2}$ alors $f'(\frac{1}{2})$ est égale à

$\boxed{a}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\boxed{b}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\boxed{c}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) f est dérivable en a signifie que

$\boxed{a}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\boxed{b}$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$

$\boxed{c}$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$

4) * Si f est continue en a alors f est dérivable en a
** Si f est dérivable en a alors f est continue en a
*** Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a
Parmi les affirmation (*) (**) et (***)
$\boxed{a}$ aucune n'est vraie $\boxed{b}$ une seule est vraie $\boxed{c}$ deux sont vraie

5) $\left(\frac{u}{v}\right)'(a)$ est égale à:

$\boxed{a}$ $\frac{u(a)v'(a)-u'(a)v(a)}{v^2(a)}$ $\boxed{b}$ $\frac{u'(a)v(a)+u(a)v'(a)}{v^2(a)}$ $\boxed{c}$ $\frac{u'(a)v(a)-v(a)'u(a)}{v^2(a)}$

8

f définie sur $[-1\,,1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}$

Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1.Que peut- on déduire géométriquement ?

9

vrai-faux
Dire si l'affirmation est vraie ou fausse.
Justifier votre réponse.

1) f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2}\,x^2$ pour tout $a > 0$, $f'(a) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

2) f la fonction définie sur IR par $f(x)= \sqrt{2}\,x$ alors

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

3) f est une fonction dérivable en 1 et f '(1) =2 = f(1)
alors l'équation de la tangente en ce point est y = 2x.

4) A(1,3) est un point de la courbe de fonction f et f '(1)= 5 alors l'équation de la tangente est y = 5x -2.

5) $f(x)=x-1$,si f est dérivable en 1 alors $|f|$ est dérivable en 1.

6) $f(x) = 4\sqrt{x}$ est dérivable en 2.

7) f définie sur IR par $f(x) = x^3$. L'approximation affine de $(1+h)^3$ par le proche de zéro, associé à f est $3(1+h)$.

10 $f(x) = a x^2 + b x + c$ avec a, b, c des réels.
Soit ζ la courbe de f. déterminer a, b, c (tel que : ζ passe par A (1,4) ;B (-1, 6) et la tangente en A, ait pour coefficient directeur 3.

11 $f_m(x) = \dfrac{m x + 1}{(2 - m)x + 3}$; $m \in IR \setminus \{3\}$.

Déterminer m pour que ζ_f admet au point d'abscisse (-1) une tangente de Coefficient directeur -2.

12 $f(x) = |1 - x^2|$.

1) Montrer que au point $x_0 = -1$,La représentation graphique de f admet deux demi tangentes.

2) Représenter graphiquement ces tangentes.

13 1) Déterminer une approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h voisin de zéro.

2) En déduire une valeur approchée des nombres suivants :
$a = \sqrt{1,001}$ et $b = \sqrt{0,998}$

14 f est définie sur IR par $f(x) = x^2$

1) Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0

2) Calculer alors une valeur approchée de $(1,024)^2$.

3) a) Déterminer une l'approximation affine de $f(3+h)$ pour h proche de 0
b) Calculer une valeur approchée de a te b tel que $a= (3,01)^2$ et $b = (3,002)^2$

15 f est définie sur IR^* par $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1) Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h voisin de 0.

2) En déduire une valeur approchée des nombres

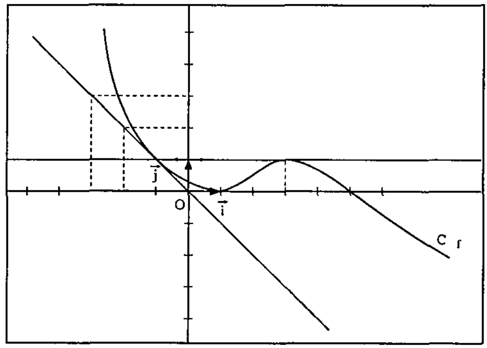
$a = \dfrac{1}{1,002}$; $b = \dfrac{1}{1,03}$; $c = \dfrac{4}{1,001}$; $d=\dfrac{1}{0,998}$; $e=\dfrac{1}{0,979}$

16 Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + x - 5$ définies sur IR.

1) pour tout $x_0 \in IR$ calculer $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$.

2) Existe-t-il des points où les tangentes aux ζ_f et ζ_g sont parallèles ?
Si oui, préciser leurs coordonnées.

17 On a représenté ci- contre une fonction par simple lecture graphique, Déterminer :



1) $f(-1)$; $f'(-1)$; $f(1)$; $f'(1)$; $f'(3)$.
2) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-1).
3) l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

18 Soit $f(x) = [x - E(x)][E(x) + 1 - x]$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité au point $x_0 = n$, $n \in Z$.
2) déterminer le domaine de continuité.
3) montrer que f est dérivable en tout point $x_0 \in (IR \setminus Z)$?

19 Soit f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -3x^2 + x + 2 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.
2) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe ζ de f au point A d'abscisse nulle.
 b) déterminer le point $M_0 \in \zeta_f$ d'abscisse $x_0 < 1$ en le quel l tangente Δ est perpendiculaire à T.
3) a) soit $x_0 \in]1, +\infty[$. calculer $f'(x_0)$.
 b) Existe-t-il un point M_0 d'abscisse $x_0 > 0$ où la tangente à ζ_f est parallèle à droite D : $y = (\sqrt{6} + 1)x - 3$

20 Soit $f : IR \to IR;\ x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.
 b) Etudier la continué et la dérivabilité en 0.
2) Montrer que f est dérivable sur IR^*.
3) Déterminer et construire le demi tangente à ζ_f au point d'abscisse 0
4) Déterminer et construire les tangentes à ζ_f au point d'abscisse 1 et 1.
5) Existe-t-il des points de ζ_f où la tangente est parallèle à Δ

d 'équation :Δ : y 3x + 1.

21 Soit la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2x-8} + mx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

ζ désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) déterminer m pour que f soit continue au point $x_0 = 2$.
   Pour la suite de l'exercice, on prend m= 2.
2) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite au point 2.
   b) En déduire que ζ admet au point A d'abscisse 2, deux demi - tangentes que l'on construira.
3) soit M_0 un point de ζ d'abscisse $x_0 \in]-\infty, 2[$
   a) Ecrire une équation de la tangenteΔ à la courbe ζ au point M_0.
   b) En déduire les points de ζ ayant une abscisse strictement inférieure à 2 et où la tangente passe par B (0, - 1).

22 Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-2}{x+1} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -\sqrt{x} + x - 2 + \sqrt{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1) déterminer a et b pour que f soit continue sur IR.
2) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   On considère pour la suite b = -2 et a = 1.
3) a) déterminer le domaine de continuité de f.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 2.
4) a) soit $x_0 \in]-\infty, 0[$, déterminer $f'(x_0)$.
   b) soit , $x_1 \in]0,2[$, déterminer $f'(x_1)$
5) a) déterminer une équation de la tangente à ζ_f en -2 puis en 1.
   b) Existe-t-il un point M_0 de ζ_f d'abscisse $x_0 < 2$ dont la tangente ζ_f en M_0 soit parallèle à Δ : y = 5x +1.

23 On considère les fonctions définies sur IR par :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$; $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$

et $f_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Déterminer a et b pour que f soit continue en 1 et au point 2.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + x + 1$

2) Déterminer α et β de manière que la fonction $h \mapsto \dfrac{\sqrt{f(x)} - \alpha x - \beta}{x^2}$

admette une limite finie en 0.Calculer alors cette limite.

3) a) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

b) en déduire que $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

4) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \in \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 1 \\ f_n(x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$

a) Déterminer n pour que φ soit continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de φ au point 1.

24 f définie sur [-5, 5] par $f(x) = \dfrac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$

ζ est sa courbe représentative dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe ζ.

2) Déterminer les équations des demi- tangentes aux points d'abscisses –5 et 5.

3) Déterminer f'(x) sur [0, 5[en déduire f' (0).

4) Déterminer le sens de variations de f sur [0, 5[et dresser son tableau de variations.

5) Tracer la courbe de f.

6) En déduire le tracé de la courbe ζ_1 d'équation $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. La courbe ζ_1 est appelée ellipse.

CORRIGES

1 a) $f(0) = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2-x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2-x}{x}$$

$= \lim\limits_{x\to 0} x^2+2x-1 = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

b) $f(-2) = \sqrt{-2+3} = 1$

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$= \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1} = \dfrac{1}{2}$ d'où f est dérivable en -2 et $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$

c) $f(1) = 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}\,.\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0^+$ donc f n'est pas dérivable en 1.

d) $f(-1) = 0$;

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1}{x+1} = 1.$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-}\frac{-(x+1)}{x+1} = -1.$$

donc $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ n'existe pas ou encore f n'est pas dérivable en -1

e) $f(x) = x - \sqrt{2x+1}$ alors $f(4) = 4 - \sqrt{9} = 1$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{2x+1}-1}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1-\sqrt{2x+1})\left[x-1+\sqrt{2x+1}\right]}{(x-4)\left[x-1+\sqrt{2x+1}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)^2-2x-1}{(x-4)(x-1+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{(x-4)(x-1+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-1+\sqrt{2x+1}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$ Donc f est dérivable en 4 et $f'(4)=\frac{2}{3}$.

2

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(2x^3-x+3)-(2a^3-a+3)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x^3-a^3)-(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)(x^2+ax+a^2)-(x-a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}2(x^2+ax+a^2)-1=6a^2-1.$$

donc f est dérivable en tout point a de IR et $f'(a)=6a^2-1$.

3

Il s'agit d'appliquer la formule y = f ‘ (a) (x – a) + f (a).

1) f (1) = 2 – 4+3 =1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-4x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-4x+2}{x-1}$$

On factorise $2x^3-4x+2$, on remarque que 1 est une solution.

D'où $2x^3-4x+2=(x-1)(2x^2+ax+b)=2x^3+(a-2)x^2+(b-a)x-b$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases}a-2=0\\ b-a=-4\\ -b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$

D'où $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x^2+2x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x^2+2x-2=2.$

Donc f est dérivable en 1 et f ‘ (1) = 2. Ainsi l'équation de la tangente est y = f ‘ (1) (x-1) + f (1). S'écrit y = 2 (x-1) +1 ou encore y = 2x-1.

2) $f(-2)=3$ et $f'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-3}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-2x-4}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-2(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-2}{x+1}=2.$

donc l'équation de la tangente en (-2) est : $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ s'écrit : $y=2(x+2)+3$ ou encore $y=2x+7$.

4 a) $f(-1)=(-1)^2+1=2.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+1-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x-1=-2$

Donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1)=-2$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{-2x-2}{x+1}=-2=f'_g(-1).$

donc $f'_g(-1)=f'_d(-1)$ d'où f est dérivable en -1.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 0\\[2mm] \dfrac{1}{-x+1} & \text{si } x\leq 0\end{cases}$ on a: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{x(x+1)}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{x+1}=-1=f'_d(0).$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\dfrac{1}{-x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x+1}=1=f'_g(0).$

Alors $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

5 1)$f(1)=0$ et $f(-1)=0$.

* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}-\sqrt{1-x^2}=0=f'(1).$

Donc f est dérivable en 1 et ζ_g admet une demi tangente horizontale *au point d'abscisse1.*

* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)(1-x^2)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)(1-x)(1+x)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to -1}(1-x)^2 = 4$

Donc f n'est pas dérivable en -1 et ζ_f admet une demi tangente Verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse-1.

6

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Donc f est dérivable en 0

Et ζ_f admet une demi tangente horizontale à droite en 0.

7

1) La réponse est $\boxed{a}$: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$y = -(x-2) + 3$ Ainsi la tangente $y = -x+5$

2) La réponse est $\boxed{b}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{-2\times\frac{1}{2}}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3) La réponse est $\boxed{c}$: d'après la définition

4) La réponse est $\boxed{c}$: les deux vraies sont ** et *** c'est le théorème du cours et sa négation.

5) La réponse est $\boxed{c}$: d'après le théorème des opérations sur les fonctions.

8

* f(0) et f(-1) = 0.

$$* \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 = f_d'(0).$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -1 = f_g'(0)$$

Alors $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 d'où ζ_f admet deux demi tangentes au point d'abscisse 0. ainsi on a un point anguleux

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}{(x+1)\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}}$$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{(1-x)\sqrt{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable en -1 et ζ_f admet une tangente verticale au point d'abscisse (-1)

9

1) faux : $f(x)=\sqrt{2}\,x^2$ alors $f'(a)=\sqrt{2}.2a$

Soit $f'(a)=4\frac{a}{\sqrt{2}}\neq\frac{a}{\sqrt{2}}$

2) faux : $f(x)=\sqrt{2}x$ alors $f'(a)=\sqrt{2}\neq\frac{a}{2\sqrt{2}}$

3) vrai : la tangente à pour équation
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y=2(x-1)+2$ d'ou $y=2x$

4) vrai: $A(1,3)\in\zeta$ alors $f(1)=3$ et on a $f'(1)=5$
Ainsi $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$
$y=5(x-1)+3$ soit $y=5x-2$

5) faux : $|f(x)|=|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{si } x\geq 1\\ -x+1 & \text{si } x\leq 1\end{cases}$

$f'_d(1)=1\neq f'_g(1)=-1$

6) vrai : $f(x)=4\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en particulier en 2

7) faux : $f(x)=x^3$ alors $f'(x)=3a^2$
$f'(1)=3$donc $f(1+h)=f'(1)h+f(1)=3h+1\neq 3(h+1)$

10

$\left.\begin{array}{l} * A(1,4)\in\zeta\Rightarrow f(1)=4\Rightarrow a+b+c=4\\ * B(-1,6)\in\zeta\Rightarrow f(-1)=6\Rightarrow a-b+c=6\end{array}\right\}$ soustrait membre à membre

On obtient $2b=-2$ donc $b=-1$

* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{ax^2-x+c-(a-1+c)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x^2-1)-(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}a(x+1)-1=2a-1=f'(1).$

La tangente en A à pour coefficient directeur $f'(1) = 3$ d'autre part $f'(1) = 2a-1$Donc $2a - 1 = 3$ ou encore $a = 2$.
Or $a + c = 4 - b$ soit $2 + c = 4 + 1$ ainsi $c = 3$.

11 $f'(-1) = -2$; cherchons $f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\dfrac{mx+1}{(2-m)x+3} - \dfrac{-m+1}{m+1}}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(m+1)(mx+1) + (m-1)\left[(2-m)x+3\right]}{(m+1)(x+1)\left[(2-m)x+3\right]}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(4m-2)(x+1)}{(m+1)(x+1)\left[(2-m)x+3\right]} = \lim_{x \to -1} \frac{4m-2}{(m+1)\left[(2-m)x+3\right]} = \frac{4m-2}{(m+1)\left[m+1\right]}$$

$$f'(-1) = -2 \Leftrightarrow \frac{4m-2}{(m+1)^2} = -2 \Leftrightarrow -2m + 1 = (m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m(m+4) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = -4.$$

12

1)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D' où $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{cases}$

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{1 - x^2}{x+1} = \lim_{x \to (-1)^+} 1 - x = 2$$

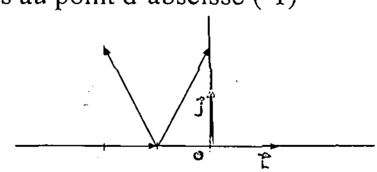
Donc f est dérivable à droite en -1et $f_d'(-1) = 2$.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} x - 1 = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en -1 et
$f'_g(-1)"=" -2 \neq f'_d(-1)$

D'où ζ_f. admet deux demi tangentes au point d'abscisse (-1)

2) la tangente à droite
Δ_d: $y = 2(x+1)$.
La tangente à gauche :
Δ_g: $y = -2(x+1)$.



13 1) On considère f définie sur $\mathbb{R}_+$, par $f(x) = \sqrt{x}$ et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

f est dérivable en 1et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Une approximation affine de f en 1 est la fonction $f'(1)\,h + f(1) = \frac{1}{2}h + 1$

D'ou $\sqrt{1+h} \simeq \frac{1}{2}h + 1$

2) Pour déterminer les deux valeurs approchées demandées on écrit a et b sous la forme $\sqrt{1+h}$

* $a = \sqrt{1,001} = \sqrt{1+0,001} \simeq \frac{1}{2}(0,001) + 1 = 1,0005$

* $b = \sqrt{0,998} = \sqrt{1+(-0,002)} \simeq \frac{1}{2}(-0,002) + 1 = 0,999.$

14 $f(x) = x^2$ on sait que $f'(a) = 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

1) f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2 \times 1 = 2$
une approximation affine de f en 1 est $f'(1) \,.\, h + f(1) = 2h + 1$
ainsi $f(1+h) \simeq f'(1)\,h + f(1)$
d'où $f(1+h) \simeq 2h + 1$

2) On écrit $(1,024)^2 = (1+0,024)^2$
ainsi $(1+0,024)^2 \simeq 2 \times (0,024) + 1 = 1,048$.

3) a) $f'(3) = 2 \times 3 = 6$
une approximation affine de f en 3 est $f(3) + f'(3)\,h$
ainsi $f(3+h) \simeq f(3) + f'(3)h$
$f(3+h) \simeq 9 + 6h$

b) il faut écrire a et b sous forme $(3+h)^2$

$a = (3,01)^2 = (3+0,1)^2 \simeq 9 + 6 \times 0,1 = 9,6$

$b = (3,002)^2 = (3+0,002)^2 \simeq 9 + 6 \times 0,002 = 9,012$

15 1) On sait que $f(x) = \frac{1}{x}$ c'est une fonction usuelle $\forall a \in \mathbb{R}^*, f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = -1$
une approximation affine de f en 1 est $f(1) + f'(1)\,h = 1 - h$

ainsi $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$

2) $a = \frac{1}{1,002} = \frac{1}{1+0,002} = 1 - 0,002 = 0,998$

$$b = \frac{1}{1,03} = \frac{1}{1+0,03} = 1-0,03 = 0,97$$

$$c = \frac{4}{1,001} = 4\times\frac{1}{1+0,001} = 4(1-0,001) = 4-0,004 = 3,996$$

$$d = \frac{1}{0,998} = \frac{1}{1+(-0,002)} = 1-(-0,002) = 1,002$$

$$e = \frac{1}{0,979} = \frac{1}{1+(-0,021)} = 1+0,021 = 1,021$$

16

1) $f(x) = x^3$ fonction usuelle donc f est dérivable sur IR et $f'(x_0) = 3x^2_0$

g est la somme de fonction usuelle dérivable sur IR comme

$\left(x_0^2\right) = 2x_0$ et $(5)' = 0$

Donc g est dérivable sur IR Alors $g'(x_0) = 2x_0 + 1$.

2) deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, il faut donc résoudre l'équation $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Soit $2x_0 + 1 = 3x^2_0$ ou encore $3x^2_0 - 2x_0 - 1 = 0$.

Les solutions sont : $x_0 = 1$ ou $x_0 = -\frac{1}{3}$.

Les points cherchés ont pour coordonnées (1,1) et $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27})$.

17

1) * f(-1)=1, f(1)=0.

- La tangente au point d'abscisse (-1) passe par les points (-1, 1) et (-2, 2)

donc leur coefficient directeur vaut : $\frac{(2)-(1)}{(-2)-(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$

Donc $f'(-1) = -1$.

- La tangente à ζ_f au point d'abscisse 1 respectivement en 3, est

Parallèle Δ à l'axe (x x ') donc $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$.

2) La tangente à ζ_f. au point d'abscisse (-1) a pour équation :

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ or $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = -1$.

D'où $y = -x$.

3) La tangente à ζ_f. au point d'abscisse 3 a pour équation :

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$ or $f'(3) = 0$ et $f(3) = 1$. Soit $y = 1$.

18

1) Si $x \in [n, n+1[$ alors $E(x) = n$ donc $f(x) = (x-n)(n+1-x)$

Si $x \in [n-1, n[$ alors $E(x) = n-1$

Donc $f(x) = (x - n + 1)(n - 1 + 1 - x) = (x - n + 1)(n - x)$

$\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} (x - n)(n + 1 - x) = 0$

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} (x - n + 1)(n - x) = 0$

$f(n) = [n - E(n)][E(n) + 1 - n] = 0$ car $E(n) = n$

$\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} f(x) = f(n)$ donc f est continue en tout point $n \in Z$.

dérivabilité en $x_0 = n$:

$$\lim_{x \to n^+} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \lim_{x \to n^+} \frac{(x - n)(n + 1 - x)}{x - n} = \lim_{x \to n^+} n + 1 - x = 1 = f'_d(n)$$

$$\lim_{x \to n^-} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \lim_{x \to n^-} \frac{(x - n + 1)(n - x)}{x - n} = \lim_{x \to n^-} -x + n - 1 = -1 = f'_g(n)$$

Donc $f'_d(n) \neq f'_g(n)$ d'où f n'est pas dérivable en tout point $n \in Z$.

2) $x \mapsto x$ polynôme continue sur IR :
$x \mapsto 1 - x$ polynôme continue sur IR et $x \mapsto E(x)$ continue sur IR\ Z.
D'où f est continue sur IR\ Z, et d'après la 1ère question, f est continue en tout point $n \in Z$. On conclut que f est continue sur IR

3) La restriction de f sur chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ est un polynôme de la forme (x-n) (n+1-x) donc dérivable sur IR \ Z et on a montrer que f n'est pas dérivable en tout point $n \in Z$.
ainsi f est d dérivable sur IR\ Z.

19

1) $$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3x^2 + x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3(x - 1)(x + \frac{2}{3})}{x - 1}$$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} -3x - 2 = -5$ donc f est dérivable à gauche en 1.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} + 1$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 1}} + 1 = \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + 1 = +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

2) a) $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ comme ; $f(0) = 2$

$$\text{et} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(-3x^2 + x + 2) - 2}{x}$$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -3x + 1 = 1 = f'(0)$ D'où $T : y = x + 2$.

b) $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

T: $y = x + 2$.

$\Delta \perp T \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de T est orthogonal à $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\f'(x_0)\end{pmatrix}$

Ou encore $f'(x_0) + 1 = 0$.

Soit $f'(x_0) = -1$ comme f est la somme de 3 fonction usuelles

Alors $f(x_0) = -b_0 + 1$

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow -6x_0 + 1 = -1 \Leftrightarrow -6x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}$$

et $\frac{1}{3} < 1$ d'où $M_0(\frac{1}{3}, 2)$.

3) a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x - 1$ sur $[1, +\infty[$

f est la somme de deux fonction dérivable sur $[1, +\infty[$

$$\left(\sqrt{x_0^2 - 1}\right)' = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 1}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 1}} \text{ et } (x_0 - 1)' = 1$$

Alors $f'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^1 - 1}} + 1$

b) Si $x_0 \in]0, 1[$ alors $f'(x_0) = -6x_0 + 1$

$$T \,//\, D \Leftrightarrow f'(x_0) = \sqrt{6} + 1 \Leftrightarrow -6x_0 = \sqrt{6} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

a rejeter car $-\frac{1}{\sqrt{6}} \notin]0, 1[$.

Donc il n'existe aucune tangente en M_0 parallèle à D,

D'abscisse $x_0 \in]0, 1[$.

si $x_0 \in]1, +\infty[$ alors $f'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} + 1$

$$T \,//\, D \Leftrightarrow \sqrt{6} + 1 = f'(x_0) \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{x_0^2 - 1} = 6 \Leftrightarrow x_0^2 = 6x_0^2 - 6 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ ou } x_0 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$-\sqrt{\frac{6}{5}}$ à rejeter car $-\sqrt{\frac{6}{5}} \notin]1, +\infty[$ or $+\sqrt{\frac{6}{5}} \in]1, +\infty[$

Donc il existe une seule tangente à ζ au point d'abscisse $\sqrt{\frac{6}{5}}$

parallèle à D

20 1) a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) **Continuité en 0:** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ d'où f est continue en 0.

Dérivabilité en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+1} = 1 = f'_d(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'_g(0)$$

alors $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

soit $x_0 \in]0, +\infty[$; $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{x_0}{x_0^2+1}}{x - x_0}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x(x_0^2+1) - x_0(x^2+1)}{(x^2+1)(x_0^2+1)(x - x_0)} = \lim_{x\to x^0} \frac{x\,x_0(x_0 - x) + x - x_0}{(x^2+1)(x_0^2+1)(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x)(1 - x\,x_0)}{(x^2+1)(x_0^2+1)(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1 - x\,x_0}{(x^2+1)(x_0^2+1)} = \frac{1 - x_0^2}{(x_0^2+1)^2} = f'(x_0)$$

donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$

de même sur $]-\infty, 0[$,

on obtient: $f'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 1}{(x_0^2+1)^2}$

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3) le point $\theta\,(0,0)$; $f'_d(0) = 1$, et $f'_g(0) = -1$

donc $T_d : y = x$ et $T_g : y = -x$

4) $1 \in]0, +\infty[$; $f'(x_0) = \dfrac{1 - x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2}$ donc $f'(1) = 0$

$(-1) \in]-\infty, 0[$; $f'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 1}{(x_0^2 + 1)^2}$ donc $f'(-1) = 0$

au point $(1, f(1))$ et $(-1, f(-1))$, on a deux tangentes horizontales.

$f(1) = \dfrac{1}{2} = f(-1)$.

5) le coefficient directeur d'une tangente est $f'(x_0)$ et celui de Δ est 3 par suite

$\Delta // T \Leftrightarrow f'(x_0) = 3$.

si $x_0 \in]-\infty, 0[$; $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2 - 1}{(x_0^2 + 1)^2} = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3(x_0^2 + 1)^2$

$\Leftrightarrow 3x_0^4 + 6x^2{}_0 + 3 - x_0^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x_0^4 + 5x_0^2 + 4 = 0$.

on pose : $t_0 = x_0^2$ l'équation devient $3t_0^2 + 5t_0 + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 4\times(12) <$ donc pas de solution . dans ce cas:

Si $x_0 \in]0, +\infty[$; $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1 - x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} = 3$

$\Leftrightarrow 3x_0^4 + 6x_0^2 + 1 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow 3x_0^4 + 7x_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2(3x_0^2 + 7) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \notin]0, +\infty[$

donc il n'existe aucune tangente à ζ_f qui est parallèle à Δ.

21 f est continue en 2 si seulement si $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2 + 2x - 8} + mx = 2m = f(2)$

et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3x^2 - 5x + m = 2 + m$ alors $2 + m = 2m \Leftrightarrow m = 2$.

f est continue en 2 si et seulement si $m = 2$

2) a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(\sqrt{x^2 + 2x - 8} + 2x) - 4}{x - 2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x-2} + \frac{2(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{(x-2)\sqrt{x^2+2x-8}} + 2$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)\sqrt{x^2+2x-8}} + 2 = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x-8}} + 2 = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droites en 2.

• <u>1ère méthode</u> : $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-5x+2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-5x-2}{x-2}$.

Factorisons $3x^2-5x-2$. On remarque que 2 est une racine

alors $x'x'' = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$ or $x' = 2$ alors $x'' = -\frac{1}{3}$

Ainsi $\lim_{x\to 2^-} \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} 3x+1 = 7$

donc f est dérivable à gauche en 2.

<u>2ème méthode</u> :

•la restriction de f sur $]-\infty, 2]$ est formé par 2 fonctions usuelles dérivable sur $]-\infty, 2]$ alors $f'(x_0) = 6x_0 - 5$

donc $f'_g(2) = 12 - 5 = 7$

b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

et $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 7$

alors ζ_f admet une demi -tangente verticale dirigée vers le haut

en 2 et l'autre qui a pour vecteur directeur $\vec{u}_g \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3) $x_0 \in]-\infty, 2[$.

on a : $6x_0 - 5 = f'(x_0)$.

$\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow \Delta : y = (6x_0-5)(x-x_0) + 3x_0^2 - 5x_0 + 2$

$\Delta : y = (6x_0-5)x - 6x_0^2 + 5x_0 + 3x_0^2 - 5x_0 + 2$

d'où $\Delta : y = (6x_0-5)x - 3x_0^2 + 2$.

b) $B(0,-1) \in \Delta \Leftrightarrow -1 = (6x_0-5)\,0 - 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 2 = -1$

$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ou $x = -1$, appartiennent à $]-\infty, 2]$

donc il y a deux points de ζ passant par B, le point E' (1, 0)et E" (-1,10).

22

1) La restriction de f sur $]-\infty,0[$ est un polynôme donc continue sur : $]-\infty,0[$ et sur $]0,2[$ est rationnelle donc continue sur $]0,2[$ et sur $]2,+\infty[$

f est continue car c'est la somme des fonctions continues.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 + ax^2 + b = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-2}{x+1} = -2 = f(0)$$

f est une continue en 0 si et seulement si b = - 2.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} -\sqrt{x} + x - 2 + \sqrt{2} = 0 = f(2)$ donc f est continue en 2.

Finalement f est continue sur IR, si et seulement si b = - 2 et a $\in$ IR.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -\sqrt{x} + x - 2 + \sqrt{2} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(-\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 + ax^2 + b = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty.$

3) a) b = -2 et a = 1 et d'après la 1ère question, on a alors f est continue sur IR.

b) **La dérivabilité en 0** : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{x-2}{x+1} + 2}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-2) + 2(x+1)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x+1} = 3 = f'_d(0).$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^3 + x^2 - 2 + 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2(x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} x(x+1) = 0 = f'_g(0).$

alors $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

La dérivabilité en 2 :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{x-2}{x+1}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} = f'_g(2).$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x - 2 + \sqrt{2} - \sqrt{x}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 1 + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(x-2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}+1 = 1+\lim_{x\to 2^+} -\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$$

$=1-\frac{1}{2\sqrt{2}}=f'_g(2)$ alors $f'_d(2)\neq f'_g(2)$ donc f n'est pas dérivable en 2.

4) a) $x_0 \in]-\infty, 0[$; f

d'après les théorèmes sur les fonctions usuelles et leur addition on conclut alors que la restriction de f à $]-\infty,0]$ est dérivable et $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0$

b) La restriction de f sur $]0,2[$ est une fonction usuelle donc dérivable sur $]0,2[$

$$f'(x_0)=\frac{1+2}{(x_0+1)^2}=\frac{3}{(x_0+1)^2}$$

5) a) $-2 \in]-\infty,0[$; $f(-2)=(-2)^3+(-2)^2-2=-6$ et $f'(-2)=3(-2)^2+2(-2)=8$

ainsi la tangente en (-2) est : $y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$

ou encore $y = 8(x+2) -6$ soit $y = 8x +10$.

* $1 \in]0, 2[$ alors $f(1)=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$ et $f'(1)=\frac{3}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$

ainsi la tangente en 1 est : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

soit $y=\frac{3}{4}(x-1)-\frac{1}{2}$ ou encore $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$.

b) T : La tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$

$\Delta : y = 5x +1$ de coefficient directeur 5

$T // \Delta \Leftrightarrow f'(x_0) = 5$

si $x_0 \in]-\infty, 0[$; $f'(x_0)=5 \Leftrightarrow 3x_0^2+2x_0=5$

$\Leftrightarrow 3x_0^2+2x_0-5=0 \Leftrightarrow x_0=1$ ou $x_0=\frac{-5}{3}$ or $1 \notin]-\infty,0[$

Il existe alors une tangente à ζ_f au point d'abscisse $x_0=\frac{-5}{3}$

23 1) a) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+ax+b}{(x-1)(x-2)}=\left(\frac{1-2+a+b}{0}\right)$

est fini que lorsque $a + b - 1= 0$.

$\lim_{x\to 2} f(x)=\left(\frac{2a+b}{0}\right)$ est fini que lorsque : $2a+b=0 \Leftrightarrow b=-2a$

or $a+b=1$ donc $-a=1 \Leftrightarrow a=-1$ et $b=2$.

b) $f(x)=\frac{x^4-2x^3-x+2}{(x-1)(x-2)}$. On remarque que 1 et 2 sont des racines de polynôme

x^4-$2x^3$-$x+2$ d'où

$x^4-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)$

$=(x^2-3x+2)(ax^2+bx+c)$

$=(ax^4+(b-3a)x^3+x^2(2a+c-3b)+x(2b-3c)+2c)$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-2 \\ 2a+c-3b=0 \\ -3c+2b=-1 \\ 2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

par suite $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=x^2+x+1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x-\beta}{x^2}=\left(\dfrac{1-\beta}{0^+}\right)$ est finie que lorsque $\beta=1.$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1-(+\alpha x+1)^2}{x^2\left[\sqrt{x^2+x+1}+(\alpha x+1)\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\alpha^2)x^2+(1-2\alpha)x}{x^2\left[\sqrt{x^2+x+1}+\alpha x+1\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\alpha^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\alpha x+1}+\dfrac{1-2\alpha}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\alpha x+1)}$

est finie que pour $1-2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$

ainsi $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}x+1}=\dfrac{3}{8}.$

3) a) * $f_1(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-1)}=1$. donc la propriété est vraie pour l'ordre 1.

* Supposons que la propriété est vraie pour l'ordre p.

Soit $f_p(x)=\dfrac{px^{p+1}-(p+1)x^p+1}{(x-1)^2}=1+2x+\ldots+px^{p-1}.$

* Montrons que c'est vraie pour l'ordre (p + 1)

$$\left[1+2x+...px^{p-1}\right]+(p+1)x^p=\frac{px^{p+1}-(p+1)x^p+1}{(x-1)^2}+(p+1)x^p$$

$$=\frac{px^{p+1}-(p+1)x^p+1+(p+1)x^p(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{px^{p+1}-(p+1)x^p+1+(p+1)x^{p+2}-2px^{p+1}-2x^{p+1}+(p+1)x^p}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(p+1)x^{p+2}-(p+2)x^{p+1}+1}{(x-1)^2}=f_{p+1}(x)$$ donc vraie pour l'ordre $p+1$.

d'après le principe de récurrence, on a :

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $f_n(x)=1+2x+...+nx^{n-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to1} f_1(x)=\lim\limits_{x\to1} 1+2x+3x+...+nx^{n-1}=1+2+3+...+n$.

c'est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison. $r=1$ et de 1^{er} terme 1 , ainsi $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

d 'où $\lim\limits_{x\to1} f_n(x)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4) a) φ est continue en 1 si et seulement si $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\varphi(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=3=\varphi(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f_n(x)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

alors $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\varphi(1)\Leftrightarrow\dfrac{n(n+1)}{2}=3$

$\Leftrightarrow n^2+n=6\Leftrightarrow n^2+n-6=0$

$\Delta=25$ par suite $n=2$ ou $n=-3$ à rejeter, donc $n=2$.

b) Si $n\neq2$; φ n'est pas continue en 1 $\Rightarrow\varphi$ n'est pas dérivable en 1.

Si $n=2$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x+1-3}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+} x+2=3=\varphi'_d(1)$.

* $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(1+2x)-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}2=2=\varphi'_g(1)$.

donc $\varphi'_d(1)\neq\varphi'_g(1)$ d'où φ n'est pas dérivable en 1.

24 1) $\forall x\in[-5,5]$ on a $-x\in[-5,5]$

et $f(-x)=\frac{3}{5}\sqrt{25-(-x)^2}=\sqrt{25-x^2}=f(x)$

alors f est paire par suite l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}$.

2) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{f(x)-f(-5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3}{5}.\frac{25-x^2}{(x-5)\sqrt{25-x^2}}=\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3}{5}\frac{(5-x)(5+x)}{(x-5)\sqrt{25-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{-3}{5}\frac{(5+x)}{\sqrt{25-x^2}}=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5} 5+x=10\\ \lim\limits_{x\to 5^-}\sqrt{25-x^2}=0^+\end{cases}$

donc $\mathcal{C}$admet une demi -tangente verticale dirigé vers le haut son équation est x= 5 et $y\geq 0$

de même en (-5) puisque l'axe des ordonnés et un axe de symétrie donc l'équation est x= -5 et $y\geq 0$?

3) On sait que $\left(\sqrt{u}\right)'(a)=\frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$ alors $f'(a)=\frac{3}{5}.\frac{(25-x^2)'}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{3}{5}\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}$

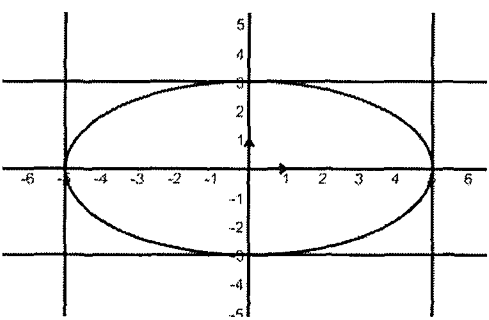
$f'(a)=\frac{3}{5}\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\Rightarrow f'(0)=0$

4) soient a, b de [0,5[tel que a> b

$\Rightarrow a^2>b^2\Rightarrow -a^2<-b^2\Rightarrow 25-a^2<25-b^2\Rightarrow f(a)<f(b)$

$\Rightarrow$ f est strictement décroissantes sur[0,5[

5)



6) $M\in\zeta_1\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{25}$ ou encore $y^2=9(\frac{25-x^2}{25})$

$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ ou $y=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$

$\Leftrightarrow y=f(x)$ ou $y=-f(x)$

$\Leftrightarrow M\in\zeta_f$ ou $M\in\zeta_{(-f)}$

$M\Leftrightarrow\in\zeta_f\cup\zeta_{(-f)}$

d'ou $\zeta_1=\zeta_f\cup\zeta_{(-f)}$

Chapitre VI

Fonctions Dérivées

- **Définitions** :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur un intervalle I.
Si f est dérivable en tout point a de I.
La fonction qui à tout réel a de I, on associe le nombre dérivé de f en a, s'appelle fonction dérivée de f sur I noté f'.

- **Dérivées des fonctions usuelles** :

Le tableau suivant donne les dérivées des principales fonctions usuelles.

Fonction	Domaine De définition	Fonction dérivée	Dérivable sur
$x \mapsto k\ (k \text{ réel})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

- **Opérations sur les fonctions dérivables :**

➢ f et g sont deux fonctions dérivables sur I, de fonctions dérivées respectives f' et g' sur I.

Fonction	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda f'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{f} \left(f(x) \neq 0\right)$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g} \left(g(x) \neq 0\right)$	$\frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$
$f^n \ \left(n \in Z^*\right)$	$n f^{n-1} \times f'$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(a x + b)$	$a. \ f'(a x + b)$

➢ <u>Remarque</u> : • Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
• Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

- **Les dérivées successifs** :
  - ➢ Si f' est dérivable sur I alors on note f'' la fonction dérivée de f', on l'appelle la fonction dérivée seconde.
  - ➢ Remarque : $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ sont les dérivées successifs d'une Fonction dérivable (n) fois sur I.
  - ➢ • Toute fonction polynôme est dérivable (n) fois sur IR.
    • Toute fonction rationnelle est dérivable (n) fois sur son domaine de définition.

- **<u>Sens de variation d'une fonction :</u>**

I désigne un intervalle, f est une fonction définie sur I et dérivable.

- Pour tout $x \in I$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I.
- Pour tout $x \in I; f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est strictement croissante sur I.
- Pour tout $x \in I; f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

- **<u>Extremums :</u>**

➢ **<u>Définitions :</u>**

Soit f définie sur $D, I = \left]x_0 - h , x_0 + h\right[$ avec $I \subset D$.

a) f admet un **minimum relatif** en x_0 si et seulement si :
Pour tout $x \in I ; f(x) \geq f(x_0)$.

b) f admet **un minimum absolu** en x_0 si seulement si :
Pour tout $x \in D; f(x) \geq f(x_0)$

c) f admet **un maximum relatif** en x_0 si et seulement si :
Pour tout $x \in I$; $f(x) \leq f(x_0)$.

d) f admet **un maximum absolu** en x_0 si et seulement si :
Pour tout $x \in D$; $f(x) \leq f(x_0)$.

e) f admet un **extremum en x_0** si et seulement si f admet un maximum en x_0 ou un minimum en x_0 :

➢ **<u>Extremums et dérivation :</u>**

<u>Théorèmes :</u>

Soit f dérivable sur D et $x_0 \in D$.
1) si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
2) si f ' s'annule en x_0 en changeant de signe au voisinage de x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

Réflexes

Situation	Réflexes
Dérivée avec $\sqrt{\ }$ racines	Attention à l'ensemble de dérivabilité
Dérivée avec des valeurs absolues	On se ramène à une fonction définie par intervalles
Déterminer un extremum	On se ramène à un tableau de variation

ENONCES

Fonctions dérivées

1

1) Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur IR puis trouver Leurs fonctions dérivées :

$f_1 : x \mapsto (5x-2)^4$; $f_2 : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 3x + 1$; $f_3 : x \to (2x+4)(x^3-2)$

$f_4 : x \mapsto (1-x)(3x-3)(5x+2)$; $f_5 : x \mapsto (3x+4)^3 (3-x)^5$.

2

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition puis trouver leurs fonctions dérivées

$g_1 : x \mapsto \frac{-5}{4x-1} + \frac{5x+2}{2x+3}$; $g_2 : x \mapsto \left(\frac{3x+5}{4x-3}\right)^2$; $g_3 : x \to \frac{(5x+4)^2}{(1-x)^3}$

$g_4 : x \mapsto \frac{-4x+5}{(-2x+3)^2}$; $g_5 : x \mapsto \frac{x^2-x+3}{3x^2+x+1}$;

3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$h_1 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{3x-2}$ pour $x \rangle \frac{2}{3}$; $h_2 : x \mapsto \frac{3\sqrt{x}-1}{1-2\sqrt{x}}$ pour $0 \langle x \langle \frac{1}{4}$

$h_3 : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$h_4 : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $h_5 : x \mapsto x.\sqrt{2x+1}$ pour $x > -\frac{1}{2}$

4

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ et (ξ) sa Courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente (T_a) à la courbe (ξ) au point A d'abscisse a.
2) En déduire les coordonnées des deux points A_1 et A_2 de (ξ) où les tangents (T_1) et (T_2) passent par l'origine du repère.

Donner les équations de (T_1) et (T_2).

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x+1|+1}$

ξ Désigne la courbe de f dans un repère O.N. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) Montrer que f est dérivable au point -1
2) Montrer que f est dérivable sur IR et déterminer sa fonction dérivée f'
3) Déterminer le (ou les) points de ξ où la tangente est :
   a) Parallèle à la droite Δ d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$
   b) Perpendiculaire à la droite Δ' d'équation : $4x - 5y + 1 = 0$.

6 On considère la fonction f définie par $f(x) = (x-2)^2 (x+3)$

Soit ξ_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère Orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Soit la droite D d'équation $x + y + 3 = 0$

1) La droite D est elle tangente à ξ_f ? si oui déterminer le point de contact.
2) Existe-t-il des tangentes parallèles à D.
3) Déterminer les tangents à (ξ_f) issues de A (2 , 0).

7 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - \left|\sqrt{x} - 1\right|}{\sqrt{x} + 1}$

1) Donner le domaine de définition D_f de la fonction f.
2) Etudier la continuité de f sur D_f.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1, puis interpréter graphiquement le résultat.
4) a) Déterminer f' la fonction dérivée de f.
   b) Donne une équation cartésienne de la tangente Δ à la courbe représentative C de f au point A d'abscisse 4.

8 On donne la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^n + \dots + \frac{1}{2^n}x^n \ ; n \in \mathbb{N}$$

1) Ecrire sous une autre façon g(x), puis calculer $g'(x)$.
2) Déduire la somme suivante $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

9 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

Soit (ξ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Quelle est la fonction dérivée f' de f ? est-elle continue sur son domaine ?

2)) Former l'équation de la tangente à (ξ) au point M_0 d'abscisse x_0.

b) Former les équations des tangentes à (ξ) parallèles à la droite D : $x-2y=0$.

c) Peut-on déterminer des points de la courbe (ξ) où la tangente est parallèle à un direction donnée de coefficient directeur m. Discuter

d) Est-il possible de mener par le point A $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ des tangentes à (ξ)

3) a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=2g'(x)$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, en déduire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)\sqrt{(x-h)}-(x-h)\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x^2-h^2}}$.

10 Pour tout réel x, on pose : $f(x)=1+x+x^2+...+x^{50}=\sum\limits_{k=0}^{50}x^k$

On notera cette expression de f : expression 1.

1) Quelle est la valeur de f(1)

2) a) Donner une autre expression de f(x) pour $x\neq 1$. On notera cette nouvelle expression : expression 2.

b) En déduire la valeur de la somme : $S_2=\sum\limits_{k=0}^{50}2^k$

3) a) On note f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ à partir de l'expression 1. Quelle est la valeur de $f'(1)$.

b) Déterminer $f'(x)$ à partir de l'expression 2 pour $x\neq 1$.

Quelle est la valeur de la somme $S_3=\sum\limits_{k=1}^{50}2^{k-1}$

11 Soit la fonction $f_m(x)=\dfrac{x^2+m(2+x)}{2-x}$ avec un $m\in\mathbb{R}$

et (C_m) sa courbe représentative.

1) Déterminer, suivant m, $\lim\limits_{x\to 2^+} f_m(x)$.

2) Calculer $f'_m(x)$ la fonction dérivée de $f_m(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$;

3) Soit $x_0\in\mathbb{R}-\{2\}$ et M_0 et N_0 les points de C_m d'abscisses repectives x_0 et $4-x_0$. Montrer que les tangentes à en M_0 et N_0 sont parallèles.

4) Déterminer m sachant que la tangente à ξ_m au point d'abscisse (-2), a pour coefficient directeur le réel $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

5) Soit la fonction $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2+|2+x|}{2-x} & \text{si } x\le 0\\ ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2} & \text{si } x\rangle 0\end{cases}$ avec $a\in\mathbb{R}$

a) Etudier suivant a, la continuité et la dérivabilité en 0 de g

b) g est-elle dérivable en –2 ?

c) Montrer que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,0[$ et $]0,+\infty[$ et déterminer $g'(x)$.

12 Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et calculer $f'(x)$

b) Ecrire une équation de la tangente Δ à (ξ_f) au points d'abscisse 0.

c) Préciser les points de ζ_f où la tangente perpenduculaire à (Δ)

d) Soit le point $A(1,\alpha);\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer α sachant qu'il n'y a aucune tangente à (ζ_f) passant par A.

2) Soit la droite $(D):y=\sqrt{2}(x-1)+6$.

a) Montrer que (D) coupe (ξ_f) en deux points distincts M' et M'' d'abscisses x' et x'', Solutions d'une équation du second degré que l'on précisera (le calcul de x' et x'' n'est pas demandé).

b) Vérifier que $x'+x''=2$. En déduire que les tangentes à C_f en M' et M" sont parallèles.

3) Soit la fonction $h(x)=\dfrac{x^2+4|x|+3}{|x|-1}$.

a) Préciser D_h et étudier la dérivabilité de h en 0

b) Montrer que h est dérivable sur $IR-\{0,-1,1\}$ et préciser la fonction dérivée h'.

c) En quels points de (ζ_h) la tangente est parallèle à la droite $D_1: x+y=0$

d) Préciser le signe de $h'(x)$ pour tout $x\in IR-\{0,-1,1\}$.

13

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=x^2-x+3 \text{ si } x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{2|x|-5}{x-2} \text{ si } x\langle 1 \end{cases}$

ζ désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité de la dérivabilité en 1 et 0.
b) En déduire que ζ admet une tangente Δ au point A d'abscisse 1, donner une équation cartésienne de Δ.

2) a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$; $]0,1[$; $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle.
b) En déduire que Δ est tangente à ξ en un autre point B qu'on précisera les coordonnées.

3) Soit M un point de ζ d'abscisse $\alpha>1$ et N un point de ζ d'abscisse $\dfrac{1}{\alpha}$.

a) Préciser les tangentes respectives T_α et T'_α à ζ aux points M et N

b) Pour quelles valeurs de α, T_α est parallèle à la droite (OA).

Pour cette valeur de α trouver les coordonnées du point H de $T_\alpha\cap T'_\alpha$.

4) Montrer que f est deux fois dérivables sur $[0,+\infty[$. Calculer $f''(x)$.

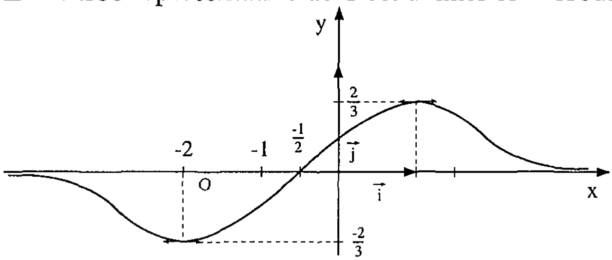
<u>Sens de variation - Extrema</u>

14 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{|x^2-2x|}{x(x^2-x-2)}$ si $x\neq 2$ et $f(2)=\dfrac{1}{3}$

1) Trouver le domaine de définition D_f de la fonction f.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 2.
3) Dresser le tableau de variation de f.

15 Soit f une fonction définie et dérivable sur IR
. La courbe représentative de f est donner ci-dessous.



Répondre par vraie ou faux à chacun des assertions suivantes, en justifiant votre réponse :

a) $f(1) = 0$ b) f admet un extremum en $x = -2$.
c) f est croissante sur $[1, +\infty[$. d) f admet deux extremums

16 Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$

1) Déterminer qu'il existe un réel a tel que pour tout x réel, $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 - a}{x^2+1}\right)^2$.

2) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
b) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = f(x) - 9x$.
Vérifier que $f'' = g''$.
c) Calculer $f''(x)$; sur $I = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, étudier le signe de f″, en déduire le *sens de variation de g ', puis le signe de g '.*
En déduire le sens de variation de g, puis le signe de g.
Quelle est la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

17 On donne la fonction f définie sue IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$ et $(b, c) \in IR^2$.

1) Déterminer b et c en fonction de a sachant que la courbe représentative *contient les points A (1, 0) et B (0, 1).*
2) Pour les conditions trouvées, calculer les coordonnées de l'extremum de f.
3) a) Quel est l'ensemble des points associés à ces extremums ?
b) Dresser le tableau de variation de la fonction qui forme cet ensemble.

18 **Vrai - Faux**

Dire si l'affirmation est vraie au fausse. Justifier votre réponse.

1) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2}{x} + x$ alors $f'(1) = -1$.

2) Pour tout $x > 1$, $f(x) = \sqrt{4x+1}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}}$.

3) Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ alors $f'(x) = \sqrt{x}$.

4) Si f est dérivable sur I alors f est croissante ou f est décroissante.

5) Si f est dérivable sur un intervalle centré en x_0 et f admet un extrema en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

6) Si f est une fonction positive sur un intervalle I alors f est croissante sur I.

19 Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 3}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f admet un extremum égal à 1 en $x_0 = 0$.

3) pour $a = 1$ et $b = 3$, étudier les variations de la fonction f.

4) Vérifier que $f'(-1) = \frac{5}{9}$ et construire la tangente à ζ_f au point $A(-1,\ f(-1))$.

5) Démontrer que pour $a = 1$ et $b \in$ IR, f admet toujours deux extremums.

20 1) soit g une fonction *définie par* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x\sqrt{x} - 2x - 1$.

a) Etudier la dérivabilité de g sur son domaine.

b) Dresser le tableau de variation complet de g, on précisera ses extremums et leurs natures.

2) Soit la fonction f définie par : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\frac{1}{6}x^3 + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - x^2 - x$

a)Etudier les variations de f.

b) f admet-elle des extremums ?

3) Existe-t-il des tangentes à la courbe de f parallèle à la droite d'équation : $y = -x + 3$?

21 Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{R}}$ la famille des fonctions définie par :

$f_m(x) = (2m - 3)x^3 + 3x^2 - 3mx + m$.

1) Pour quelles valeurs de m, $f_m(x)$ possède un seul extremum ?

2) Pour quelles valeurs de m, $f_m(x)$ est décroissante sur tout son domaine ?

3) a) Etudier les variations de $g(x) = -x^3 + 3|x^2 - x| + 1$

b) Dresser le tableau de variation complet de g.

c) Préciser les points anguleux de ζ_g et donner les vecteurs directeurs des demi tangentes.

22 Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer les réels a, b et c sachant que f admet un extremum en $x_0 = \frac{1}{2}$ et sa courbe C passe par A(1,1) et admet en A une tangente parallèle à la droite $\Delta : x - y + 1 = 0$.

2) soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

a) Etudier les variations de g. En déduire que pour $x \in IR$,

on a : $-\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$.

b) En remarquant que $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. Montrer que pour tout $n \in IN^*$.

On a : $g\left(\dfrac{n+1}{n}\right) < g\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

23 Soit $f_m : IR \to IR$; $x \mapsto \dfrac{x^2 + mx - 3}{x - 1}$ où $m \in IR$.

On désigne par C m sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer f'_m.

2) Pour quelle valeur de m, f admet-t-elle un extremum en 2 ?

3) Quel est l'ensemble des valeurs de m, pour les quelles f_m n'admet pas d'extremum ?

4) on prend m = 3.

a) Déterminer les variations de f_3.

b) Soit $\Delta : 3x - 4y + 13 = 0$, déterminer les points de ζ_3 où la tangente est parallèle à Δ ; en déduire que Δ est tangente à ζ_3 en point que l'on précisera.

5) Soit $g : IR \to IR$; $x \mapsto \dfrac{x|x - 3| - 3}{x - 1}$

a) Etudier la dérivabilité de g en (-3).

b) Déterminer g' est dresser le tableau de variation de g.

24 1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 4x-x^2$ et soit ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer ζ.

b) Déterminer les coordonnées du point A dont l'abscisse est le maximum atteint par f.

c) Soit I (0, 1). Déterminer les tangentes T_1 et T_2 passant par I à ζ.

2) Un point M variable sur l'arc d'extrémités O et A de la courbe ζ d'abscisse x tel que : $x \in]0, 2[$, N désigne le symétrique de M par rapport à $\Delta : x = 2$ et MNN 'M' le rectangle dont les sommets M ' et N ' sont situés sur l'axe des abscisses .

a) Exprimer en fonction de x l'aire s (x) du rectangle ANN'M'.

b) Pour quelle valeur de x, s (x) est maximale.

25 Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.On considère Les points : A (0, x+3) ; B(x-1, 0) et c (-x+2, 0).

1) Déterminer l'aire f(x) du triangle ABC.

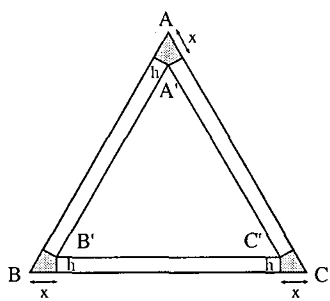
2) Etudier le sens de variation de la fonction f.

3) a) Ecrire les équations es tangentes aux points d'abscisse respectives : -3 et $\frac{3}{2}$.

b) Interpréter géométriquement les minimums de la fonction f.

26

On considère une famille de carton ayant la forme d'un triangle équilatéral de 60 cm de côté.
On découpe les trois coins de cette famille, comme l'indique la figure ci- contre, et on forme une boite sans couvercle en relevant les rectangles latéraux.



1) Montrer que le volume de la boite est $V(x) = x(30 - x)^2$.

2) Déterminer le volume maximal de la boite obtenue.

27 Le est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i, j})$.

On considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de

Coordonnées (1, 0) et A' (-1, 0).

1) Pour tout point H du segment $[A\,A']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire à la droite (A A'). (Δ) Coupe le cercle (Γ) en M et M'.
On pose $\overline{OH} = x$, calculer, en fonction de x, l'aire du triangle AM M'.

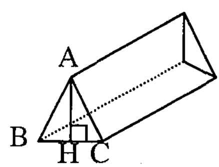
2) Soit la fonction numérique définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a) Etudier sa dérivabilité en – 1 et 1 .En déduire les tangentes aux points d'abscisse-1 et 1.
   b) En utilisant la formule $\left(\sqrt{U(x)}\right)' = \dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$, pour $U(x) \in \mathbb{R}_+^*$
   Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que le triangle AM M' d'aire maximale est équilatéral.

28 Soit ζ = (OMN) un cône circonscrit à une sphère (s) de rayon R et de centre Ω.
Soit H le projeté orthogonal de Ω sur (MN), le cercle de base de (ζ) a pour rayon MH = r. Soit $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x$ le volume de ζ avec x est sa hauteur.

1) Calculer r^2 en fonction de x et de IR.
2) a) Trouver la valeur minimale de la hauteur x pour que le volume V soit minimum.
   b) Pour cette valeur de x, calculer V.

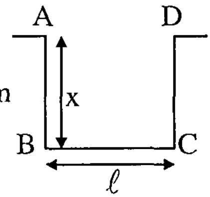
29 Un couloir entée deux bâtiments à la forme d'un prisme droit dont deux des faces sont deux immenses baies vitrées rectangulaires de 20m



de long sur 5m de large on section du prisme par un plan perpendiculaire à sa base est triangle isocèle ABC tel que AB = AC = 5m, BC représente l'écartement à la base des deux baies vitrées on notera x sa longueur.
Le but du problème et déterminer x tel que le volume de ce couloir soit le plus grand possible.

1) a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   b) Calculer le volume V(x) des prismes en fonction de x.
2) Soit f la fonction définie sur [0, 10] par $f(x) = x^2(100 - x^2)$.
   a) Etudier les variations de f .
   b) Pour quelle valeur de x, f admet-elle un maximum ?
3) a) A partir des variations de f, déterminer les variations de la fonction V sur [0, 10].
   b) En déduire la valeur x_0 de BC qui rend maximal le volume de couloir.
   c) Donner l'arrondi au centième de x_0.

30 On veut faire circuler un fluide avec un frottement minimal dans un canal à section intérieure rectangulaire. ABCD représente cette section ; x désigne la hauteur en m et ℓ la largeur en m de la section. L'aire de la section ABCD est 2 dm^2. (m = mettre)



a) Exprimer ℓ en fonction de x.

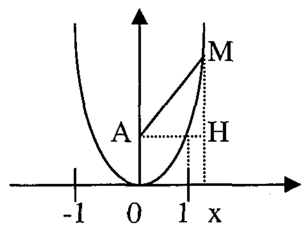
b) On note L(x) la longueur du contour intérieur c'est-à-dire AB + BC + CD.

Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, $L(x) = 2x + \dfrac{2}{100\,x}$.

c) Etudier les variations de la fonction L.

d) Le frottement est minimal lorsque L(x) est minimal.
Déduire de l'étude précédente les valeurs de x et de ℓ pour lesquelles le frottement est minimal.

31 Dans un repère, P est la parabole d'équation : $y = x^2$.
On note A le point de coordonnées (0 ; 1) et M le point de P d'abscisses x.
Le but de l'exercice est de trouver les positions éventuelles de M sur P pour lesquelles la distance AM est minimale.

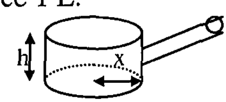


1) Démontrer que $AM^2 = x^4 - x^2 + 1$.

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
  a) Calculer $f'(x)$.
  b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) En utilisant le fait que AM est minimale si, et seulement si, AM^2 est minimal, déterminer les positions de M pour lesquelles AM^2 est minimal.
  b) Calculer cette distance minimale.

32 Une entreprise fabrique des casseroles de contenance 1 L.
Elle cherche à utiliser le moins de métal possible.
(On ne tiendra pas compte du manche.)
x désigne le rayon de cercle intérieur et h la hauteur de la casserole en centimètres.



a) Exprimer h en fonction de x.

b) S(x) est l'aire latérale plus l'aire du disque intérieur en cm^2.

Expliquer pourquoi pour tout $x > 0$, $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{2000}{x}$.

c) Etudier les variations de la fonctions S.

d) En déduire que la quantité de métal utilisée sera minimale lorsque $h^3 = x^3$, c'est-à-dire lorsque $h = x$.

CORRIGES

Fonctions dérivées

1

- $f_1(x)=(5x-2)^4$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et on a :

Pour tout $x\in\mathbb{R}; f'_1(x)=4\times5.(5x-2)^3=20(5x-2)^3$.

- $f_2(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3-3x+1$ est une fonction polynôme donc elle est

dérivable sur IR et on a : Pour tout $x\in\mathbb{R}; f'_2(x)=-x^3+\frac{1}{2}x^2-3$.

- $f_3(x)=(2x+4)(x^3-2)$ est une fonction polynôme donc elle est

dérivable IR et on a : pour tout $x\in\mathbb{R}; f'_3(x)=2(x^3-2)+3x^2(2x+4)$

$= 2x^3-4+6x^3+12x^2=8x^3+12x^2-4$.

- $f_4(x)=(1-x)(3x-3)(5x+2)$ est une fonction polynôme donc

Elle est dérivable sur IR et on a $f_4(x)=-3(1-x)(1-x)(5x+2)$

$=-3(1-x)^2(5x+2)$.

$f'_4(x)=-3\times2\times(-1).(1-x)(5x+2)-3\times5(1-x)^2=6(1-x)(5x+2)-15(1-x)^2$

$=(1-x)[6(5x+2)-15(1-x)]=3(1-x)(15x-1)$.

- $f_5(x)=(3x+4)^3(3-x)^5$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et on a:

Pour tout $x\in\mathbb{R}; f'_5(x)=3\times3(3x+4)^2(3-x)^5+5\times(-1)(3x+4)^3(3-x)^4$

$=(3x+4)^2(3-x)^4[9(3-x)-5(3x+4)]=(3x+4)^2(3-x)^4(-24x+7)$.

2 $g_1(x)=\frac{-5}{4x-1}+\frac{5x+2}{2x+3}$ est une fonction rationnelle donc elle est

dérivable sur son ensemble de définition. Or la fonction g_1 est définie sur :

$\mathbb{R}-\left\{\frac{-3}{2},\frac{1}{4}\right\}$. Donc on a pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{-3}{2},\frac{1}{4}\right\}$:

$$g'_1(x)=\frac{20}{(4x-1)^2}+\frac{5(2x+3)-2(5x+2)}{(2x+3)^2}=\frac{20}{(4x-1)^2}+\frac{11}{(2x+3)^2}.$$

- $g_2(x)=\left(\dfrac{3x+5}{4x-3}\right)^3$ est une fonction rationnelle donc elle est

dérivable sur son ensemble de définition or $Dg_2=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ on a :

$$g'_2(x)=3\times\frac{3(4x-3)-4(3x+5)}{(4x-3)^2}\left(\frac{3x+5}{4x-3}\right)^2$$

$$=\frac{-87}{(4x-3)^2}\left(\frac{3x+5}{4x-3}\right)^2=\frac{-87(3x+5)^2}{(4x-3)^4}.$$

- $g_3(x)=\dfrac{(5x+4)^2}{(1-x)^3}$ est une fonction rationnelle donc elle est

dérivable sur son ensemble de définition or $Dg_3=\mathbb{R}-\{1\}$.
Donc pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a :

$$g'_3(x)=\frac{2\times5(5x+4)(1-x)^3-(-1)\times3(1-x)^2(5x+4)^2}{(x-1)^6}$$

$$=\frac{(5x+4)(1-x)^2\left[10(1-x)+3(5x+4)\right]}{(1-x)^6}$$

$$=\frac{(5x+4)(1-x)^2(5x+22)}{(1-x)^6}=\frac{(5x+4)(5x+22)}{(1-x)^4}.$$

- $g_4(x)=\dfrac{-4x+5}{(-2x+3)^2}$ est une fonction rationnelle donc elle est

dérivable sur son ensemble de définition or $Dg_4=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ on a:

$$g'_4(x)=\frac{-4(-2x+3)^2-2\times(-2)(-2x+3)(-4x+5)}{(-2x+3)^4}$$

$$=\frac{(-2x+3)\left[-4(-2x+3)+4(-4x+5)\right]}{(-2x+3)^4}=\frac{8(-2x+3)(-x+1)}{(-2x+3)^4}=\frac{8-8x}{(-2x+3)^3}.$$

- $g_5(x)=\dfrac{x^2-x+3}{3x^2+x+1}$ est une fonction rationnelle donc elle est

dérivable sur son domaine de définition or $Dg_5=\mathbb{R}$;
donc pour tout $x\in\mathbb{R}$; on a:

$$g'_5(x)=\frac{(2x-1)(3x^2+x+1)-(x^2-x+3)(6x+1)}{(3x^2+x+1)^2}=\frac{4x^2-16x-4}{(3x^2+x+1)^2}.$$

3 Dans tout l'exercice, on admettra que les fonctions sont dérivable sur Les ensembles qui sont données par l'énoncé.

- $h_1(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-2}$; on utilise la règle de dérivation d'un quotient :

$$h'_1(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-2)-3\sqrt{x}}{(3x-2)^2}=\frac{3x-2-3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}$$

$$=\frac{3x-2-6x}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}=\frac{-3x-2}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}.$$

- $$h'_2(x)=\frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}(1-2\sqrt{x})-(3\sqrt{x}-1)\left(\frac{-2}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-2\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{\frac{3-6\sqrt{x}+6\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}}{(1-2\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})^2}.$$

- $$h'_3(x)=\frac{1}{2}.\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{4}.\frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

* $h_4(x)=\sqrt{3x^2+1}$ et $h'_4(x)=\dfrac{(3x^2+1)'}{2\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

* $h_5(x)=x\sqrt{2x+1}$

$$h'_5(x)=(x)'.\sqrt{2x+1}+x(\sqrt{2x+1})'=\sqrt{2x+1}+x.\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$=\sqrt{2x+1}+x.\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}}.$$

4

1) La tangente (T_a) à (ξ) au point A d'abscisse « a », a pour équation :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$; $f(a)=-a^2+2a-4$.

f est définie sur IR (fonction polynôme) et $f'(x)=-2x+2$

$f'(a)=-2a+2$.

L'équation de (T_a) est : $y=-a^2+2a-4+(-2a+2)(x-a)$

C'est-à-dire $y=(-2a+2)x+a^2-4$.

2) (T_a) passe par l'origine O si et seulement si $a^2-4=0$;

c'est-à-dire a = 2 ou a = -2.

* Si $a=-2$ est l'abscisse de A_1 alors $A_1(-2;-12)$

et (T_1) a pour équation : $y=6x$.

* Si $a=2$ est l'abscisse de A_2 alors $A_2(2;-4)$

et (T_2) a pour équation : $y=-2x$.

5

1)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x+1	−	0	+
$\lvert x+1\rvert$	-x-1	0	x+1

$$\text{Donc } f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x} & \text{si } x\in\,]-\infty,-1]\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x+2} & \text{si } x\in[-1,+\infty[\end{cases}$$

$$*\ \lim_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{x^2-1}{-x}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-1}{-x(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x-1}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-1)(x+1)}{-x(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-1}{-x}=-2=f'_g(-1).$$

$$* \lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2-1}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x-1}{(x+2)} = -2 = f'_d(-1)$$

On a: $f'_g(-1) = f'_d(-1) = -2$ donc f est dérivable en -1.

2) On a : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} & \text{si } x \in]-\infty,-1] \\ \dfrac{x^2-1}{x+2} & \text{si } x \in [-1,+\infty[\end{cases}$

* $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+2}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $IR^* - \{2\}$ en particulier sur $]-1,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]-1,+\infty[$

* $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur IR^*; en particulier sur $]-\infty,-1[$ donc f est dérivable sur $]-\infty,-1[$

et f est dérivable en -1. Donc f est dérivable sur IR et on a:

* pour tout $x \in [-1,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-(x^2-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$.

* Pour tout $x \in]-\infty,-1]$; $f'(x) = \dfrac{-2x(x)-(1-x^2)}{x^2} = \dfrac{-(x^2+1)}{x^2}$.

3) Soit $T: y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ équation de la tangente à ζ en un point $M_0(x_0, y_0)$.

a) $\Delta: 2x-3y+1=0$ ou encore $\Delta: y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

$T \| \Delta$ si et seulement si $f'(x_0) = \dfrac{2}{3}$ deux cas sont possibles.

* Si $x_0 \in]-\infty,-1]$ alors on a: $\dfrac{-(x_0^2+1)}{x_0^2} = \dfrac{2}{3}$ équivaut à

$-3(x_0^2+1) = 2x_0^2$ ou encore $x_0^2 = \dfrac{-3}{5}$ impossible, donc il n'existe pas $x_0 \in]-\infty,-1]$ tel que $f'(x_0)=\frac{2}{3}$.

* Si $x_0 \in [-1,+\infty[$ alors on a: $\frac{x_0^2+4x_0+1}{(x_0+2)^2}=\frac{2}{3}$ ou encore

$3(x_0^2+4x_0+1)=2(x_0+2)^2$ équivaut à $x_0^2+4x_0-5=0$

par suite $x_0=1$ ou $x_0=-5$ or $x_0 \in [-1,+\infty[$ donc $x_0=1$.

Conclusion : la droite Δ est parallèle à la tangente T à la courbe ξ au point A d'abscisse 1.

b) $\Delta' : 4x-5y+1=0$ ou encore $\Delta' : y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$

$T \perp \Delta'$ si et seulement si $\frac{4}{5}\times f'(x_0)=-1$ équivaut à $f'(x_0)=\frac{-5}{4}$;

deux cas possibles.

* Si $x_0 \in]-\infty,-1]$, alors on a: $\frac{-(x_0^2+1)}{x_0^2}=\frac{-5}{4}$

équivaut à $4(x_0^2+1)=5x_0^2$ ou encore $x_0^2=4$ équivaut à

$x_0=2$ ou $x_0=-2$ or $x_0 \in]-\infty,-1]$ donc $x_0=-2$.

* Si $x_0 \in]-1,+\infty]$, alors on a: $\frac{x_0^2+4x_0+1}{(x_0+2)^2}=\frac{-5}{4}$

équivaut à $4(x_0^2+4x_0+1)=-5(x_0+2)^2$

ou encore: $3x_0^2+12x_0+8=0$ comme de discriminait est 12.

Soit : $x_0=-6-2\sqrt{3} \notin [-1,+\infty[$ ou $x_0=-6-2\sqrt{3} \notin [-1,+\infty[$.

Donc il n'existe pas $x_0 \in [-1,+\infty[$ tel que $f'(x_0)=\frac{-5}{4}$.

<u>Conclusion</u> : La droite Δ' est perpendiculaire à la tangente T à la Courbe ζ au point B d'abscisse –2.

6 $f(x)=(x-2)^2(x+3)$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x)=2(x-2)(x+3)+(x-2)^2=(x-2)(2x+6+x-2)=(x-2)(3x+4)$.

1) Soit la droite D d'équation y = -x –3.

La droite D est tangente à ξ_f en un point I. Si on a: $\xi_f \cap D=\{I\}$.

Etudions donc $\zeta_f \cap D$

Soit $M(x,y)\in\xi_f \cap D$ équivaut $\begin{cases} y=f(x) \\ y=-x-3 \end{cases}$ équivaut à $f(x)=-x-3$

Ou encore $(x-2)^2(x+3)=-x-3$ équivaut à $(x+3)\left[(x-2)^2+1\right]=0$

équivaut à $x+3=0$ ou $(x-2)^2+1=0$.

* $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

* $(x-2)^2+1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=-1$ impossible.

Donc $\zeta_f \cap D=\{I(-3,0)\}$.

D'où la droite D est tangente à la droite ζ_f au point $I(-3,0)$.

2) Soit $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est une équation de la tangente M_0 d'abscisse x_0.

$T \| D$ si et seulement si $f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow (x_0-2)(3x_0-4)=-1$

ou encore $3x^2_0-2x_0-7=0$ et le discriminant réduit; $\Delta'=22\rangle 0$

donc l'équation admet deux solutions distincts x'_0 et x''_0; par suite, il existe deux tangentes à ζ_f parallèles à D aux points M'_0 et M''_0 d'abscisses respectifs x'_0 et x''_0.

3) Une tangente est issue d'un point, cela signifie que les coordonnées de ce Point vérifient l'équation de la tangente ; donc T est issue de A signifie que :

$A\in T$ ou encore $0=f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$;

équivaut à $-(x_0-2)^2(3x_0+4)+(x_0-2)^2(x_0+3)=0$

ou encore $(x_0-2)^2\left[-(3x_0+4)+(x_0+3)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x_0-2)^2(-2x_0-1)=0 \Leftrightarrow x_0=2$ ou $x_0=-\frac{1}{2}$.

Donc il existe deux tangente à ξ_f issues de A aux points M_1 et M_2 d'abcisses respectifs $x_0=2$ et $x_0=-\frac{1}{2}$.

7 1) $D_f=\left\{x\in IR \text{ tel que } x\geq 0 \text{ et } \sqrt{x}+1\neq 0\right\}=IR_+$

2) $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur IR_+ donc $x\mapsto\sqrt{x}-1$ est continue sur IR_+ ;

par suite $x \mapsto \left|\sqrt{x}-1\right|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'où $x \mapsto 1-\left|\sqrt{x}-1\right|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

$$\left.\begin{array}{l}\text{on a} : x \mapsto 1-\left|\sqrt{x}-1\right| \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+\\ x \mapsto \sqrt{x}+1 \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+\end{array}\right\}\text{donc } x \mapsto f(x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+$$

3) • $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1-\left|\sqrt{x}-1\right|}{\sqrt{x}+1}}{x}$; x en 0^+ alors $0 < x < 1; \sqrt{x}-1 \langle 0$

donc $\left|\sqrt{x}-1\right| = 1-\sqrt{x}$; par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = 0^+$ donc f n'est pas

dérivable à droite en 0.donc ζ_f admet une demi - tangente verticale dirigée vers haut

• Pour étudier la dérivabilité de f en 1, il est nécessaire de l'étudier à droite et à gauche en 1.

Or lorsque $x \mapsto 1^-$; $\sqrt{x}-1 \langle 0$ donc $\left|\sqrt{x}-1\right| = 1-\sqrt{x}$

et lorsque $x \mapsto 1^+$; $\sqrt{x}-1 \rangle 0$ donc $\left|\sqrt{x}-1\right| = \sqrt{x}-1$. Par suite $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x}-1}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = \dfrac{1}{8} = f'_g(1).$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3\left(1-\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-3}{8}=f'_d(1)$$

$f'_d(1)\neq f'_g(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1 , ainsi ζ_f admet 2 demi- tangentes.

Donc le point d'abscisse 1 est un point anguleux pour la courbe ζ_f.

4) a) *Si $x\in[0,1]$; $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en particulier sur $[0,1]$

et on a : pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

ou encore $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$.

* Si $x\in[1,+\infty[$; $f(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en particulier

sur $[1,+\infty[$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$f'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.$$

b) Une équation de la tangente à la courbe ξ_f au point d'abscisse x_0 est : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. dans notre cas $x_0=4\rangle 1$

Donc $f'(4)=\frac{-3}{2\sqrt{4}\left(\sqrt{4}+1\right)^2}=-\frac{1}{12}$.

Donc $\Delta: y=f'(4)(x-4)+f(4)=-\frac{1}{12}(x-4)+0$ d'où $\Delta: y=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}$.

8 $g(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+...+\frac{1}{2^n}x^n$; $n\in\mathbb{N}$.

1) g(x) est la somme de (n + 1) premier terme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}x\neq 1$. (car $x\neq 2$) et de premier terme 1.

Donc $g(x)=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$. or $x\mapsto\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}x}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition qui est égal à $\mathbb{R}-\{2\}$; et par suite pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$$g'(x)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times(n+1)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}\left(1-\frac{1}{2}x\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)\left[\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}\right]+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\times\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{2}}=\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}-\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{2}}.$$

2) $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}$;

$g(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^2+\ldots+\frac{1}{2^n}x^n$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

pour tout $x\in\mathbb{R}$; $g'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}x+\frac{3}{2^3}x^2+\ldots+\frac{n}{2^n}x^{n-1}$.

Donc on remarque que $S=g'(1)$. Or $g'(1)=\dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$

$$g'(1)=4\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{n}{2}-n-1\right)+2.$$

$$g'(1)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{n}{2}-1\right)+2 \text{ d'où } S=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$$

9 1) a) $x\mapsto\sqrt{x}\neq 0$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par suite $x\mapsto\frac{x}{\sqrt{x}}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$x\mapsto 2\sqrt{x}$ est différente de 0 et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f' est continue sur son domaine.

2) a) $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0}}$:

est l'équation de la tangente à ξ_f au point M_0 d'abscisse x_0.

d'où $T: y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ou encore : $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0}$.

b) $D: y=\frac{1}{2}x$.

La tangente à (ζ) au point M_0 d'abscisse x_0 est parallèle à D si et seulement si $f'(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x_0}=1$ d'où $x_0=1$;

Donc il existe une tangente T_1 à (ζ) parallèle à D d'équation : $T_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

c) La tangente à (ζ) au point M_0 d'abscisse x_0 est parallèle à une direction

donnée de coefficient directeur m si et seulement si $f'(x_0)=m$

équivaut à $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=m$.

* Si $m\leq 0$ alors il n'existe pas de tangente à (ζ) parallèle à une droite de coefficient m.

Donc on peut déterminer des points M_0 d'abscisse $x_0 = \frac{1}{4m^2}$.

avec $m \rangle 0$, de la courbe (ζ) où la tangente est parallèle à une directeur donnée de coefficient directeur m.

d) La tangente T en M_0 d'abscisse x_0 à (ξ) passe par $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$; cela

signifie que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \times 0 + \frac{1}{2}\sqrt{x_0} \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Donc il existe une seule tangente passant par $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ d'équation :

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3) a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x) + g(x) - g(x-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{-h}$.

En posant $t = -h$; $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = g'(x)$.

Or g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{h} = 2g'(x)$.

b) On a $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$ donc d'après 3) a) on a :

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x+h}{\sqrt{x+h}} - \frac{x-h}{\sqrt{x-h}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sqrt{x-h} - (x-h)\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}.\sqrt{x-h}} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sqrt{x-h} - (x-h)\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x^2 - h^2}}$$

$= 2f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)\sqrt{x-h} - (x-h)\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x^2} - h^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

10

1) $f(1)=1+1+1^2+...+1^{50}=\sum_{k=0}^{k=50}1^k=\sum_{k=0}^{k=50}1=51.$

2) a) Pour donner une autre expression de f, il suffit de voir f comme la somme de 51 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme de raison x ; soit $f(x)=\sum_{k=0}^{k=50}x^k=\frac{1-x^{51}}{1-x}.(x\neq 1)$

b) Pour x = 2 on a : $f(2)=\frac{1-2^{51}}{1-2}$. Soit $S_2=\sum_{k=0}^{50}2^k=2^{51}-1.$

3) a) Le dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées, soit pour f :

$f'(x)=0+1+2x+3x^2+...+50x^{49}$. On a donc $f'(1)=1+2+3+...+50.$

Ce qui correspond à la somme des 50 premiers entiers, soit de 50 premiers termes de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 : $f'(1)=\frac{n(n+1)}{2}$; $n=50$ d'où $f'(1)=1275.$

b) Pour déterminer $f'(x)$ à partir de l'expression 2, il suffit d'écrire :

$$f(x)=\frac{1-x^{51}}{1-x}\text{ pour } x\neq 1;\text{ d'où } f'(x)=\frac{-51x^{50}(1-x)-(1-x^{51})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-51x^{50}(1-x)+(1-x^{51})}{(1-x)^2}=\frac{50x^{51}-51x^{50}+1}{(1-x)^2}.$$

En particulier pour la somme $S_3=\sum_{k=1}^{50}2^{k-1}$

D'autre part, on a : $f'(2)=\frac{50\times 2^{51}-51\times 2^{50}+1}{(1-2)^2}=50\times 2^{51}-51\times 2^{50}+1$

Et finalement : $1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+50.2^{49}=f'(2)=2^{50}.49+1.$

11

1) $Df_m(x)=\mathbb{R}-\{2\}.$

$\lim_{x\to 2^+}(x^2+m(2+x))=4+4m$ et $\lim_{x\to 2^+}2-x=0^-$; trois cas sont possibles :

<u>1^{er} cas</u> : $4+4m>0 \Leftrightarrow m>-1$ donc $\lim_{x\to 2^+}f_m(x)=-\infty.$

<u>2^{ème} cas</u> : $4+4m<0 \Leftrightarrow m<-1$ donc $\lim_{x\to 2^+}f_m(x)=+\infty.$

$\underline{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$: $4+4m=0 \Leftrightarrow m=-1$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f_{-1}(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x-2}{2-x}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+1)}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2^+} -x-1=-3.$

2) $f_m(x)$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine, donc pour tout $x\in \mathrm{IR}-\{2\}$, on a :

$$f'_m(x)=\frac{(2x+m)(2-x)+x^2+m(2+x)}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x+4m}{(2-x)^2}.$$

3) $f'_m(x_0)=\dfrac{-x_0^2+4x_0+4m}{(2-x_0)^2}.$

$$f'_m(4-x_0)=\frac{-(4-x_0)^2+4(4-x_0)+4m}{\left[2-(4-x_0)\right]^2}=\frac{-x_0^2+8x_0-16+16-4x_0+4m}{(-2+x_0)^2}$$

$=\dfrac{-x_0^2+4x_0+4m}{(2-x_0)^2}=f'_m(x_0)$. donc les tangentes à ξ_m en M_0 et en N_0

D'abscisses respectifs x_0 *et* $4-x_0$ *sont parallèles.*

4) La tangente à ζ_m au point d'abscisse (-2), a pour coefficient directeur le réel $-\dfrac{1}{2}$ signifie que ; $f'(-2)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $\dfrac{-4-8+4m}{(2+2)^2}=-\dfrac{1}{2}$

ou encore $4m-12=-8$ soit $m=1$.

5)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2+x$	$-$	0	$+$

Donc $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{2-x} & \text{si } x\le -2\\[2mm] \dfrac{x^2+x+2}{2-x} & \text{si } -2\le x\le 0\\[2mm] ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2} & \text{si } x\rangle 0\end{cases}$

a) **Continuité de g en 0** :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}\right]=1.$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x^2+x+2}{2-x}\right)=1=g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

Donc g est continue en 0 pour tout $a\in \mathbb{R}$.

Dérivabilité de g en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} a-\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}=a=g'_d(0).$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x^2+x+2}{2-x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+2}{2-x}=1=g'_g(0).$

Donc g est dérivable en 0 si et seulement si $g'_d(0)=g'_g(0)$ équivaut à $a=1$.

* Dérivabilité de g en –2 :

- $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{\dfrac{x^2-x-2}{2-x}-1}{x+2}=$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{x^2-x-2-2+x}{(x+2)(2-x)}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2-x)}=-1=g'_g(-2).$

- $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}=\dfrac{x^2+x+2-2+x}{(x+2)(2-x)}$

$=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x(x+2)}{(2-x)(x+2)}=-\dfrac{1}{2}=g'_d(-2).$

$g'_g(-2)\neq g'_d(-2)$ donc g n'est pas dérivable en -2.

c) * Si $x\in\left]-\infty,-2\right]; g(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2-x}$ est la restriction d'une fonction

rationnelle

donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ donc g l'est sur $\left]-\infty,-2\right[$; et on a

$g'(x)=f'_{-1}(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{(2-x)^2}.$

* Si $x\in]-2,0[\,;g(x)=\dfrac{x^2+x+2}{2-x}$ est une fonction rationnelle qui

est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ en particulier sur $]-2,0[$; et on a :

$$g'(x)=f'_{-1}(x)=\frac{-x^2+4x+4}{(2-x)^2}.$$

* Si $x\in]0,+\infty[\,;g(x)=ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}$.

$x\mapsto ax+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$.

$x\mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en particulier $]0,+\infty[$.

$x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$;

Donc $x\mapsto ax+1-\dfrac{x\sqrt{x}}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;

et on a : $$g'(x)=a-\frac{\left(x\sqrt{x}\right)'\left(1+x^2\right)-2x\left(x\sqrt{x}\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=a-\frac{\left(\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}\right)\left(1+x^2\right)-2x^2\sqrt{x}}{\left(1+x^2\right)^2}=a-\frac{\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}\left(1+x^2\right)-2x^2\sqrt{x}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=a-\frac{\sqrt{x}\left(3-x^2\right)}{2\left(1+x^2\right)^2}.$$

12 a) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition, par suite elle est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$; et on a pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$;

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x-1)-\left(x^2+4x+3\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-7}{(x-1)^2}.$$

b) $\Delta : y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=-7$ et $f(0)=-3$ d'où $\Delta : y=-7x-3$ est l'équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0.

c) Soit $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ équation de la tangente à ζ_f au point M_0 d'abscisse x_0.

La droite (T) est perpendiculaire à (Δ) si et seulement si :

$-7\times f'(x_0)+1=0$ équivaut à $f'(x_0)=\frac{1}{7}$ ou encore $\frac{x_0^2-2x_0-7}{(x_0-1)^2}=\frac{1}{7}$

soit $7x_0^2-14x_0-49=(x_0-1)^2$ équivaut à $3x_0^2-6x_0-25=0$;

or le déterminant réduit est $84 > 0$

Donc les points de ζ_f où la tangente est perpendiculaire à (Δ) sont les points M'_0 et M''_0 d'abscisse respectifs:

$x'_0=\frac{3-2\sqrt{21}}{3}$ et $x''_0=\frac{3+2\sqrt{21}}{3}$.

d) Soit l'équation (T), l'équation de la tangente à ζ_f en un point M_0 quelconque d'abscisse x_0.

$A(1,\alpha)\in(T)$ signifie $\alpha=f'(x_0)(1-x_0)+f(x_0)$ équivaut à

$\alpha=\frac{x_0^2-2x_0-7}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\frac{x_0^2+4x_0+3}{x_0-1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\alpha=\frac{-x_0^2+2x_0+7+x_0^2+4x_0+3}{x_0-1}=\frac{6x_0+10}{x_0-1}$.

Donc $A(1,\alpha)$ n'appartient à aucune tangente à ζ_f ;

si $\alpha\neq\frac{6x_0+10}{x_0-1}$ avec $x_0\neq 1$.

2) $(D): y=\sqrt{2}(x-1)+6$.

a) Soit $M(x,y)\in D\cap\zeta_f$ signifie que $\begin{cases} y=\sqrt{2}(x-1)+6 \\ y=f(x) \end{cases}$

équivaut à $\sqrt{2}(x-1)+6=\frac{x^2+4x+3}{x-1}$;ou encore $\sqrt{2}(x-1)^2+6(x-1)=x^2+4x+3$

soit $(\sqrt{2}-1)x^2+2(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}-9=0$.

$\Delta'=(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-9)=8\sqrt{2}-8\rangle 0$.

Donc l'équation admet deux racines distincts x'et x"et par suite la droite (D) coupe (ζ_f) en 2 points distincts M'et M" d'abscisses respectifs x 'et x".

b) • x 'et x" sont les solutions de l'équation

$$\left(\sqrt{2}-1\right)x^2+2\left(1-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}-9=0$$

$$\text{donc } S=x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-1}=2.$$

• Les tangentes à ξ_f en M' et M'' sont parallèles si et seulement si :

$$f''(x')=f'(x'')$$

$$\text{On a}: f'(x')=\frac{x'^2-2x'-7}{(x'-1)^2}.$$

$$f'(x'')=f'\,(2-x')=\frac{(2-x')^2-2(2-x')-7}{(2-x'-1)^2}\quad \text{car } x'+x''=2$$

$$=\frac{x'^2-4x'+4-4+2x'-7}{(1-x')^2}=\frac{x'^2-2x'-7}{(x'-1)^2}=f'(x').$$

Donc les tangentes à ζ_f en M' et M" sont parallèles.

3) $h(x)=\dfrac{x^2+4|x|+3}{|x|-1}.$

a) • $D_h=\{x\in \mathbb{R} \text{ tel que } |x|-1\neq 0\}$;

$|x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ donc $D_h=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

• Dérivabilité de h en 0.

Il est nécessaire d'étudier la dérivabilité de h à droite et à gauche en 0.

• Si $x\mapsto 0^+$; alors $|x|=x$ et par suite $h(x)=f(x)$ or d'après 1) a);

f est dérivable sur IR - $\{1\}$, en particulier en 0 donc $h'_d(0)=f'(0)=-7$.

• Si $x\mapsto 0^-$ alors $|x|=-x$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x^2-4x+3}{-x-1}+3}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4x+3-3x-3}{-x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-7x}{-x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-7)}{-x(x+1)}=7=h'_g(0)$$

$h'_d(0)\neq h'_g(0)$ donc n'est pas dérivable en 0.

b) $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{-x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

* Si $x > 0$, $h(x)=f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$, en particulier sur : $]0,+\infty[-\{1\}$.

* Si $x < 0$, $x \mapsto \dfrac{x^2-4x+3}{-x-1}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ en particulier sur $]-\infty,0[-\{-1\}$ d'ou h est dérivable sur $]-\infty,0[-\{-1\}$

* D'après 3) a), h n'est pas dérivable en 0.

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$; et on a:

- Pour tout $x\in]0,+\infty[-\{1\}; h'(x)=f'(x)=\dfrac{x^2-2x-7}{(x-1)^2}$.
- Pour tout $x\in]-\infty,0[-\{-1\}$;

$$h'(x)=\frac{(2x-4)(-x-1)+x^2-4x+3}{(-x-1)^2}=\frac{-x^2-2x+7}{(x+1)^2}.$$

c) Soit $T: y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$, l'équation de la tangente à ξ_h au point M_0 d'abscisse x_0 et soit D_1 la droite d'équation $y=-x$;

$D \| T$ si et seulement si $h'(x_0)=-1$.

Si $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}; h'(x_0)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2-2x_0-7}{(x_0-1)^2}=-1$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-7=-(x_0-1)^2 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0$ donc $x_0=-1$ ou $x_0=3$.

Donc les tangente T_1 et T_2 à ζ_h aux points M_1 et M_2 d'abscisses respectifs $x_1=-1$ et $x_2=3$ sont parallèle à la droite D_1.

d) * Si $x\in]0,+\infty[-\{1\}; h'(x)=\dfrac{x^2-2x-7}{(x-1)^2}$

sur cet intervalle, le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur : x^2-2x-7

or $x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow x'=1-2\sqrt{2}$ et $x''=1+2\sqrt{2}$.

x	0		1		$1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
h' (x)	‖	−	‖	−	0	+	

* Si $x \in \left]-\infty, 0\right[- \{1\}$, $h'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 7}{(x+1)^2}$; sur cet intervalle, le signe

de h'(x) est celui du némérateur $-x^2 - 2x + 7$ or $-x^2 - 2x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x' = 2\sqrt{2} - 1$ et $x'' = -2\sqrt{2} - 1$.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}-1$		-1		0
h' (x)		−	0	+	‖	+	

Donc le signe de h' (x) pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$ est:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}-1$		-1		0		1		$1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
h' (x)		−	0	+	‖	+	‖	−	‖	−	0	+	

13
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{2|x| - 5}{x - 2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) a) * Continuité de f en $x_0 = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - x + 3\right) = 3 = f(1)$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2|x| - 5}{x - 2} = \dfrac{-3}{-1} = 3$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en $x_0 = 1$.

* **Dérivabilité de f en $x_0 = 1$.**

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(x-1)}{x - 1} = 1 = f'_d(1)$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\dfrac{2|x| - 5}{x - 2} - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x - 5 - 3x + 6}{(x-2)(x-1)}$

$= \lim\limits_{1^-} \dfrac{-(x-1)}{(x-2)(x-1)} = 1 = f'_g(1)$. et $f'_d(1) = f'_g(1) = 1$ donc f est dérivable en 1.

* **Continuité de f en** $x_0 = 0$.

$0\in\left]-\infty,1\right[$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2|x|-5}{x-2}=\dfrac{5}{2}=f(0)$ donc f est continue en 0

* **Dérivabilité de f en 0 :**

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{2x-5}{x-2}-\dfrac{5}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x-10-5x+10}{2(x-2)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}(x-2)}=\dfrac{1}{4}=f'_d(0).$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{-2x-5}{x-2}-\dfrac{5}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-4x-10-5x+10}{2x(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-9x}{2x(x-2)}=\dfrac{9}{4}=f'_g(0).$

$f'_d(0)\neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) La courbe ξ admet une tangente Δ au point d'abscisse 1 car f est dérivable d'où $\Delta: y=f'(1)(x-1)+f(1)$ or $f'(1)=1$ et $f(1)=3$.

Donc $\Delta: y=x+2$ est l'équation de la tangente à ξ_f au point A d'abcisse 1.

2) a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & \text{si } x\in\left[1,+\infty\right[\\ \dfrac{2x-5}{x-2} & \text{si } x\in\left[0,1\right[\\ \dfrac{-2x-5}{x-2} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right] \end{cases}$

* Si $x\in\left]1,+\infty\right[$; $f(x)=x^2-x+3$ est la restruction d'une fonction polynôme qui est dérivable sur IR donc f l'est sur $\left]1,+\infty\right[$.

* Si $x\in\left]0,1\right[$; $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$ est la restruction d'une une fonction rationnelle, qui est dérivable sur IR $-\{2\}$, donc f l'est sur $\left]0,1\right[$.

* Si $x\in\left]-\infty,0\right[$; $f(x)=\dfrac{-2x-5}{x-2}$ est la restruction d'une fonction rationnelle, qui est dérivable sur IR $-\{2\}$, donc f l'est sur $\left]-\infty,0\right[$.

- Calcul de la fonction dérivée $f'(x)$.

* Si $x\in]1,+\infty[$; $f'(x)=2x-1$.

* Si $x\in]0,1[$; $f'(x)=\dfrac{2(x-2)-(2x-5)}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

où on utilise $f'(x)=\dfrac{2x(-2)-(-5)\times 1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

* Si $x\in]-\infty,0[$; $f'(x)=\dfrac{-2(x-2)-(-2x-5)}{(x-2)^2}=\dfrac{9}{(x-2)^2}$.

b) $\Delta: y=x+2$ est tangente à ζ en un autre point B d'abscisse x_0 signifie que $f'(x_0)=1$.

* Si $x_0\in]1,+\infty[$; $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow 2x_0-1=1 \Leftrightarrow x_0=1$ c'est l'abscisse du point A.

* Si $x_0\in]0,1[$; $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_0-2)^2}=1 \Leftrightarrow (x_0-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x_0-2=1$ ou $x_0-2=-1 \Leftrightarrow x_0=5\notin]0,1[$ ou $x_0=1$ (abscisse de A)

* Si $x_0\in]-\infty,0[$; $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{9}{(x_0-2)^2}=1 \Leftrightarrow 9=(x_0-2)^2$

$\Leftrightarrow x_0-2=3$ ou $x_0-2=-3 \Leftrightarrow x_0=5\notin]-\infty,0[$ ou $x_0=-1\in]-\infty,0[$

Donc Δ est tangente à ξ en un autre point $B(-1,1)$.

3) a) • Soit T_α l'équation de la tangente à ξ au point M d'abscisse $\alpha>1$.

$T_\alpha: y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$; $\alpha>1$ donc $f'(\alpha)=2\alpha-1$

et $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha+3$ d'où $T_\alpha: y=(2\alpha-1)(x-\alpha)+\alpha^2-\alpha+3$.

Par suite $T_\alpha: y=(2\alpha-1)x-\alpha^2+3$.

• Soit T'_α l'équation de la tangente à ξ au point N d'abscisse $\dfrac{1}{\alpha}$,

Donc $T'_\alpha: y=f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)+f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

$\alpha<1$ donc $0<\dfrac{1}{\alpha}<1$ par suite $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\alpha}-2\right)^2}=\dfrac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\frac{2}{\alpha}-5\alpha}{\frac{1}{\alpha}-2}=\frac{2-5}{1-2\alpha}\ \text{d'ou } T'_\alpha : y=\frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{2-5\alpha}{1-2\alpha}$$

$$\text{par suite } T'_\alpha : y=\frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2}x+\frac{10\alpha^2-10\alpha+2}{(1-2\alpha)^2}.$$

b) $A(1,3)$. Soit $M(x,y)\in(OA)$ signifie que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires

signifie que $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 3 \end{vmatrix}=0$ d'où $(OA): 3x-y=0$ ou encore $(OA): y=3x$.

- T_α est parallèle à (OA) si et seulement si $2\alpha-1=3$ d'où $\alpha=2$.
- Soit T_α et T'_α respectivement les droites T_α et T'_α avec $\alpha=2$;

donc $T_2: y=3x-1$; $T'_2: y=\frac{4}{9}x+\frac{22}{9}$.

Soit $H(x,y)\in T_2\cap T'_2$ signifie que $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=\frac{4}{9}x+\frac{22}{9} \end{cases}$

équivaut à $3x-1=\frac{4}{9}x+\frac{22}{9}$ ou encore $27x-9=4x+22$;

d'où $x=\frac{31}{23}$ et par suite $y=3\times\frac{31}{23}-1=\frac{70}{23}$ d'où $H\left(\frac{31}{23},\frac{70}{23}\right)$.

4) * Si $x\in]0,1[$; $f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ est la restruction d'une fonction rationnelle qui est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$, donc f l'est sur $]0,1[$ par suite f est deux fois dérivable sur $]0,1[$.

* Si $x\in]1,+\infty[$; $f'(x)=2x-1$ est la restruction d'une fonction polynôme qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f l'est sur $]1,+\infty[$ et par suite f deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ d'où f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

* dérivabilité de la fonction f ' à droite en 0.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(4-x)}{4x(x-2)^2}=\frac{1}{4}=f''_d(0).$$ *

Donc f ' est dérivable à droite en 0 et par suite f est deux fois dérivable à droite en 0

Dérivabilité de la fonction f' en 1 :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=2=f''_d(1).$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{(x-2)^2}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(3-x)(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3-x}{(x-2)^2}=2=f''_g(1).$$

$f''_d(1)=f''_g(1)$ donc f' est dérivable en 1 et par suite f est deux fois dérivable en 1.

Conclusion : On a f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et f est deux fois dérivable à droite en 0 et en 1; donc f est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

- Pour tout $x\in[0,1]; f''(x)=\left[\frac{1}{(x-2)^2}\right]'=\frac{-2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{-2}{(x-2)^3}.$
- Pour tout $x\in[1,+\infty[$; $f''(x)=(2x-1)'=2.$

Sens de variation – Extrema

14 1) $D_f=\{x\in IR \text{ tel que } x\ (x^2-x-2)\neq 0\}\cup\{2\}$

$x(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ où $x^2-x-2=0.$

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ où $x=2$. D'où $D_f=IR^*-\{-1\}$.

1) * $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ où $x=2$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2-2x	+	0	−	0	+
$\|x^2+-2x\|$	x^2-2x		$-x^2+2x$		x^2-2x

Continuité de f en 2 :

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x}{x(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+2x}{x(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)}{x(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2^-}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3}$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ dont f n'est pas continue en 2 par

suite elle n'est pas dérivable en 2.

3) * Si $x \in]-\infty, 0[\cup]2,+\infty[\setminus \{-1\}$.

* on a : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est une fonction rationnelle dont dérivable sur :

$]-\infty,0[\cup]2,+\infty[\setminus\{-1\}$ et on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$

* Si $x \in]0,2[$; on a $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ est une fonction rationnelle donc

dérivable sur $]0,2[$ et on a pour tout $x \in]0,2[$; $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$.

x	$-\infty$		-1			0			2		$+\infty$
f' (x)		-	||		-	||		+	|	-	
f (x)	0 $\searrow$ $-\infty$		||	$+\infty$ $\searrow$ 1		||	-1 $\nearrow$		$1/3$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0 \ ; \quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x+1}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+1}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+1}=1 \ ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0.$$

15 a) Faux car $f(1) = \dfrac{2}{3}$.

b) Vrai car f ' s'annule en x = -2 et change de signe.

c) Faux car f ' (x) < 0 sur $]1, +\infty[$.

d) Vrai : un maximum en 2 et un minimum en -2.

16 1) $f(x) = \dfrac{x^3+9x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine IR et on a :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+9)(x^2+1)-(x^3+9x)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-6x^2+9}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$$

D'où a = 3.

2) a) Equation de la tangente à la courbe au point d'abscisse o :
$y = 9(x-0) + 0$ soit $y = 9x$.

b) $g(x) = f(x) - 9x$ d'où $g'(x) = f'(x) - 9$ et par suite $g''(x) = f''(x)$.

c) * $f''(x) = \left(\dfrac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}\right)' = 2\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+1}\right)\left(\dfrac{(2x)(x^2+1)-(x^2-3)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$

$$=2\left(\frac{x^2-3}{x^2+1}\right)\left(\frac{8x}{(x^2+1)^2}\right).$$

sur $I=\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$; $x^2-3<0$ donc le signe de f'' est celui de $(-x)$

* on a $g''(x) = f''(x)$ donc le signe de g'' est celui de f''.

Donc si $x < 0$; $g''> 0$ et par suite la fonction g' est strictement croissante sur $\left[-\sqrt{3},0\right]$

Si $x > 0$; $g'' < 0$ et par suite la fonction g' est strictement décroissante sur $\left[0, \sqrt{3}\right]$

* La fonction g' a donc un maximum en 0 :
$g'(0) = f'(0) - 9 = 9 - 9 = 0$ donc g' est négative puisque son maximum est 0.

Donc la fonction g est décroissante sur $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

* Comme $g(0) = f(0) - 0 = 0$, la fonction g est positive pour $x < 0$ et négative pour $x > 0$.

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
g''		+	0	-	
$g'(x)$		↗	0	↘	
$g(x)$		↘	0	↘	

* Position de la courbe ζ_f par rapport à la tangente $f(x) - 9x = g(x)$.

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
g (x) = f (x) -9x	+	0	-
Position De la courbe ζ_f Par rapport à La tangente	ζ_f est au dessus de la tangente	coïncident	ζ_f est au dessous De la tangente

17 1) * A (1, 0) $\in \zeta_f$ signifie que f (1) =0.

* B(0, 1)$\in$ ζ_f signifie que f (0) = 1.

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ c=1 \end{cases} \quad \text{donc } b=-1-a.$$

2) f (x) = $ax^2-(1+a)x+1$.

d'autre part $f'(x) = 2ax -1-a$.

f ' (x) s'annule et change de signe en $x = \dfrac{1+a}{2a}$

Donc les coordonnées de l'extremum sont $x = \dfrac{1+a}{2a}$ et ; $y=\dfrac{4a-(1+a)^2}{4a}$.

3) a) soit $E = \{M(x,y) \text{ tel que } x=\dfrac{1+a}{2a} \text{ et } y=\dfrac{4a-(1+a)^2}{4a} \text{ avec } a\in \mathbb{R}^*\}$

l'ensemble des points associés à ces extremums :

$$M(x,y)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+a}{2a} \\ y=\dfrac{4a-(1+a)^2}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+a}{2a} \\ y=1-\dfrac{(1+a)^2}{4a} \end{cases}$$

$$x=\frac{1+a}{2a} \Leftrightarrow 1+a=2ax \Leftrightarrow a=\frac{1}{2x-1}$$

donc $y = 1 - \dfrac{4a^2x^2}{4a} = 1-ax^2 = 1-\dfrac{x^2}{2x-1}$.

donc l'ensemble $E = \{M(x,y) \text{ tel que } y=1-\dfrac{x^2}{2x-1}\}$.

b) soit $g(x) = 1-\dfrac{x^2}{2x-1}$.

$x \mapsto \dfrac{-x^2}{2x-1}$ est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine $IR-\{\frac{1}{2}\}$ et par suite $x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $IR-\{\frac{1}{2}\}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

et on a : pour tout $x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$; $g'(x)=\frac{2(x-x^2)}{(1-2x)^2}$.

18

1) Vrai : $f(x)=\frac{2}{x}+x$ et $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1$ d'où $f'(1)=-1$.

2) Faux : $f(x)=\sqrt{4x+1}$ alors $f'(x)=\frac{(4x+1)'}{2\sqrt{4x+1}}=\frac{4}{2\sqrt{4x+1}} \neq \frac{1}{2\sqrt{4x+1}}$

3) Faux : $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ alors $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$f'(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}} \neq \sqrt{x}$$

4) Faux : contre exemple $f(x)=5$ dérivable sur IR et f est constante.

5) Vrai : d'après le théorème de cours.

6) Faux : contre exemple : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ et $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ alors f

est décroissante.

19

$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+3}$; $D_f=IR$.

1) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur IR et on a :

$$f'(x)=\frac{a(x^2+x+3)-(2x+1)(ax+b)}{(x^2+x+3)^2}=\frac{ax^2+ax+3a-2ax^2-2bx-ax-b}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx+3a-b}{(x^2+x+3)^2}.$$

2) f admet un extremum égal à 1 en $x_0=0$ signifie que :

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3a-b}{9}=0 \\ \dfrac{b}{3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

3) Pour a = 1 ; b = 3 on a : $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+x+3}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2-6x}{(x^2+x+3)^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-6$.

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{11}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4) $f'(-1)=\dfrac{5}{9}$; $A(-1, f(-1))$ or $f(-1) = \dfrac{2}{3}$ donc $A(-1, \dfrac{2}{3})$.

la tangente à ζ_f en A est : $y = \dfrac{5}{9}(x+1)+\dfrac{2}{3}$ où encore $y=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{11}{9}$.

5) $a = 1$; $b \in$ IR.

$f(x) = \dfrac{x+b}{x^2+x+3}$ et $f'(x)=\dfrac{-x^2-2bx+3-b}{(x^2+x+3)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-2bx+3-b=0$ or $\Delta'=b^2+3-b=b^2-b+3$.

$\delta=1-12=-11<0$ donc $b^2-b+3>0$ pour tout $b \in$ IR

Donc f’ (x) s’annule pour deux valeurs x’ et x ″ et change de signe ;
Donc f admet toujours deux extremums x’ et x ″.

20 1) $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2+2x\sqrt{x}-2x-1$; $D_g = \{x \in \mathrm{IR},$ tel que $x \geq 0\} = \mathrm{IR}_+$.

a) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur IR^*_+ et par suite $x \mapsto 2x\sqrt{x}$ est dérivable sur IR^*_+ ; $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2-2x-1$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR, en particulier sur IR_+ ;

d'où $x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{2}x + 2\sqrt{x} - 2 = -2 = g'(0)$

par suite g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x)=-x+2\sqrt{x}+2x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2$

$g'(x)=-x+2\sqrt{x}+\dfrac{x}{\sqrt{x}}-2=-x+3\sqrt{x}-2.$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -x+3\sqrt{x}-2=0.$ on pose $\sqrt{x}=t$ donc $x=t^2$

donc l'équation devient : $-t^2+3t-2=0$;

$a+b+c=0$ donc $t=1$ ou $t=2$.

Factorisons : $-x+3\sqrt{x}-2$;

il suffit de factoriser $-t^2+3t-2=-(t-1)(t-2)$

d'où $-x+3\sqrt{x}-2=-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$.

* $\sqrt{x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$

* $\sqrt{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4.$

x	0		1		4		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$		$-$	0		0	$+$	
$\sqrt{x}-2$		$-$		$-$		$+$	
$-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$		$-$		$+$		$-$	

Donc

x	0		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(-\dfrac{1}{2}+2\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2})=-\infty$

La fonction $g'(x)$ s'annule et change de signe en $x_0=1$ et $x_0=4$;
Donc la fonction g admet des extremums en ces points, et d'après le Tableau de variation de g, on a un minimum local en $x_0=1$ et un Maximum absolu (-1) en $x_0=4$

2) a) $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{4}{5}x^2\sqrt{x}-x^2-x$; $D_f=\mathbb{R}_+$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{5}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}\frac{x^2}{\sqrt{x}} - 2x - 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{5}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x\sqrt{x} - 2x - 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x\sqrt{x} - 2x - 1 = g(x) ;$$

or d'après le tableau de variation de g étudié dans la 1[ère] question b) on a : $g(x) < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ puisque -1 est un maximum absolu pour g. ; par suite $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

x	0	$+\infty$
f'(x)	-	
f (x)	0 ↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} - x^2 - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

b) La fonction f' x) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction f n'admet pas des extremums.

3) Soit T: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ équation de la tangente à la courbe ζ_f en un point M_0 d'abscisse x_0 et soit $\Delta : y = -x + 3$

$T // \Delta$ si et seulement si $f'(x_0) = -1$ ou encore

$$-\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0\sqrt{x_0} - 2x_0 - 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0\sqrt{x_0} - 2x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0\left(-\frac{1}{2}x_0 + 2\sqrt{x_0} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } -\frac{1}{2}x_0 + 2\sqrt{x_0} - 2 = 0.$$

On pose $t = \sqrt{x_0} \Leftrightarrow x = t^2$

$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t - 2 = 0 \text{ ou encore } -t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow -(t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

donc il existe deux tangentes T_1 et T_2 à ζ_f aux points M_1 et M_2 (d'abscisse respectifs $x_1=0$ et $x_2= 4$) qui sont parallèles à Δ.

21 $f_m(x) = (2m - 3)x^3 + 3x^2 - 3mx + m$.

1) $f_m(x)$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR ;
et on a pour tout $x \in$ IR : $f'(x) = 3(2m-3)x^2 + 6x - 3m$.
$f_m(x)$ possède un seul extremum si et seulement si $f'_m(x)$ s'annule et change de signe en un seul point et ceci n'est pas vraie que si $f'_m(x)$ est une fonctionne premier degré, par suite $m = \frac{3}{2}$.

2) $f_m(x)$ est décroissante sur IR si et seulement si $f'_m(x) < 0$ pour tout $x \in$ IR :

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2m - 3)x^2 + 6x - 3m = 0.$

$\Delta' = 9 + 9m(2m - 3) = 18m^2 - 27m + 9.$

$f'_m(x) < 0$ si et seulement si $\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 2m - 3 < 0 \end{cases}$

(car si $\Delta' \leq 0$, le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le signe de a)

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (2m^2 - 3m + 1) = 0$ d'où $m = 1$ ou $m = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Δ'		+	0	−	0	+	

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Donc $f'_m(x) < 0$ si et seulement si $\begin{cases} m \in [\frac{1}{2}, 1] \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [\frac{1}{2}, 1]$

Par suite $f_m(x)$ est décroissante sur IR si et seulement si $m \in [\frac{1}{2}, 1]$.

3) a) $g(x) = -x^3 + 3|x^2 - x| + 1$

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	
$\lvert x^2 - x \rvert$		x^2-x		$-x^2$ +x		x^2-x	

Et par suite $g(x) = \begin{cases} -x^3+3x^2-3x+1 \text{ si } x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[\\ -x^3-3x^2+3x+1 \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$

* si $x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$; $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

$g'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2 \leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$				$\searrow$	

* Si $x \in [0,1]$; $g(x) = -x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$g'(x) = -3x^2 - 6x + 3 = -3(x^2 + 2x - 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$; $\Delta' = 2$

$x' = -1 - \sqrt{2}$ et $x'' = -1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$			
$g(x)$						$\nearrow$		$\searrow$			

b) D'où le tableau de variation de la fonction g sur IR est :

x	$-\infty$		0		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$g(-1+\sqrt{2})$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 3x}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} (-x^2 + 3x - 3) = -3 = g_{g'(0)}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-x^3 - 3x^2 + 3x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} (-x^2 - 3x + 3) = 3 = g_d'(0)$

$g'_g(0) \neq g_d'(0)$ alors g n'est pas dérivable en 0, donc le point I (0,1) est un point anguleux de la courbe de g et les vecteurs des demi tangentes sont : $\vec{U}_g \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$*\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^3+3x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^3+3x(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(x^2+x+1)+3x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}-x^2-x-1+3x=0=g_d'(1)$$

$$*\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^3-3x^2+3x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^3+3x(1-x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)(x^2+x+1)+3x(1-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-x^2-x-1-3x=6=g_g'(1)$$

$g_g'(1)\neq g_d'(1)$ alors g n'est pas dérivable en 1, donc le point J(1,0) est un point anguleux de la courbe de g et les vecteurs des demi tangentes sont : $\vec{V}_g\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_d\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

22

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, une polynôme donc dérivable sur IR ;
$f'(x) = 2ax + b$

* f admet un extremum en $x_0=\frac{1}{2}$ alors $f'(\frac{1}{2})=0$

* ζ_f passe par A (1,1) signifie que f (1)=1.

* ζ_f admet en A (1,1) une tangente parallèle à
$\Delta: y=x+1 \Leftrightarrow f'(1)=1$

$$\text{d'où}\begin{cases}f'(\frac{1}{2})=0\\ f(1)=1\\ f'(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a\times\frac{1}{2}+b=0\\ a+b+c=1\\ 2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0 & (1)\\ 2a+b=1 & (2)\\ a+b+c=1\end{cases}$$

(1)-(2) donne $-a=-1 \Leftrightarrow a=1$ or $a+b=0$ donc $b=-1$
$a+b+c=1$ donne $c=1$ d'où $f(x)=x^2-x+1$.

2) a) $g(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$; $D_g=\{x\in IR$ tel que $x^2-x+1\neq 0\}$

$x^2-x+1=0$; $\Delta=1-4=-3<0$ donc $D_g=IR$

La fonction g est rationnelle donc elle est dérivable sur D_g = IR et on a : Pour tout x IR ; $g'(x)=\frac{x^2-x+1-(2x-1)x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$

Le signe de g(x) est le même que celui de $1-x^2$.
$1-x^2=0$ *équivaut* à $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $g(-1) = -\frac{1}{3}$ et $g(1) = 1$.

D'après le tableau de variation de g on a : 1 est un maximum absolue

Et $-\frac{1}{3}$ est un minimum absolu pour la fonction g.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$

b) $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$

$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1$

donc $\frac{n+1}{n}$ et $\frac{n+2}{n+1}$ sont deux réels $\in]1, +\infty[$

On a : $n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$ or g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

donc $g\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > g\left(\frac{n+1}{n}\right)$

23 1) $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - 3}{x - 1}$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine $\mathbb{R} - \{1\}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$;

$$f'_m(x) = \frac{(2x+m)(x-1) - (x^2 + mx - 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - m + 3}{(x-1)^2}$$

2) f_m admet un extremum en 2 si et seulement si $f'_m(x)$ s'annule et

change de signe en 2.

$$f'_m(2)=\frac{4-4-m+3}{(2-1)^2}=3-m.$$

$$f'_m(2)=0 \Leftrightarrow m=3$$

pour $m=3$; $f'_3(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $f'_3(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		1		2	
$f'_3(x)$		+	0	-	‖	-	0	+

Donc $f'_3(x)$ s'annule et change de signe en 2, par suite f_m admet un extremum en 2 pour <u>$m=3$</u>

3) f_m n'admet pas d'extremum si et seulement si $f'_m(x)$ ne s'annule pas ou $f'_m(x)$ s'annule et ne change pas de signe.

$f'_m(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-m+3=0$ avec $x \neq 1$

$\Delta' = 1+m-3=m-2$;

m	$-\infty$		2		$+\infty$
Δ'		-	0	+	

* $f'_m(x)$ ne s'annule pas si et seulement si $\Delta'<0$;

or $\Delta'<0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, 2\right[$.

$f'_m(x)$ s'annule et ne change pas de signe si et seulement si $\Delta'=0$

or $\Delta'=0 \Leftrightarrow m=2$.

Conclusion : f_m n'admet pas d'extremum si et seulement si $m \in \left]-\infty, 2\right]$.

4) a) $f_3(x)=\dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$; $Df_3=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'_3(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ où $x=2$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'_3(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f_3(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

b) $\Delta: y=\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$.

Soit T : $y = f'_3(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ équation de la tangente à ζ_3 a Point M_0 d'abscisse x_0.

$$\Delta // T \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x_0^2 - 8x_0 = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ ou } x_0 = 3.$$

Les points de ζ_3 où la tangente T est parallèle à Δ sont M_1 et M_2 d'abscisse respectifs $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

On a $T_1: y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$; $f(-1) = \frac{5}{2}$

Donc $y = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{5}{2}$ ou encore $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

D'où $\Delta = T_1$.

Donc Δ est tangente à ζ_3 au point $M_1(-1, \frac{5}{2})$

5) On a :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$
$\lvert x+3 \rvert$	$-x-3$		$x+3$

a) * $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{g(x) - g(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{\frac{x(x+3) - 3}{x - 1} - \frac{3}{4}}{x+3}$

$= \lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{4x^2 + 12x - 12 - 3x + 3}{4(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to(-3^+)} \frac{4x^2 + 9x - 9}{4(x-1)(x+3)}$

$= \lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{4(x+3)(x - \frac{3}{4})}{4(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{4x - 3}{4(x-1)} = \frac{15}{16} = g'_d(-3)$

* $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \frac{g(x) - g(-3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)^-} \frac{\frac{x(-x-3) - 3}{x - 1} - \frac{3}{4}}{x+3}$

$$= \lim_{x \to (-3)^-} \frac{-4x^2 - 12x - 12 - 3x + 3}{4(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to (-3)^-} \frac{-4x^2 - 15x - 9}{4(x-1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to (-3)^-} \frac{-4(x+3)(x+\frac{3}{4})}{4(x-1)(x+3)} = \frac{-9}{16} = g'_g(-3)$$

$g'_d(-3) \neq g'_g(-3)$ donc g n'est pas dérivable en (-3)

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} & \text{si } x \geq -3 \\ \dfrac{-x^2-3x-3}{x-1} & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$

* Si $x \geq -3$; $g(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = f_3(x)$ est la restriction d'une fonction rationnelle qui est dérivable sur IR-{1} donc g l'est sur $[-3,+\infty[\setminus \{1\}$

et on a : pour tout $x \in [-3,+\infty[\setminus \{1\}$; $g'(x) = f'_3(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

et d'après 4) a) , on a :

x	-3		0		1		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	

Si $x \in]-\infty,-3]$; $g(x) = \dfrac{-x^2-3x-3}{x-1}$ est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur IR-{1}, en particulier sur $]-\infty,-3]$ et on a :

pour tout $x \in]-\infty,-3]$.

$$g'(x) = \frac{(-2x-3)(x-1) - (-x^2-3x-3)}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x+6}{(x-1)^2}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+6 = 0$; $\Delta' = 7$; $x' = 1+\sqrt{7} \succ -3$ ou $x'' = 1-\sqrt{7} > -3$

x	$-\infty$		-3
g'(x)		-	

D'où le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-3		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	3	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

24

1) $f(x) = 4x - x^2$

a) $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = -2x + 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty.$

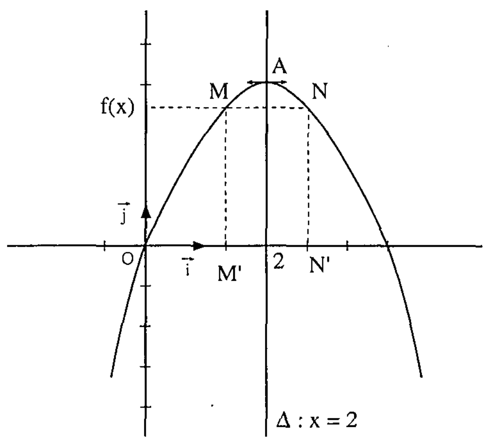
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty;$

$f(2) = 4$ et $f(0) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(4 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

b) D'après le tableau des variations, le maximum atteint par la fonction f est en $x = 2$ donc $A(2,4)$.



c) soit $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ équation de la tangente à la courbe C en point M_0 d'abscisse x_0.

$I(0,1) \in T$ signifie que $1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

D'où $(-2x_0 + 4)(-x_0) + 4x_0 - x_0^2 = 1$ ou encore $x_0^2 = 1$

$x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$

T_1: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ d'où T_1: $y = 2x + 1$

T_2: $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ d'où T_2: $y = 6x + 1$

2) a) On a : $M(x, f(x))$; $M'(x,0)$; soit $N'(x_{N'}, Y_{N'})$, $N' = S_\Delta(M')$

donc Δ est le médiatrice du segment [M'N'], par suite :
soit J=M' * N' donc J(2,0)

donc $\begin{cases} \dfrac{x_{M'}+x_{N'}}{2}=2 \\ \dfrac{y_{M'}+y_{N'}}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{N'}=4-x \\ y_{N'}=0 \end{cases}$ donc N'(4 -x ,0)

on a : M(x ,4x - x^2) ;M'(x,0) et N'(4-x,0)
soit s(x) l'aire du triangle MNN'M' .

$S(x)=MM'\times M'N'$ or $MM'=\sqrt{(x-x)^2+(4x-x^2)^2}=|4x-x^2|$

Or $x\in\,]0,2[$ donc $4x-x^2>0$ par suite $MM'=4x-x^2$

$M'N'=\sqrt{(4-x-x)^2+0^2}=|4-2x|=4-2x$

D'où $S(x)=(4x-x^2)\times(4-2x)$

$=16x-8x^2-4x^2+2x^3=2x^3-12x^2+16x$

b) s(x) est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et on pour tout $x\in\mathbb{R}$; $s'(x)=6x^2-24x+16$

$s'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+8=0.$

$\Delta'=36-24=12$; $x'=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$ et $x''=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

x	$-\infty$	x'		x''		$+\infty$
s'(x)	+		-		+	
s(x)	↗		↘		↗	

Donc d'après le tableau de variation s(x) admet un maximum pour :

$x=x'=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$

25 1) A (0, x+3) ; B(x-1,0) et C (-x+2,0).
On constate que A $\in(0,\vec{j})$ et B et C $\in(0,\vec{i})$d'où OA est la hauteur du Triangle ABC et BC sa base, donc si f(x) est l'aire du triangle ABC

alors $f(x)=\dfrac{OA\times BC}{2}=\dfrac{|x+3|\cdot|2x-3|}{2}$

D'où $f(x) = \begin{cases} x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2} \text{ si } x \in \left]-\infty,-3\right] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[\\ -x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2} \text{ si } x \in \left[-3,\frac{3}{2}\right] \end{cases}$

2) f est une fonction polynôme définie, continue et dérivable sur chacune de ces intervalles et sa fonction dérivée est :

$f'(x)=\begin{cases} 2x+\frac{3}{2} \text{ si } x \in \left]-\infty,-3\right] \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[\\ -2x-\frac{3}{2} \text{ si } x \in \left[-3,\frac{3}{2}\right] \end{cases}$

or $f'_d(-3)= -2\ (-3) - \frac{3}{2}=\frac{9}{2}$; $f'_g(-3)=2(-3)+\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$.

$f'_d(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$; $f'_g(\frac{3}{2})=-2(\frac{3}{2})-\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$

x	$-\infty$		-3		$-3/4$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$81/16$	↘	0	↗	$+\infty$

3) a) * T_{-3} : $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$; $f(-3) = 0$

$f'_d(-3) \neq f'_g(-3)$, donc f n'est pas dérivable en $x = 3$ d'équations:

T_{-3}: $y = f'_d(-3)(x+3)+f(-3)$ et T'_{-3}: $y=f'_g(-3)(x+3)+f(-3)$.

D'où T_{-3}: $y=\frac{9}{2}x+\frac{27}{2}$ avec $x>-3$ et T'_{-3}: $y=-\frac{9}{2}x-\frac{27}{2}$. avec $x < -3$

$f'_d(\frac{3}{2}) \neq f'_g(\frac{3}{2})$, donc f n'est pas dérivable en $\frac{3}{2}$ et la courbe ζ

admet deux demi-tangentes en $x =\frac{3}{2}$ d'équations:

$T_{\frac{3}{2}}$: $y=f'_d(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})+f(\frac{3}{2})$ et $T'_{\frac{3}{2}}$: $y=f'_g(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})+f(\frac{3}{2})$

d'où $T_{\frac{3}{2}}$: $y=\frac{9}{2}x-\frac{27}{2}$ avec $x >\frac{3}{2}$ et $T'_{\frac{3}{2}}$: $y=-\frac{9}{2}x+\frac{27}{2}$ avec $x<\frac{3}{2}$

b) D'après le tableau de variations étudié dans la 2ème question, f admet deux minimums absolus en $x = -3$ et $x= \frac{3}{2}$.

Or d'après 3) a), la courbe ζ admet deux demi tangentes en chacun

Des points M_1 d'abscisse (-3) et M_2 d'abscisse $\frac{3}{2}$ donc les minimums de

cette fonction représente des points anguleux pour la courbe ζ .

26 1) V le volume de la boite : l'aire de la base $\times$ hauteur = l'aire du Triangle A' B' C' $\times$ h.

A'B'C' est un triangle équilatéral de coté 60-2x et de hauteur

$\frac{\sqrt{3}}{2}(60-2x)$

D'où l'aire de A'B'C' est $\frac{1}{2}(60-2x).\frac{\sqrt{3}}{2}(60-2x)$

Ou encore $\frac{\sqrt{3}}{4}(60-2x)^2$. Comme $h = x . -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ car $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{h}{x}$.

D'où $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(60-2x)^2.\frac{\sqrt{3}}{3}x = (30-x)^2x$

$V'(x) = -2(30-x)x + (30-x)^2 = (30-x)(-2x+30-x)$

$= (30-x)(30-3x)$ avec $x \in]0,30[$

x	0		10		30
V'(x)		+	0	-	
(x)		↗		↘	

V(x) est maximum pour x= 10 cm et la volume maximum est :

$V_{max} = 4000\ cm^3$.

27 1) Calculons en fonction de x l'aire du triangle AMM'

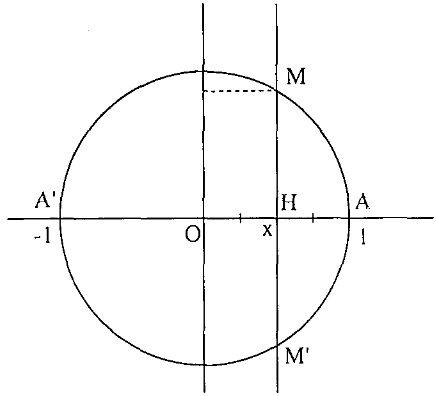
cette aire est donnée par : $\frac{AH \times MM'}{2}$.

On a : $AH = |\overline{AH}| = |x-1|$. Comme H est un

Point de] AA'[, on a :

$-1 < x < 1$ et par conséquent $-2 < x - 1 < 0$

symétriques par rapport à l'axe des abscisses).



Or OHM est un triangle rectangle en H donc $OH^2 + HM^2 = OM^2$, par suite $HM^2 = OM^2 - OH^2$ or $HM = y_M$ et $OH = x$

D'ou

$y_M = \sqrt{1 - x^2}$ et par suite $MM' = 2\sqrt{1 - x^2}$

Donc l'aire du triangle AMM'

est $(1-x)\sqrt{1-x^2}$ .2) a)

$$2)a)\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\sqrt{1-x^2} = 0$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$$

car $\lim_{x\to -1}(1-x)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en -1.

Au point d'abscisse 1, la tangente est horizontale car $f'(1) = 0$, et au Point d'abscisse -1 la tangente est verticale.

b) f est dérivable pour tout $x \in]-1,1[$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x)(\sqrt{1-x^2})'$$

or $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ Donc $f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f'(x)$ s'annule » pour x= 1 ou $-\frac{1}{2}$ et le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2-x-1$.

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$-$	0	$+$		$+$	

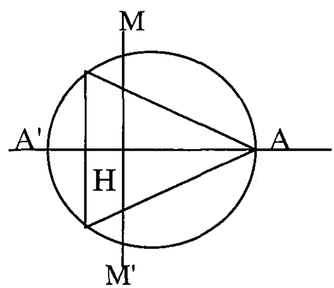
Donc :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Le maximum de f sur [-1,1] est $f(-\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

3) f est l'aire du triangle AMM'.

Cette aire est maximale pour $x=-\frac{1}{2}$.



Le point H est le milieu du segment [OA'], justifions que le triangle AMM' est équilatéral. Les points M et M'' ont pour abscisse $(-\frac{1}{2})$.

En remplaçant x par $-\frac{1}{2}$ dans l'équation du cercle : $x^2+y^2=1$, on trouve :

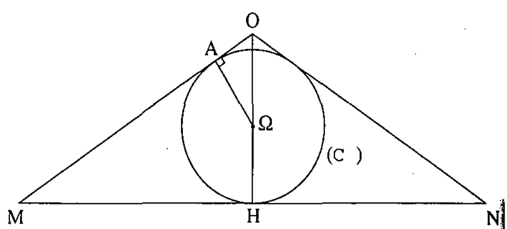
$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'ou les points : A(1,0) ; $M(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$; $M'(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

En calculons les distances, on trouve : AM = AM' = MM' =3.

D'ou le triangle AMM' est équilatéral.

28

1) dans les triangles rectangles $(OA\Omega)$ et (OHM).



On a les trois angles sont égaux

Deux à deux : $\hat{O}$ est commun,

$\hat{A}=\hat{H}$ et $\hat{\Omega}=\hat{M}$.Donc $\frac{MH}{A\Omega}=\frac{OH}{OA}$;

c'est à dire $\frac{r}{R}=\frac{x}{OA}$.Par suite $r^2=\frac{x^2.R^2}{OA^2}$

Or $OA^2 = O\Omega^2 - A\Omega^2 = (x - R)^2 - R^2 = x^2 - 2xR$

Alors $r^2 = \dfrac{x R^2}{x - 2R}$ pour $x > 2R$ et $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{x^2 . R^2}{x - 2R}$.

2) a) Posons $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2R}$ pour $x > 2R$ et étudions les variations de f.

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine : $IR - \{2R\}$, en particulier sur$]2R, +\infty[$et on a pour tout $x \in]2R, +\infty[$;

$f'(x) = \dfrac{x(x - 4R)}{(x - 2R)^2}$. D'où le tableau de variation :

x	$2R$		$4R$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$8R$	$\nearrow$	

D'après le tableau f prend sa valeur minimale 8 R pour x = 4R.
Le volume V est donc minimum lorsque x = 4 R.

b) pour cette valeur de x, $V = \dfrac{8\pi R^3}{3}$

29

1) a) ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = 5 et BC = x alors $0 < BC < AB + AC = 10$ d'où $x \in]0, 10]$.

b) ABC est la base de prisme $\Rightarrow$ aire$(ABC) = \dfrac{AH \times BC}{2}$

Comme AHC est rectangle en H $\Rightarrow AH^2 = AC^2 - HC^2 = 5^2 - (\dfrac{x}{2})^2$

D'où $AH = \sqrt{25 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{100 - x^2}}{2}$ par suite Aire (ABC) $= \dfrac{x}{4}\sqrt{100 - x^2}$

Ainsi le volume de prisme est $V(x) = \dfrac{x}{4}\sqrt{100 - x^2} .20$

Soit $V(x) = 5x \sqrt{100 - x^2}$.

2) $f(x) = x^2 (100 - x^2) = 100x^2 - x^4$

a) $\forall x \in [0, 10]$, $f'(x) = 200x - 4x^3$, $f'(x) = 4x (-x^2 + 50)$

b) $f'(x) = 4x(50 - x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 50$ or $x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ainsi f admet un maximum au point d'abscisse $x = 5\sqrt{2}$

3) a) $V(x) = 5x\sqrt{100-x^2}$

$(V(x))^2 = 25x^2(100 - x^2) = 25\,f(x)$

$V(x) = 5\sqrt{f(x)}$

f est positive et on sait que f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations d'où

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$V(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

b) d'après le tableau de variation le volume le maximum est atteint par $x_0 = 5\sqrt{2}$

c) $x_0 = 5\sqrt{2} \simeq 7{,}07$ m.

30 a) l'aire de ABCD est 2 $dm^2 = 0{,}02m^2$ alors $\ell \times x = 0{,}02\ m^2$

ainsi $\ell = \dfrac{0{,}02}{x} = \dfrac{2}{100x}$

b) $L(x) = AB + BC + CD = 2x + \ell = 2x + \dfrac{2}{100x}$

c) L est dérivable sur $]0, +\infty[$

$L'(x) = 2 - \dfrac{2}{100x^2} = \dfrac{2}{100x^2}(100x^2 - 1)$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow 100x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 100x^2 = 1$ or $x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{10}$

x	0	$\dfrac{1}{10}$	$+\infty$
$L'(x)$	$-$	0	$+$
$L(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

d) D'après le tableau de variation L admet un minimum pour $x = \dfrac{1}{10} = 0{,}1m$

donc le frottement est minimal pour $x = 0{,}1$ m et $\ell = \dfrac{2}{100 \times 0{,}1} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ m.

31

1) On a $M(x, x^2)$; $H(x , 1)$; $A(0, 1)$

alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-0 \\ x^2-1 \end{pmatrix}$ ainsi $AM^2 = x^2 + (x^2 - 1) = x^4 - x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

a) $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x\,(2x^2 - 1)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty = \lim\limits_{-\infty} f$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

3) a) AM est minimale SSi AM^2 est minimal or $AM^2 = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$ d'après le tableau de variation.

il y a deux points M de coordonnées respectifs $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right)$

b) On déduit que la valeur minimale de $AM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

32

a) on a le volume d'une casserole est $V = 1\text{ L} = 1\text{dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$

d'autre part $V = \pi x^2 h$ (volume d'un cylindre)

d'ou $1000 = \pi x^2 h$ soit $h = \frac{1000}{\pi x^2}$

b) l'aire latérale est $2\pi x \times h$

soit $2\pi x.\frac{1000}{\pi x^2} = \frac{2000}{x}$ et l'aire du disque est πx^2 d'où $S(x)=\pi x^2 + \frac{2000}{x}$

c) pour tout $x > 0$, $S'(x)= 2\pi x - \frac{2000}{x^2}$

$$S'(x)=\frac{2\pi x^3-2000}{x^2}$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{2000}{2\pi}=\frac{10^3}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow x \simeq 6{,}82$$

x	0		$6{,}82$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

d) d'après le tableau de variation le minimum est atteint pour x= 6,85.

$$h^3=\frac{10^9}{\pi^3 x^6}=\frac{10^9}{\pi^3 . \frac{10^6}{\pi^2}}=\frac{10^3}{\pi}=x^3$$

donc x= h.

Chapitre V

Exemples d'étude de fonctions

- **Symétrie de la courbe :**

	Domaine d'étude
Si f est paire alors la droite d'équation $x = 0$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ est une axe de symétrie pour ξ_f.	$IR_+ \cap D$ ou $IR_- \cap D$
Si f est impaire alors le point O est un centre de Symétrie de ξ_f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.	$IR_+ \cap D$ ou $IR_- \cap D$
$\Delta : x = a$ est un axe de symétrie pour ξ_f $\Leftrightarrow \forall x \in D ;$ on a : $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$	$IR_+ \cap [a,+\infty[$ ou $IR_- \cap]-\infty,a]$
Le point I (a,b)est un centre de symétrie ξ_f $\Leftrightarrow \forall x \in D ;$ on a : $\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$	$IR_+ \cap [a,+\infty[$ ou $IR_- \cap]-\infty,a]$

- **Point d'inflexion :**
  - Si la courbe traverse la tangente en A, alors on dit que A est un point d'inflexion.
  - f est dérivable deux fois sur $]x_0 - h, x_0 + h[\subset D$.

  Si f'' s'annule en x_0, en changeant de signe, alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour ξ.

- **Position ξ et T la tangente à ξ en A(a, f(a))** :

  f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a.

x	a
$f''(x)$	+
Position ξ et T	ξ est au dessus de T

x	a
$f''(x)$	−
Position ξ et T	ξ est au dessous de T

x	a	
$f''(x)$	+	-
Position ξ et T	ξ est au dessus de T	ξ est au dessous de T

x	a	
$f''(x)$	-	+
Position ξ et T	ξ est au dessous de T	ξ est au dessus de T

Branches paraboliques :

Pour tracer ζ il faut voir le comportement de la courbe au voisinage de l'infini, si f est définie sur IR ou $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.

➢Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et de plus $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.Alors on dit que ζ admet une branche parapolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisignage de ∞.(notation : ∞ remplace $+\infty$ ou $-\infty$).

➢Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et du plus $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors on dit que ζ admet une branche par parabolique de direction $(o,\vec{i})$

- **Changement de repère :**

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $M(x,y)$ et $\Omega(a,b)$.

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, soit $M(X,Y)$ et $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$

D'où $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ est le système donnant les relations de changement de repère.

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ξ a pour équation : $y=f(x)$.

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ξ a pour équation : $Y=g(X)$.

- **Position ζ et Δ :**

➢ Δ une droite, Δ : $y = a x + b$:

* Si $f(x) - (a x+ b)\geq 0$; alors ζ_f est au dessus de Δ.

* Si $f(x) - (a x+ b)\leq 0$; alors ζ_f est au dessous de Δ.

➢ Montrer que deux courbes ζ et ζ' sont tangentes au point d'abscisse x_0 :

➢ On détermine les équations des tangentes aux deux courbes au point commun d'abscisse x_0 et on constate qu'il s'agit de la même droite.

ENONCÉS

■ Fonctions polynômes de degré ≤ 4 :

1 $f(x)=x^3+3|x|+2$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Tracer la courbe ξ_f

2 Soit la fonction $f(x)=-2x^3+4x^2-2x+1$.

1) a) Etudier la variation de f.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.
   c) Tracer la courbe de f.
2) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$; $f(x)\rangle 0$.
3) Déterminer suivant les valeurs de m (m paramètre réel), le nombre des Racines de l'équation : $4x^2+1=2x^3+2x+m$.

3 Soit $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$; $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+9$.

I) Déterminer les réels a, b, c pour que f admette un extremum au point(- 1) égal à 14 et que sa courbe représentative C passe par A(2, -13).

II) Soit $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$.

1) a) Etudier la fonction f.
   b) Montrer que C admet un point d'inflexion I et que I est un centre de symétrie pour C.
   c) Tracer C dans un repère orthogonal.
2) Soit la droite $D_m:y=mx+9$.

   a) Etudier suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de ξ et D_m

   b) Lorsqu'il existe deux points d'intersection autres que B (0, 9), on désigne par P_1 et P_2 ces points.

   Déterminer les coordonnées du point J milieu de $[P_1,P_2]$.

   Déterminer l'ensemble des points J lorsque m varie.

4 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=mx^3-(m+2)x^2+(4-m)x+m$, où m est un paramètre réel.

Soit (ξ_m) la courbe de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) On prend m = 0, construire la courbe (ξ_0) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) On prend m = 1.

a) Etudier la variation de f_1.

b) Montrer que (ξ_1) admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

c) Ecrire l'équation de la tangente T en I et étudier la position de T et (ξ_1)

d) Construire T et (ξ_1) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

e) Resoudre graphiqument $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$.

B 1) On prend m = 4. Etudier f_4 et tracer sa courbe ξ_4 (pas avec ξ_1 et ξ_0)

2) Soit $D_p : y = -px + 4$ où $p \in IR$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour les quelles, D_p et ξ_4 se coupent en trois points dinstincts noté K, M' et M'', avec K d'abscisse 0.

b) Soit $J = M' * M''$. Déterminer l'ensemble des points J, lorsque P varie dans IR_-.

C) 1) Déterminer que toutes les (ξ_m) passent par 2 points fixes A et B. (A d'abscisse positive).

2) Déteminer les valeurs de m, pour que f_m a au plus un extremum.

3) Vérifier que toutes les (ξ_m) sont tangentes en A.

5 Soit $f_m : IR \to IR ; x \mapsto \frac{1}{3}(2m-1)x^3 - x^2 + mx ; m \in IR$.

ξ_m la courbe de f_m dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) Montrer que toutes les courbes ξ_m passent par un point fixe que l'on déterminera.

2) Etudier suivant m le sens de variation de f_m.

B) Soit la fonction $f : IR \to IR ; x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1) Déterminer les réels a, b, c, d pour que f admette deux extermums:
$\frac{-4}{3}$ et 0 respectivement en -2 et 0.

2) On donne $a = -\frac{1}{3}; b=-1; c=d=0$. Vérifier $f = f_0$ (pour $m=0$).

   a) Etudier la variation de f.

   b) Montrer que la courbe ξ de f admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.

   c) Montre que I est un centre de symétrie de ξ.

   d) Construire ξ.

3) Soit Δ_m la droite passent par l'origine du repère et de coefficent directeur $(-m); m \in IR$.

   a) Discuter suivant m le nombre de points communs de ξ et Δ_m.

   b) Dans le cas où Δ_m coupe ξ en trois points O, M', M'' tels que M', M'' sont distincts de O. pose $I_m = M' * M''$.
   Calculer les coordonnées de I_m.

   c) Déterminer l'ensemble H des points I_m lorsque m varie. Construire H

4) Soit A le point de ξ d'abscisse 1, T la tangente à ξ en A, T' la droite symétrique de T par rapport à I.

Montrer que T' est tangente à ξ au point B que l'on déterminera.

5) Soit $g : IR \to IR; x \mapsto \left|\frac{1}{3}x^3 + x^2\right|$.

   a) En déduire la représentation graphique de la courbe ξ' de g dans le le même repère.

   b) Déduire les variations de g.

   c) Discuter suivent k l'existence des racines de : $g(x) = k; k \in IR$.

6 Soit la fonction $f(x)=4x^3-3x+1; \xi$ sa courbe dans le plan rapporté à un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) Etudier la fonction f.

2) Montrer que ξ admet un point d'inflexion I et que I est un centre de

symétrie de ξ.

3) Tracer ξ.

4) Soit l'équation $(E_m): 8x^2 - 6x + m = 0$. Utiliser la courbe ξ pour déterminer les valeurs de m pour les quelles l'équation (E_m) admet dans IR, trois solutions distinctes deux à deux.

5) Utiliser la courbe ξ pour construire la courbe H de la fonction :

$h(x) = -4|x|^3 + 3|x| + 1$.

B) Soit la fonction $f_a(x) = \dfrac{4}{a^2}x^3 - 3x + a$ (a un réel $\neq 0$).

1) Etudier suivant les valeurs de a, les variations de f_a.

2) Soit (ξ_a) la courbe de f_a, M_a et N_a. les points de ξ_a correspendants aux extremums de f_a.

a) Déterminer en fonction de a, les coordonnées de M_a et N_a.

b) Quel est l'ensemble des points M_a et des points N_a lorsque a décrit IR^*

C) Soit la fonction $g_m(x) = f_1(x) - m f_2(x)$ et ζ_m sa courbe.

1) Etudier suivant m le sens de variation de g_m.

2) Montrer que toutes les ξ_m passent par 2 points fixes A et B ; (A d'abscisse positive).

7 f définie sur IR par $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - \dfrac{3}{4}x + 1$

ζ la courbe de f dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer la fonction dérivée de f.

2) g est la fonction définie par $g(x) = f'(x)$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g et vérifier que $g(\frac{1}{2}) = 0$.

c) En déduire le signe de g.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

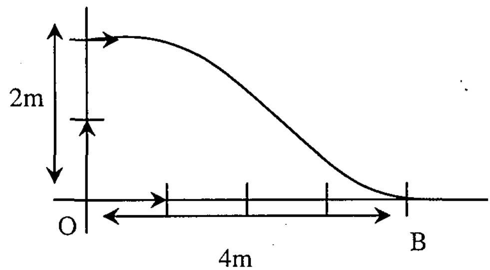
b) Donner des équations des tangentes T et T' à ζ aux points d'abscisses 1 et (-1).

c) Tracer T, T' et ζ.

8 **Le toboggan**

On veut réaliser un toboggan pour les enfants termine en pente douce Il doit donc vérifier les conditions suivantes.

(1) il doit avoir une tangente en A parallèle au
(2) il doit être tangente au sol au point B.
dans tout le problème , on considère le plan repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$
(unité graphique comme l'indique le croquis suivant.



Les coordonnées du point A sont donc (0,2) ,celles du point B sont (4,0).
Le but du problème est de trouver des fonctions dont les courbes représentatives ont l'allure du toboggan et vérifient les conditions de l'énoncé.
1) une fonction polynôme du premier degré peut-elle convenir ? Expliquer pourquoi.
2) a) f est la fonction définie sur [0,4] par :

$f(x)= -\frac{1}{4}x^2+2$ et ζ_f est sa courbe représentative dans $(o,\vec{i},\vec{j})$

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

b) g est la fonction définie sur [0,4] par :

$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ ζ_g est sa courbe représentative dans $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que ζ_f et ζ_g ont en commun le point C de coordonnées (2,1).

d) Démontrer que ζ_f et ζ_g ont la même tangente T au point C.

e) Tracer T, puis ζ_f et ζ_g sur un même graphique, ensuite tracer d'une couleur différente, les deux portions de courbes ζ_f et ζ_g représentant le toboggan.

f) Vérifier que la courbe obtenue satisfait aux conditions (1) et(2).

3) On décide de donner un toboggan, un profil correspondant à la courbe représentative dans ζ_f et ζ_g d'une fonction polynôme P de degré 3 :

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) Trouver la valeur de d sachant que la courbe passe par A.

b) Sachant que la courbe doit vérifier les conditions (1) et (2) et qu'elle passe par B, trouver les valeurs de a, b et c.

c) h est la fonction définie sur [0,4] par : $h(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$

Etudier les variations de h et donner son tableau de variation.

d) Sur un nouveau graphique, tracer la courbe ζ_h représentant h dans $(o,\vec{i},\vec{j})$.

9 **Vrai – Faux**

Répondre par vrai ou faux. Justifier votre réponse.

1) On considère le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	‖	-	0	+	
f(x)	2	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On note ζ_f sa courbe représentative dans un repère :

a) La droite x = 2 est une asymptote à ζ_f .

b) La droite x = 1 est une asymptote à ζ_f .

c) La droite y = 3 coupe la ζ_f exactement en 2 points.

2) La fonction f définie sur [-1, 1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) La fonction f est dérivable en 1.

b) f n'admet pas d'asymptote.

3) f est la fonction définie sur I =]-2, 2[par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}$

b) x = 2 est une asymptote pour la courbe de f.

4) Toute fonction rationnelle admet une asymptote oblique.

- **<u>Fonction rationnelle de type :</u>** $\dfrac{a\,x + b}{c\,x + 2}$ et $\dfrac{ax^2 + bx + c}{d\,x + c}$

10 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Etudier les variations de f et représenter sa courbe représentative (H) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note I le centre de symétries de (H). Déterminer ses coordonnées.

2) Déterminer le coefficient de la tangente à (H) au point A d'abscisse2.
Quelle est l'autre tangente à (H), ayant le même coefficient directeur ?
Soit A' le point de contact de cette dernière. Etudier la position relative des Points A, I et A' .

3) Quelles sont les valeurs du réel m pour les quelles la droite (D)

d'équation : $y = -2x+m$, rencontre la courbe (H) en deux points M' et M'' (distincts où confondus) ?

4) Lorsque m satisfait à la condition trouvée, calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J de [M'M'']. Préciser l'ensemble décrit par J, quand m vraie.

11 Soit f_m, la fonction définie par $f_m(x)=\dfrac{mx+2-m}{2x+m-5}$; m est un paramètre réel et soit ζ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

1) Déterminer m dans les cas suivants :
   a) $\Delta : y = 2$ est une asymptote horizontale à ζ_m.
   b) $\Delta : x = 1$ est une asymptote verticale à ζ_m.
2) Etudier suivant les valeurs m, les variations de f_m.
3) Montrer que pour tout réel m, pour lequel f_m n'est pas constante, ζ_m passe par deux points fixes A et B.
4) Soit I_m le point d'intersection des asymptotes de ζ_m. quel est l'ensemble des points I_m lorsque m vraie dans $IR-\{-1, 4\}$.
5) Tracer ζ_1.
6) En déduire la représentation graphique de $g : IR-\{2\} \to IR$; $x \mapsto g(x)=\dfrac{|x+1|}{2x+4}$.

12 On considère la fonction $f : IR \to IR$; $x \mapsto \dfrac{x^2-x+1}{x-2}$.

On désigne par C, la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
2) Etudier les variations de f.
3) a) Montrer que le point I d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de C.
   b) Construire C.
4) Discuter graphiquement l'équation : $x^2 - (m+1)x + 2m + 1= 0$, où $m \in IR$.
5) Dans le cas où $D : y = m$ coupe C en deux points M' et M'', on pose : $I=M' * M''$.
   a) Quel est l'ensemble H des points I, lorsque m vraie.
   b) Construire l'ensemble H dans le même repère.
   c) Déterminer l'ensemble des réels m pour que OM'M'' soit rectangle en O.

6) soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|+1+\dfrac{3}{|x|-2}$.

a) Etudier la parité de g.
b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de g.
d) Construire la courbe C' de g dans le même repère.

13 On considère $f_m : x \mapsto 2x+1+\dfrac{m-3}{2x-1}$ où $m \in \mathbb{R}-\{3\}$ et (C_m)

La courbe de f_m dans $R(O,\vec{i},\ \vec{j})$, un repère orthonormé du Plan

A) 1) a) Discuter suivant les valeurs de m, les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f_m(x)$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f_m(x)$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f_m(x)$.

b) Dresser, suivant les valeurs de m, le tableau de variation de f_m (Sans préciser les valeurs des extremums éventuels).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) possèdent deux asymptotes Communes et un centre de symétrie commun.
2) Déterminer m pour que S(1,4),soit un sommet de (C_m).

B) Dans la suite on prend m= 4.
On note f la fonction f_4 et (ζ) sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de f et construire (ζ).
2) a) soit $g : x \mapsto 2x+1+\dfrac{1}{|2x-1|}$.
Dresser le tableau de variation de g sur son domaine.
b) Construire (ζ ') la courbe représentative de g.
c) Déterminer graphiquement le nombre e solution dans IR de L'équation : $|2x-1|.(m-2x-1)=1$.

C) Le but de cette partie est de montrer la propriété suivante :
P : « toute tangente à (ζ) coupe ses deux asymptotes en deux points Symétriques par rapport au point de contact de cette tangente Avec (ζ).

1) Montrer que l'équation de (ζ) dans le repère $R' = (I,\vec{e_1},\ \vec{e_2})$ est :
$y=\dfrac{1}{2x}$ avec $I\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$ et $\begin{cases} \vec{e_1}=\vec{i}+2\vec{j} \\ \vec{e_2}=\vec{j} \end{cases}$
2) Soit M_0 un point d'abscisse x_0 ; écrire l'équation de la tangente à (ζ) au point M_0 dans le repère R'.
3) Démontrer la propriété « P » énoncée.

14 soit la fonction f_m définie par $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x-1}$ où $m \in IR$.

Cm : sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

A) 1) a) calculer $f'_m(x)$ pour tout $x \in IR\{1\}$.

b) Déterminer suivant m, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2) Déterminer les valeurs de m pour les quelles f_m a deux extremums, indiquer alors un tableau de variation de f_m.

3) a) Montrer que toutes les courbes ζ_m passent par un point fixe A.

b) Déterminer m pour que la tangente à ζ_m en A, ait pour coefficient directeur, le réel (-3).

B) On suppose dans la suite <u>m = -1</u>, $f = f_{-1}$ et $\zeta = \zeta_{-1}$.

1) Etudier les variations de f, vérifier que $f(x) = x+\dfrac{4}{x-1}$;

pour tout $x \in IR\backslash\{1\}$, préciser les asymptotes de ζ et construire ζ.

2) soit la droite D_a d'équation : $y = a\,x + 1- a$ $(a \in IR)$.

a) Déterminer les valeurs de a pour les quelles D_a coupe ζ en 2 points distincts M' et M''.

b) Soient x' et x'' les abscisses respectives de M' et M'' lorsque' ils existent, vérifier que $x'+ x'' = 2$.

En déduire que les tangentes à ζ en M 'et en M'' sont parallèles.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = |x|+\dfrac{4}{x-1}$ et ζ' sa courbe représentative.

a) Etudier les variations de g sur $]-\infty,0]$.

b) Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement.

c) Préciser l'asymptote à ζ' au voisinage de $-\infty$ et construire C ' dans le repère $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

- **<u>Fonctions irrationnelle du type :</u>** $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{a^2+bx+c}$

15 Soit $\alpha > 0$, soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x) = x^2(\alpha - \sqrt{x}\,)$

1) Déterminer la fonction dérivée f' et son domaine de définition.

2) En déduire les variations de f en fonction de α .

3) Déterminer α pour que T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x =1 Soit parallèle à la droite D d'équation y = 3x +2.

16 f et g deux fonction définies sur IR par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

ζ_f et ζ_g désigne les courbes respectives de f et g dans un R. O . N $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que ζ_f et ζ_g admettent une tangente comme D au point d'abscisse 1.

2) Etudier les positions relatives des courbes ζ_f et ζ_g et de la tangente D.

3) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à ζ_f en $+\infty$.

c) Soit la droite Δ: $y = -x + \frac{1}{2}$.Montrer que Δ est asymptote à ζ_f en $-\infty$

4) Tracer ζ_f et ζ_g et D.

17 Soit f est définie sur IR par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$

1) Démontrer que pour tout réel x: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$

$\sqrt{1+x^2} + x > 0$ et $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$

2) g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

a) Montrer que g est strictement croissante sur IR

b) Résoudre dans IR, l'équation $g(x) = 0$

c) Déterminer le signe de g(x)

3) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Montrer que pour tout réel x on a: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Etudier limite f(x)–x lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on déduire pour ζ_f ?

b) Montrer que la droite Δ : $y = -3x$ est une asymptote en $-\infty$ pour ζ_f.

c) Déterminer la position de ζ_f par rapport à Δ puis par rapport à la droite d'équation D : $y = x$.

5) Tracer D, Δ et ζ_f dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.

18 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Soit ζ sa courbe représentative dans un R.O.N $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier selon les valeurs de x le signe de polynôme $x^2 - 6x + 5$.

En déduire le domaine de définition de f.

2) Démontrer que la droite x = 3 est un axe de symétrie de ζ .

3) Calculer $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$

La fonction f est elle dérivable en 5 ?

Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

4) Etudier les variations de f sur $[5,+\infty]$

En déduire les variations de f sur $]-\infty,1]$

5) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f$

6) Démontrer que la droite D_1 : y = x-3 est asymptote à ζ en $+\infty$.

En déduire les équation de l'asymptote D_2 en $-\infty$.

7) Dresser le tableau complet de f.

8) Construire ζ .

■ **<u>Fonctions rationnelles de la forme</u>** : $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

19 Soient les fonctions g et h définie sur IR par
$g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et $h(x) = r\,x^2 + s\,x + t$ (a, b, c, r, s, t des réels)
on note respectivement ζ_g et ζ_h les courbes de g et h.

1) Déterminer les réels r, s et t sachant que $g'(1) = -1$ et $g'(2) = 1$ et que la tangente à ζ_g au point d'abscisse 1 passe par le point A(2, -20).

2) Déterminer les réels r, s et t sachant que la tangente à ζ_g au point d'abscisse 0 passe par les points B(0, -14) et C(1, -16) et h(1) = -15

3) On pose $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Pour tout $x \in D$, Déterminer $f'(x)$.

c) En déduire les variations de f sur [-7, 7].

20 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$

1) Déterminer Df le domaine de définition de f.

2) Déterminer les variations de f.

3) Quelles sont les asymptotes de ζ_f.

4) Tracer ζ_f la courbe de f en précisant les coordonnées des points d'intersections avec les axes et le coefficient directeur des tangentes en ce point.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation : $(1-m)x^2 + 2x - 3 + 4m = 0$.

21 a, b, c étant des réels et f la fonction définie sur IR– {1} par

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x-1)^2}$. ζ Désigne sa courbe dans un R.O.N $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On dispose des renseignements suivants :
 - La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à ζ en $+\infty$.
 - Le coefficient directeur de la tangente T à ζ en 0 est égale à –2.
 - La courbe ζ passe par O. Déterminer alors les réels a, b, c.

2) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3) a) Pour tout $x \neq 1$, calculer $f'(x)$.
 b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la tangente T et la courbe ζ.

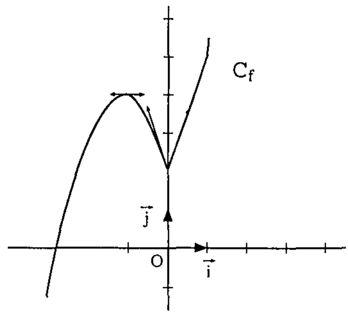
CORRIGÉS

■ Fonctions polynômes de degré ≤ 4 :

1

$f(x) = x^3 + 3x + 2$ si $x \geq 0$.

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ si $x \leq 0$.



1) • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 - 3x + 2 = 2$

et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 - 3x + 2 = 2$

et $f(0) = 2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$

d'où f est continue en 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x^3 - 3x + 2) - 2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3 + 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + 3 = 3 = f'_d(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3 - 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - 3 = -3 = f_g'(0)$.

Donc $f_g'(0) \neq f_d'(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0.

2) Sur $]-\infty, 0[$ respectivement sur $]0, +\infty[$;

f est une polynôme donc dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$; $f'(x) = 3x^2 + 3 \rangle 0$ et Sur $]-\infty, 0[$; $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$(x^2 - 1)$		+	0	-		-	0	+	

ainsi

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		+	0	-	

en déduire le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ donc ξ_f admet deux branche parabolique de direction (y y') au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
f(x)	0	3,125	4	3,375	2	3,625	6

2

1) a) f est une polynôme alors dérivable sur IR et $f'(x) = -6x^2 + 8x - 2$.

* $f'(x) = -6x^2 + 8x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'(x)		-		+		-	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$19/27$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$.

b) f est un polynôme donc dérivable deux fois sur IR ;
$f''(x) = -12x + 8$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	

f'' s'annule en $\dfrac{2}{3}$ et change de signe au voisinage de $\dfrac{2}{3}$ donc ξ_f admet un point d'inflexion $A\left(\dfrac{2}{3}, f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$ avec $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{23}{27}$ et $f'(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{2}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donc ξ_f admet 2 branches paraboliques de direction (y y') au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Tableau de valeur :

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2
f(x)	1	$\frac{19}{27}$	$\frac{23}{27}$	1	-3

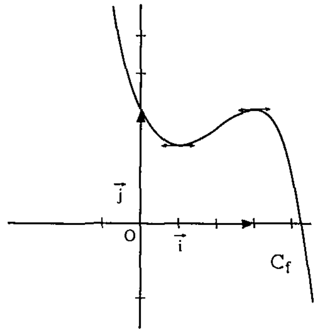
2) Sur $]0,1[$; ξ_f admet un minimum $\frac{19}{27}$

donc $f(x) \geq \frac{19}{27} > 0$ d'où $\forall x \in]0,1[$; $f(x) > 0$.

3)

$4x^2+1=2x^3+2x+m \Leftrightarrow -2x^3+4x^2-2x+1=m$

ou encore $f(x)=m$. on considere $\Delta: y=m$;



*Si $m \in \left]-\infty, \frac{19}{27}\right[\cup]1,+\infty[$; alors $\Delta \cap \xi_f = \{1 \text{ point}\}$ donc 1 solution.

*Si $m \in \left]-\infty, \frac{19}{27}\right[\cup]1,+\infty[$; alors $\Delta \cap \xi_f = \{1 \text{ point}\}$ donc 1 solution.

* Si $m = \frac{19}{27}$ ou $m=1$ alors $\Delta \cap \xi_f = \{2 \text{ points}\}$ donc 2 solutions.

3

I) * f est un polynôme donc dérivable sur IR et $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

* f admet un extremum en -1 égal à 14 $\Leftrightarrow f'(-1)=0$ et $f(-1)=14$;

* $A(2,-13) \in \xi_f \Leftrightarrow f(2)=-13$.

$$\begin{cases} f(-1)=14 \\ f(2)=-13 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c=5 & (1) \\ 4a+2b+c=-11 & (2) \\ 3a-2b+c=0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)+(3) \\ (2)+(1) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=5 \\ 3a+3b=-6 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-5 \\ 3a+3(2a-5)=-6 \\ 3a-2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=1 \\ c=-9 \end{cases}$$

II) 1) a) f est une fonction polynôme dérivable sur IR et $f'(x)=3x^2-6x-9$;

On remarque que f' s'annule en –1 et 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	14	↘	-18	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

b) * f est dérivable deux fois sur IR comme fonction polynôme :
$f''(x)=6x-6$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

f''s'annule en 1, en changement de signe donc ξ admet un point d'inflexion I(1, f(1)) or f(1) = -2.

* $\forall x\in \mathbb{R}$ alors $2-x\in\mathbb{R}$.

$f(2-x)=(2-x)^3-3(2-x)^2-9(2-x)+9=-x^3+3x^2+9x-13$

$=-(x^3-3x^2-9x+9)-4=-4-f(x)$.

donc I est un centre de symétrie pour ξ.

c) * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; donc f admet deux branches parabolique de directions (yy') au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

I est un centre de symétrie et un point d'inflexion f '(1) = -12.

2) a) Le nombre des points d'intersection de ξ et Δ_m est égal au nombre de solutions de l'équation : $f(x)= mx+9$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x-mx=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x-9x-m)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-3x-9-m=0$;

• Si m = -9 alors x = 0 ou x = 3 donc 2 solutions.

• Si $m\neq-9$; alors $\Delta=9-4(-9-m)=4m+45$.

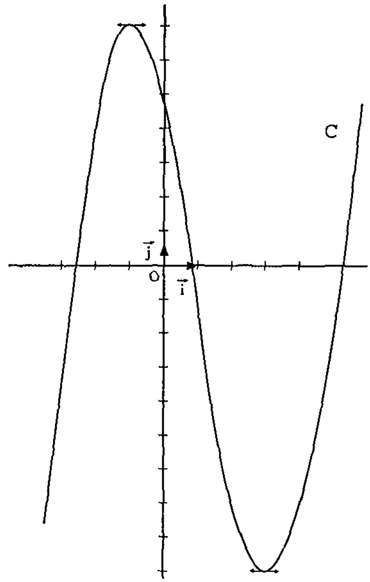
m	$-\infty$		$-45/4$		-9		$+\infty$
4m + 45		-	0	+	|	+	
Nombre de points d'intersection Δ_m et ξ		1	2	3	2	3	

b) $P_1(x',y')$ et $P_2(x'',y'')$ avec x' et x'' sont les solutions distincts de l'équation $x^2-3x-9-m=0$.

Alors: $S=x'+x''=3$ et $x'x''=-9-m$. comme $J=P_1 * P_2$ alors $x_J=\frac{x'+x''}{2}=\frac{3}{2}$

et $y_J=\frac{y'+y''}{2}=\frac{(mx'+9)+(mx''+x'')}{2}=\frac{m(x'+x'')}{2}+9=\frac{3}{2}m+9.$

* $E=\left\{J(x_J,y_J)\text{ tel que } m\in\left]-45/4,+\infty\right[\setminus\{-9\}\right\}$.



$$\begin{cases} x_J=\frac{3}{2} \text{ 'équation d'une droite;} \\ y=\frac{3}{2}m+9 \end{cases}$$

Or $m\in\left]-45/4,+\infty\right[-\{-9\}$.

Donc $m > -45/4$ et $m\neq -9$;

$\frac{3}{2}m+9 > \frac{-63}{8}$ et $\frac{3}{2}m+9\neq -\frac{9}{2}$.

Ainsi E est la demi-droite $[FG)$ privé de G et F avec $F\left(\frac{3}{2},\frac{-63}{8}\right)$ et $G\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

4 1) $m=0$ alors $f_0(x)=-2x^2+4x$ est une parabole de sommet $S(1, 2)$ et d'axe de symétrie $\Delta: x=1$.

a) $f_1(x)=x^3-3x^2+3x+1$. * f_1 est un polynôme dérivable sur IR et $f_1'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	+	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗			$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

b) $f_1'(x)=3x^2-6x+3$ polynôme dérivable sur IR.

$f_1''(x)=6x-6$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''_1(x)$	-	0	+

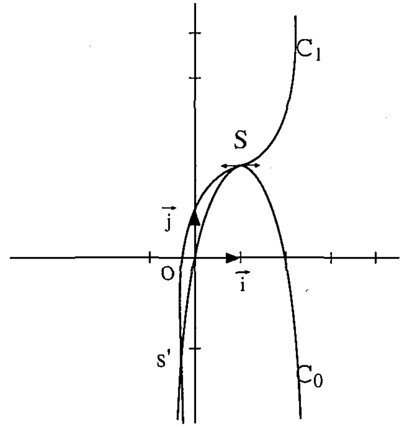
f_1'' s'annule en 1 en changement de signe donc C_1 admet un point d'inflexion $I(1, f(1))$ avec $f(1) = 2$.

c) $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
or $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$; d'où $T : y = 2$.

Sur $]-\infty, 1[$; $f''(x) \leq 0$ donc ξ est au dessous de T.

Sur $]1, +\infty[$; $f''(x) > 0$ donc ξ est au dessus de T.

pour x = 1; ξ et T coïncident en I.



$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
or $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$; d'où $T : y = 2$.

Sur $]-\infty, 1[$; $f''(x) \leq 0$ donc ξ est au dessous de T.

Sur $]1, +\infty[$; $f''(x) > 0$ donc ξ est au dessus de T.

pour x = 1; ξ et T coïncident en I.

e) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \leq -2x^2 + 4x$ ou encore : $f_1(x) \leq f_0(x)$ alors les solutions sont les abscisses des points de ξ_1 situées au dessous de ξ_0 par suite $S_{IR} =]-\infty, -2] \cup \{1\}$.

B) 1) $f_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4$; polynôme dérivable sur IR.

$f_4'(x) = 12x^2 - 12x = 12(x^2 - x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_4'(x)$		+	|	-	|	+	
$f_4(x)$	$+\infty$	↗	4	↘	2	↗	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

donc ξ_f admet 2 branches paraboliques de direction (yy').

2) $D_P : y = -px + 4$.

a) $M(x, y) \in D_P \cap \xi_4 \Leftrightarrow y = f_4(x)$ et $y = -px + 4$.

le nombre de points d'intersection est égal au nombre de solution de l'équation $f_4(x) = -px + 4$ ou encore $4x^3 - 6x^2 + 4 = -px + 4$ sont :

$4x^3 - 6x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 6x + p) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $4x^2 - 6x + p = 0$

$\Delta' = 9 - 4p$.

Pour avoir 3 points distincts d'intersection il faut avoir 3 solutions :

$$\text{c'est } \begin{cases} \Delta' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} > p \\ p \neq 0 \end{cases} \text{ d'où } p \in \left]-\infty, \frac{9}{4}\right[- \{0\}.$$

b) $E = \{J = M' * M'' ;\ p \in]-\infty, 0[.\}$

$$x_J = \frac{x' + x''}{2} \text{ et } y_J = \frac{y' + y''}{2}.$$

$$x_J = \frac{S}{2} = \frac{3}{4} \text{ car } S = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ et } y_J = \frac{(-px' + 4) + (-px'' + 4)}{2}$$

$$\text{Ainsi } x_J = \frac{3}{4} \text{ et } y_J = \frac{-p\left(\frac{3}{2}\right) + 8}{2} = -\frac{3}{4}p + 4;$$

$x_J = \dfrac{3}{4}$ est l'équation d'une droite or $p \in]-\infty, 0[$.

$p < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}p + 4 < 4$ et $\dfrac{3}{4}p + 4 \neq 4$;

donc E est la demi-droite $[LN) \backslash \{L\}$ avec $L(4, f(4))$ et $N(1, f(1))$

or $f(4) = 164$ et $f(1) = 2$.

C) 1) Soit $M(x, y) \in \xi_m \Leftrightarrow y = mx^3 - (m+2)x^2 + (4-m)x + m$

$\Leftrightarrow m(x^3 - x^2 - x + 1) - 2x^2 + 4x - y = 0$, vraie pour tout $m \in IR$;

$$\text{Si et seulement si } \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ -2x^2 + 4x - y = 0 \end{cases}$$

* $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.

* Pour $x=1$ on a : $y=-2x^2+4x=2$.

* Pour $x=-1$ on a : $y=-6$.

Donc toute ξ_m passant par les points $A(1,2)$ et $B(-1,-6)$.

2) f_m est un polynôme dérivable sur IR ; $f_m'(x)=3mx^2-2(m+2)x+4-m$.

f_m admet au plus un extremum si et seulement si $m=0$ ou $\Delta'\leq 0$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $\Delta'=(m+2)^2-3m(4-m)\leq 0$

$\Delta'=4m^2-8m+4=4(m-1)^2\geq 0$

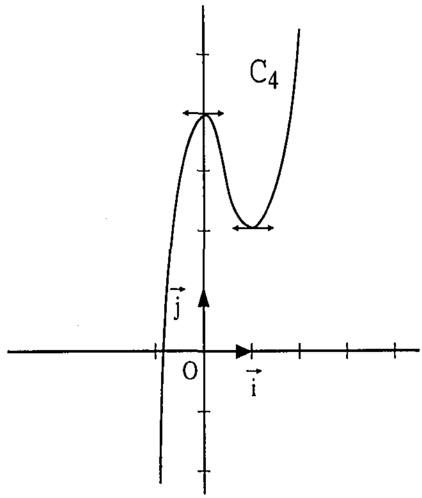
f_m admet au plus un extremum

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=1$.

3) $T_A : y=f_m'(1)(x-1)+f_m(1)$ or $f(1)=2$

et $f'(1) = 3m - 2(m+2)+4-m=0$

$f'(1)=0$ donc la tangente en A à un coefficient directeur indépendant de m donc T_A est la tangente commune à C_m pour tout $m\in$ IR d'où toutes les courbes sont tangentes en A.



$f_m(x)=\frac{1}{3}(2m-1)x^3-x^2+mx$; $m\in$ IR.

5 A) 1) Soit $M(x,y)\in\xi_m$ signifie que $y=\frac{1}{3}(2m-1)x^3-x^2+mx$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}mx^2-\frac{1}{3}x^3-x^2+mx-y=0 \Leftrightarrow m\left(\frac{2}{3}x^3+x\right)-\frac{1}{3}x^3-x^2-y=0.$

Cette équation est vérifiée pour tout m $\in$ IR, si et seulement si

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x^3+x=0\\ -\frac{1}{3}x^3-x^2-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)=0 & (1)\\ -\frac{1}{3}x^3-x^2-y=0 & (2)\end{cases}$$

l'équation (1) donne $x=0$ ou $\frac{2}{3}x^2+1=0$ impossible ; donc $x=0$.

En remplaçant dans (2), on trouve $y = 0$

Donc toutes les courbes ξ_m passant par un point fixe $O(0,0)$.

2) $f_m(x)$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR, et on a : pour tout $x \in IR ; f'_m(x)=(2m-1)x^2-2x+m$.

- Si $2m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

$f_m'(x)=0 \Leftrightarrow (2m-1)x^2-2x+m=0$

$\Delta'=1-m(2m-1)=-2m^2+m+1$.

$\Delta'=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=-\frac{1}{2}$.

m	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		1		$+\infty$
Δ'		-	0	+	||	+	0	-	

<u>1^er cas</u> : Si $m \in \left]-\frac{1}{2},1\right[- \left\{\frac{1}{2}\right\}$ alors $\Delta' > 0$ et dans ce cas $f_m'(x)$ s 'annule en deux points distincts x' et x''

* Si de plus $a=2m-1>0 \Leftrightarrow m \in \left]\frac{1}{2},1\right[$.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$f_m'(x)$		+		-		+	
$f_m(x)$		↗		↘		↗	

* Si $a=2m-1<0 \Leftrightarrow m \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$f_m'(x)$		-		+		-	
$f_m(x)$		↘		↗		↘	

<u>2^ème cas</u> : Si $m \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$ alors $\Delta' < 0$ et dans ce cas :

$f_m'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le signe de $f_m'(x)$ esr celui de $a = 2m - 1$

deux cas sont possibles:

* $2m - 1 \rangle 0 \Leftrightarrow m \rangle \frac{1}{2} \Rightarrow m \in]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$		$\nearrow$	

* $2m - 1 \rangle 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	
$f_m(x)$		$\searrow$	

<u>$3^{ème}$ cas</u> : Si $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ alors $\Delta' = 0$.

* $m = -\frac{1}{2}$ alors $\Delta' = 0$ et $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$ s'annule en un seul point : $x' = x'' = -\frac{b'}{a} = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{-1}{2}$

et le signe de $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$ est celui de $a = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2 \langle 0$; d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$-$	0	$-$	
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$			$\searrow$		

* $m = 1$; alors $\Delta' = 0$ et $f_1'(x)$ s'annule en un seul point :

$x' = x'' = -\frac{b'}{a} = \frac{1}{2.1 - 1} = 1$; et le signe de $f_1'(x)$ est celui de $a = 2(1) - 1 = 1 \rangle 0$ d'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_1(x)$			$\nearrow$		

• Si $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. * $f'_{\frac{1}{2}}(x) = -2x + \frac{1}{2}$ et $f'_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'_{\frac{1}{2}}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{\frac{1}{2}}(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

B) 1) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ alors $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

* f admette deux extremums $-\frac{4}{3}$ et 0 respectivement en -2 et 0

$$\text{signifie que}\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-\frac{4}{3} \\ f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-\frac{4}{3} \\ d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \quad (1) \\ -8a+4b=-\frac{4}{3} \quad (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ donne $4a=-\frac{4}{3}$ d'où $a=-\frac{1}{3}$

Em remplaçant, on trouve $b=-1$.

D'où $a=-\frac{1}{3}; b=-1; c=d=0$.

2) Pour $a=-\frac{1}{3}; b=-1$ et $c=d=0$ on a : $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

$f_0(x)=\frac{1}{3}(2\times 0-1)x^3-x^2+0.x=-\frac{1}{3}x^3-x^2=f(x)$ d'où $f=f_0(x)$ et $f_0'(x)=-x^2-2x$.

a) D'après A) 2); on a : $O\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ donc :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)=f_0'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)=f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$f_0'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x=0 \Leftrightarrow -x(x+2)=0$; $x=0$ ou $x=-2$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{3}x^3=+\infty$. * $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{3}x^3=-\infty$.

* $f(0)=0$ et $f(-2)=-\frac{4}{3}$.

b) $f'(x)=-x^2-2x$ alors $f''(x)=-2x-2$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

f'' s'annule et change de signe en $x=-1$ donc le point:

$I\left(-1, f(-1)=-\frac{2}{3}\right)$ est un point d'inflexion.

c) Montrons que $I\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ est un centre de symétrie de ξ.

$-2-x \in IR$ pour tout $x \in IR$.

$f(-2-x)=-\frac{1}{3}(-2-x)^3-(-2-x)^2=\frac{1}{3}(2+x)^3-(2+x)^2$

$=\frac{1}{3}\left(8+12x+6x^2+x^3\right)-\left(x^2+4x+4\right)$

$=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+\frac{8}{3}-x^2-4x-4=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3}$.

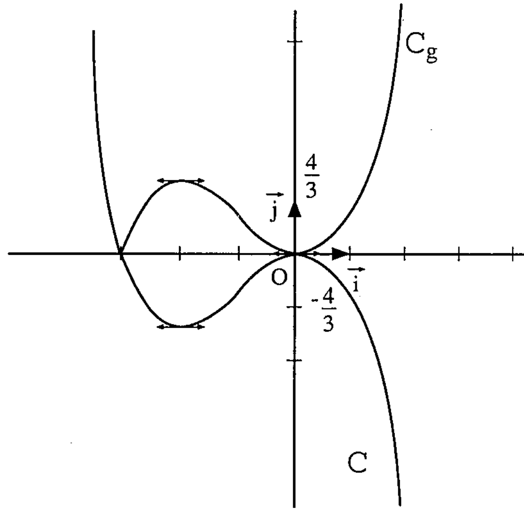
D'autre part $2\left(-\frac{2}{3}\right)-f(x)=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}x^3+x^2$

d'où $f(-2-x)=2\left(-\frac{2}{3}\right)-f(x)$ donc $I\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ est un centre de symétrie de ξ.

d) Etude des branches infinies:

$$* \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{3}x^3-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{3}x^2-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{3}x^2\right)=-\infty$$

donc ξ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisignage de $-\infty$.



* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^2\right)=-\infty.$

Donc ξ admet un branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$.

* $f'(-1)=1$ donc la courbe ξ admet une tangente de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ au point d'inflexion I.

* $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-3$.

3) $\Delta_m : y=-mx+p$ et $O(0,0)\in\Delta$ donc $p=0$ d'où $\Delta_m : y=-mx$.

a) Soit $M(x,y)\in\xi\cap\Delta_m \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=-mx \end{cases}$; $f(x)=-mx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3-x^2=-mx \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3+x^2-mx=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2+x-m\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\frac{1}{3}x^2+x-m=0 ; \Delta=1+\frac{4}{3}m=\frac{3+4m}{3}.$

<u>1^{er} cas</u> :

Si $3+4m>0 \Leftrightarrow m>-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \Delta>0$ et donc l'équation :

$\frac{1}{3}x^2+x-m=0$, admet deux racines distincts x' et x'' alors dans ce cas $\xi\cap\Delta_m=\{O,M',M''\}$ donc il y a 3 points d'intersection $O(0,0)$.

<u>$2^{ème}$ cas</u> :

Si $3+4m<0 \Leftrightarrow m<-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \Delta<0$ et donc l'équation :

$\frac{1}{3}x^2+x-m=0$ n'admet pas de racine et par suite $\xi\cap\Delta_m=\{O\}$

donc il y a un seul point d'intersection $O(0,0)$.

<u>$3^{ème}$ cas</u> :

Si $3+4m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \Delta=0$ et donc l'équation :

$\frac{1}{3}x^2+x-m=0$, admet une racine double $x_0=x'=x''$ et par suite :

$\xi \cap \Delta_m=\{O,M_0\}$ donc il y a 2 points d'intersection $O(0,0)$

et M_0 d'abscisse x_0.

b) $\Delta_m \cap \xi=\{O,M',M''\}$ dans ce cas $m \in \left]-\frac{4}{3},+\infty\right[-\{0\}$.

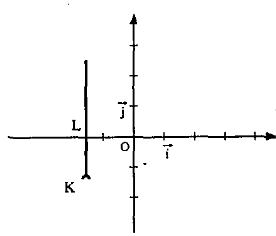
$$\text{Soit } I_m=M'*M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I_m}=\dfrac{x'+x''}{2} \\ y_{I_m}=\dfrac{y'+y''}{2} \end{cases}$$

Or x' et x'' sont solutions de l'équation : $\frac{1}{3}x^2+x-m=0$ donc

$x'+x''=S=-\frac{b}{a}=-3$ et $y'+y''=-mx'-mx''=-m(x'+x'')=-3m$

$$\text{et par suite } \begin{cases} x_{I_m}=\dfrac{-3}{2} \\ y_{I_m}=\dfrac{3}{2}m \end{cases} \text{ d'où } I_m\left(\frac{-3}{2},\frac{3}{2}m\right) \text{ avec } m \in \left]-\frac{4}{3},+\infty\right[-\{0\}.$$

c) Soit $H=\left\{I_m\left(\frac{-3}{2},\frac{3}{2}m\right) \text{ avec } m \in \left]-\frac{3}{4},+\infty\right[\right\}$.



$$\text{Soit } M(x,y) \in H \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}m \end{cases} \text{ avec } m \in \left]-\frac{3}{4},+\infty\right[-\{0\}.$$

Pour $m=-\frac{3}{4}$; $y=-\frac{9}{8}$. soit $k\left(\frac{-3}{2},-\frac{9}{8}\right)$ et $L\left(\frac{-3}{2},0\right)$ donc

l'ensemble H est le demi droite $[KL)$ privée de K et L

4) $T: y = f'(1)(x-1) - \frac{4}{3}$ équation de la tangente à ξ au point A.

Soit $T' = S_I(T)$; avec $I\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$. Comme la symétrie conserve le contact

Donc T' est la tangente à ξ au point $B = S_I(A)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_A}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A \\ y_B = 2y_I - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 - 1 = -3 \\ y_B = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

Donc $B(-3, 0)$.

5) a) $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 + x^2\right| = |f(x)|$.

Si $f(x) \geq 0$ alors $g(x) = f(x)$ et par suite $\xi_g = \xi_f$.

Si $f(x) \leq 0$ alors $g(x) = -f(x)$ et par suite $\xi_g = S_{(0,\vec{i})}(\xi_f)$.

b) D'après la représentation, on peut déduire le tableau de variation de g:

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Soit $\Delta: y = k$ avec $k \in IR$.

Les racines de l'équation $(E_k): g(x) = k$, sont les abscisse des points d'intersection de ξ' et Δ.

<u>1^{er} cas</u> : $k \in]-\infty, 0[$ donc $\xi' \cap \Delta = \varnothing$ et par suite l'équation (E_k) n'admet pas de solution.

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $k = 0$ donc $\xi' \cap \Delta = \{2 \text{points}\}$ et par suite l'équation (E_k) admet deux solutions.

<u>$3^{ème}$ cas</u> : $k \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$ donc $\xi' \cap \Delta = \{4 \text{points}\}$ et par suite

l'équation (E_k) admet quatre solutions.

<u>$4^{ème}$ cas</u> : $k = \frac{4}{3}$ donc $\xi' \cap \Delta = \{3 \text{points}\}$ et par suite l'équation (E_k)

admet trois solutions.

<u>$5^{ème}$ cas</u> : $k \in \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$ donc $\xi' \cap \Delta = \{2 \text{ points}\}$ et par suite

l'équation (E_k) admet deux solutions.

6

A) 1) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 ; D_f = IR$.

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et on a pour tout $x \in IR$; $f'(x) = 12x^2 - 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$.

2) On a: $f'(x) = 12x^2 - 3$ alors $f''(x) = 24x$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

* f'' s'annule et change de signe en 0 donc $I(0, f(0) = 1)$ est un point d'inflexion de ξ.

* $2 \times 0 - x = -x \in IR$ pour tout $x \in IR$.

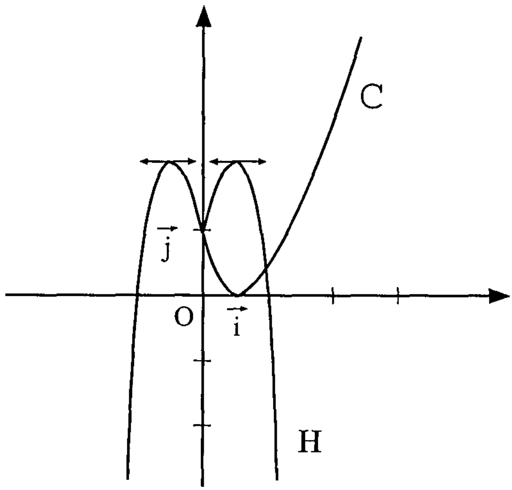
$f(-x) = -4(-x)^3 - 3(-x) + 1 = -4x^3 + 3x + 1$.

$2 \times 1 - f(x) = 2 - 4x^3 + 3x - 1 = -4x^3 + 3x + 1$

donc $f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$ et par suite $I(0,1)$ est un centre de symétrie de ξ.

3) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - 3x + 1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$.



Donc la courbe ξ admet une branche parabolique de direction y'oy au voisinage de $\pm\infty$.

* $f(0)=1$
* $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

4) $8x^3-6x+m=0$

$\Leftrightarrow 4x^3-3x+\frac{m}{2}=0$

$4x^3-3x+1=1-\frac{m}{2} \Leftrightarrow f(x)=1-\frac{m}{2}\,(E_m)$

Soit $\Delta : y=1-\frac{m}{2}$; les solutions de l'équation (E_m) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (ξ) et de la droite (Δ), or d'aprés

la représentation de la courbe ξ, $\xi\cap\Delta=\{3\text{ points}\}$, si et seulement si:

$1-\frac{m}{2}\in]0,2[\Leftrightarrow -\frac{m}{2}\in]-1,1[\Leftrightarrow m\in]-2,2[$.

Donc l'équation (E_m) admet 3 solutions distinct 2 à 2, si et seulement si : $m\in]-2,2[$.

5) Pour tout $x\in IR$; $-x\in IR$, on a:

$h(-x)=-4|-x|^3+3|-x|+1=-4|x|^3+3|x|+1=h(x)$ donc h est une fonction paire et par suite sa courbe H admet l'axe $(O\vec{j})$ comme axe de symétrie, donc il suffit de l'étudier sur IR_- or pour $x\in IR_-$; $|x|=-x$ et par suite $h(x)=4x^3-3x+1=f(x)$ donc $H=\xi_1\cup\xi_2$ avec ξ_1 est la restriction de la courbe ξ sur IR_- et $\xi_2=S_{(O\vec{j})}(\xi_1)$.

3) 1) $f_a(x)=\frac{4}{a^2}x^3-3x+a$.

$\forall x\in IR$ $f_a'(x)=\frac{12}{a^2}x^2-3$ et $f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow \frac{a}{2}$ ou $x=-\frac{a}{2}$.

Donc * $\text{Si } a > 0;\text{ alors } \frac{a}{2} > -\frac{a}{2}.$

* $\text{Si } a < 0;\text{ alors } \frac{a}{2} < -\frac{a}{2}.$

et par suite :* $\text{Si } a > 0:$

x	$-\infty$		$-\frac{a}{2}$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		+	0	-	0	+	
$f_a(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

* $\text{Si } a < 0:$

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		$-\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		+		-		+	
$f_a(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) a) D'après les tableaux de variations de la fonction f_a ; cette fonction

admet des extremums en $x=-\frac{a}{2}$ et $x=\frac{a}{2}$; $f_a\left(-\frac{a}{2}\right)=2a; f_a\left(\frac{a}{2}\right)=0.$

Donc $M_a\left(\frac{a}{2},0\right); N_a\left(-\frac{a}{2},2a\right).$

b) • Soit $D_a=\left\{M_a\left(\frac{a}{2},0\right);\text{avec } a\in \mathbb{R}^*\right\}.$

$M(x,y)\in D_a$ signifie que $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=0 \end{cases}$ avec $a\in \mathbb{R}.$

$y=0$ représente l'axe des abscisses et $x=\frac{a}{2}\neq 0$ car $a\in \mathbb{R}^*.$

Donc l'ensemble D_a est l'axe des abscisses privé du point $O(0,0).$

• Soit $D_a'=\left\{N_a\left(-\frac{a}{2},2a\right); a\in \mathbb{R}^*\right\}.$

$$M(x,y)\in D_a' \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{a}{2} \\ y=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2x\neq 0 \\ y=-4x \end{cases} \quad \text{car } a\in \mathbb{R}^*.$$

Donc l'ensemble D_a' est la droite d'équation $y=-4x$ privée du point $O(0,0)$.

C) 1) $f_1(x)=4x^3-3x+1; f_2(x)=x^3-3x+2.$

$g_m(x)=f_1(x)-m\,f_2(x)=(4-m)x^3-3(1-m)x+1-2m.$

$g'_m(x)=3(4-m)x^2-3(1-m).$

<u>1er cas</u> : $m=4$; $g_4'(x)=9>0.$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g_4'(x)$	+	
$g_4(x)$	$\nearrow$	

<u>2ème cas</u> : $m\neq 4$; $g_m'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1-m}{4-m}$;

cherchons le signe de $\dfrac{1-m}{4-m}$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$\dfrac{1-m}{4-m}$		+	0	-	||	+	

Si $m\in\,]1,4[$ alors $x^2=\dfrac{1-m}{4-m}<0$ impossible.

Donc le signe de g_m' est celui de $4-m>0$ donc g_m est strictement $\uparrow$.

Si $m\in\,]-\infty,1[$ alors $x^2=\dfrac{1-m}{4-m} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$		$\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$		$+\infty$
$g_m'(x)$		+	0	-	0	+	
$g_m(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Si $m\in]4,+\infty[$ alors $x^2=\dfrac{1-m}{4-m} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$ ou $x=\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$	$\sqrt{\dfrac{1-m}{4-m}}$	$+\infty$
$g_m'(x)$	-	+	-	
$g_m(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Si $m=1$ alors $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$		

2) $M(x,y)\in\xi_m \Leftrightarrow y=(4-m)x^3-3(1-m)x+1-2m$

$\Leftrightarrow m(-x^3+3x-2)+4x^3-3x+1-y=0.$

Cette équation est vraie pour toute valeur de m on a :

$$\begin{cases}-x^3+3x-2=0\\ 4x^3-3x+1-y=0\end{cases}$$

* $-x^3+3x-2=0$; on remarque que 1 est une solution d'où :

$-x^3+3x-2=(x-1)(-x^2+ax+b)=-x^3+x^2(a+1)+x(-a+b)-b.$

Ainsi $a+1=0$ et $-a+b=3$ et $-2=-b$.

Par suite $a=-1$ et $b=2$; on obtient : $-x^3+3x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $-x^2-x+2=0$

On remarque que : $-1-1+2=0$ d'où $x'=1$ et $x''=\dfrac{c}{a}=-2$.

Ainsi toutes les ξ_m passant par deux points fixes :

$A(1,g_m(1))$ et $B(-2,g_m(-2))$ avec $g_m(1)=2$ et $g_m(-2)=-25$.

7 1) $f(x)=x^4-x^3+x^2-\dfrac{3}{4}x+1$ .f une fonction polynôme

donc dérivable sur IR et $f'(x)=4x^3-3x^2+2x-\dfrac{3}{4}$.

2) a) $g'(x)=12x^2-6x+2$

b) $g'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow \Delta'=3^2-24<0$ donc $12x^2-6x+2>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-\infty} 4x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $g(\frac{1}{2}) = 4.\frac{1}{8} - 3.\frac{1}{4} + 2.\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 0$

c) Si $x \geq \frac{1}{2}$ et on a g est strictement croissante sur IR

alors $g(x) \geq g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{1}{2}) = 0$ donc $g(x) \geq 0$

Si $x \leq \frac{1}{2}$ et on sait que g est strictement croissante sur IR

Alors $g(x) \leq g(\frac{1}{2})$ et $g(\frac{1}{2}) = 0$ donc $g(x) \leq 0$

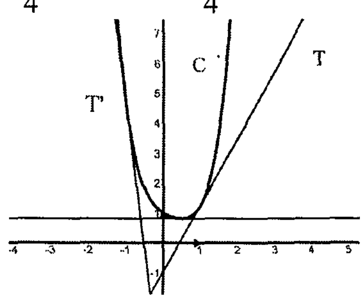
3) a) on a : $f'(x) = g(x)$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{13}{16}$	↗	$+\infty$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + 1 = \frac{13}{16} \simeq 0{,}81$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty = \lim\limits_{-\infty} f$.

b) * $f'(1) = \frac{9}{4}$ et $f(1) = \frac{5}{4}$ donc la tangente en 1 est :

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ alors $T : y = \frac{9}{4}(x-1) + \frac{5}{4}$ Soit $T : y = \frac{9}{4}x - 1$



* $f'(-1) = -\frac{39}{4}$ et $f(-1) = \frac{19}{4}$ donc la tangente en (-1) est :

$T' : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$T' : y = -\frac{39}{4}x - 5$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

Alors ζ_f admet 2 Blanches paraboliques de directeur (y y') en $+\infty$ et $-\infty$

8 1) une fonction polynôme du 1er degré ne convient pas car elle a pour représentative graphique une droite ce n'est pas notre cas.

2) a) $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+2$ définie sur $[0,4]$ et $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	0		4
f'(x)	0	-	
f(x)	2	↘	-2

b) $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2-2x+4$ définie sur $[0,4]$ et $g'(x)=\dfrac{1}{2}x-2 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$

x	0		4
g'(x)		-	
g(x)	4	↘	0

c) $M \in \zeta_f \cap \zeta_g \Leftrightarrow y=f(x)$ et $y=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ et $y=f(x)$

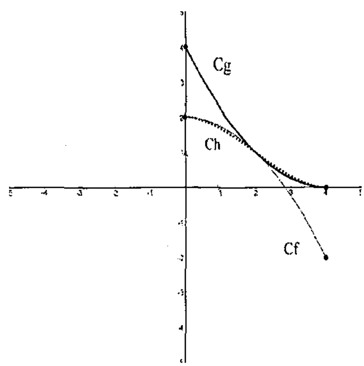
* $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2+2=\dfrac{1}{4}x^2-2x+4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $y=f(2)=1$. Par suite $\zeta_f \cap \zeta_g=\{C\ (2,1)\}$

d) $\begin{cases} f'(2)=-1 \\ f(2)=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g'(2)=-1 \\ g(2)=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} f'(2)=g'(2) \\ f(2)=g(2) \end{cases}$

par suite ζ_f et ζ_g ont la même tangente T en C.

f) la tangente en A est horizontale donc parallèle au sol la tangente en B est horizontale donc tangente au sol ainsi (1) et (2) son vérifié.



3) $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

a) $A\in\zeta \Leftrightarrow P(0)=2 \Leftrightarrow d=2$

b) $B\in\zeta \Leftrightarrow P(4)=0 \Leftrightarrow 64a+16b+4c+2=0$

$\Leftrightarrow 32a+8b+2c+1=0$

On a P'(x) = $3ax^2+2bx+c$ D'après (1) et (2) on obtient P(0)=0 et P'(4)=0

Ou encore c= 0 et b = -6a Comme 32a + 8b + 2c+1 =0

32a-48a+1=0 d'où $a=\frac{1}{16}$ et $b=\frac{-3}{8}$

c) $h(x) = \frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2$ définie sur[0,4]

$h'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{6}{8}x = \frac{3}{16}x(x-4)$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

x	0		4
h'(x)	0	-	0
h(x)	2	↘	0

* $h''(x)= \frac{6}{16}x - \frac{6}{8}$; $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0		2		4
h''(x)		-	0	+	

ζ_h admet au point d'inflexion u point (2,1) et $h'(2)=\frac{-3}{4}$

9 1) a) faux : $\lim_{-\infty} f = 2 \Rightarrow y = 2$ est asymptote à ζ pas $x = 2$

b) Vrai : $\lim_{1} f = +\infty \Rightarrow x = 1$ asymptote à ζ

c) faux : y = 3 coupe ζ en 3 points car sur [0, 1[on a $f(x) \geq -1$ donc f(x) = 3 admet 1 solutions soit même sur]1, 3] et [3, $+\infty$] on a $f(x) \geq 0$ donc 2 solutions.

2) a) faux : $\lim_{1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{1^-} -\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

puisque $\lim_{1^-} x+1 = 2$ et $\lim_{1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$ d'où f n'est pas dérivable en1.

b) Vrai:[-1, 1] donc définie en tout point de l'intervalle d'où ζ_f n'a pas d'asymptote.

4) faux : $f(x) = \frac{1}{x}$ admet 2 asymptotes seulement x = 0 et y = 0

donc pas d'asymptote oblique.

■ **Fonction rationnelle de type :** $\dfrac{ax+b}{cx+2}$ et $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+c}$

10 1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $D_f=IR-\{1\}$.

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $IR-\{1\}$ et on a pour tout $x\in IR-\{1\}$; $f'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	
f(x)	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

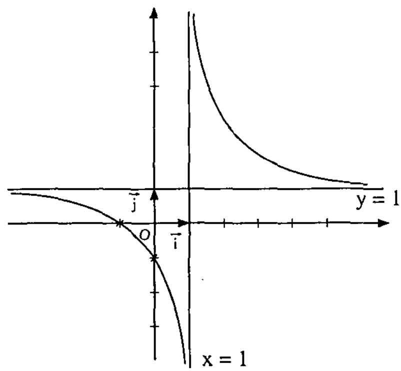
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2\\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Donc les droites d'équations x = 1 et y = 1, sont deux asymptotes à (H).



- Montrons que I(1,1) est un centre de symétrie. Pour tout $x\in IR, 2-x\in IR$.

  * $f(2-x)=\dfrac{2-x+1}{2-x-1}=\dfrac{3-x}{1-x}$.

  * $2-f(x)=2-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{3-x}{1-x}$; d'où $f(2-x)=2-f(x)$

  et par suite I(1 ,1) est bien un centre de symétrie pour ζ .

  * $f(0)=-1$ et $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ donc $f(-1)=0$ et $f(2)=3$.

2) Le coefficient de la tangente à H en A est $f'(2)=-2$

T' est tangente à (H) ayant le même coefficient directeur que T ;

Signifie que $f'(x_0)=-2$ ou encore $\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-2\Leftrightarrow -2(x_0-1)^2=-2$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=1\Leftrightarrow x_0-1=1$ où $x_0-1=-1\Leftrightarrow x_0=2$ où $x_0=0$

or $x_0=2$ est l'abscisse du point A donc l'autre point de contact est le point A' d'abscisse 0

• A(2,3) ; I(1,1) ;A'(0,-1).

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$;$\overrightarrow{A'I}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. En remarque que $\overrightarrow{A'I}= -\overrightarrow{AI}$. donc A, I et A' sont alignés.

3) D :y=-2x+m.

Soit $M(x,y) \in H \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+1}{x-1} \\ y = -2x + m \\ x \in \mathbb{R} - \{1\} \end{cases}$ alors $\dfrac{x+1}{x-1} = -2x + m$

$\Leftrightarrow x + 1 = (-2x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x + 1 = -2x^2 + 2x + mx - m$

$\Leftrightarrow -2x^2 + x(1 + m) - m - 1 = 0$ (E_m).

$\Delta = (1+m)^2 - 8(m + 1) = m^2 - 6m - 7$.

m	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$m^2 - 6m - 7$		+	0	-	0	+	

* Si $m \in]-1, 7[$; $\Delta < 0$ donc l'équation (E_m) n'admet pas des racines et par suite $H \cap D = \varnothing$.

* Si $m \in]-\infty, -1[\cup]7, +\infty[$; $\Delta > 0$ donc l'équation (E_m) admet deux racines distincts x' et x'' et par suite $H \cap D = \{M', M''\}$ avec
$M'(x', f(x'))$
et $M''(x'', f(x''))$.

* Si $m = -1$ où $m = 7$; $\Delta = 0$ donc l'équation (E_m) admet une racine double $x = x' = x''$ et par suite $H \cap D = \{M\}$.

Donc la droite D rencontre H en deux points M' et M'' distincts ou confondus si et seulement si $m \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[7, +\infty\right[$.

4) $H \cap D = \{M', M''\}$ pour $m \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[7, +\infty\right[$.

$J = M' * M''$ donc $\begin{cases} x_J = \dfrac{x' + x''}{2} \\ y_J = \dfrac{y' + y''}{2} \end{cases}$

Or x' et x'' sont les solutions de l'équation (E_m) et par suite :

$x' + x'' = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{1+m}{2}$ et $y' = -2x' + m$; $y'' = -2x'' + m$.

d'où $y'+y''=-2(x'+x'')+2m=-1-m+2m=m-1$;

d'où $\begin{cases} x_J=\dfrac{1+m}{4} \\ y_J=\dfrac{m-1}{2} \end{cases}$ donc $j(\dfrac{1+m}{4},\dfrac{m-1}{2})$.

Soit $E=\{J(\dfrac{1+m}{4},\dfrac{m-1}{2})$ avec $m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]7,+\infty\right[\}$.

Soit $M(x,y)\in E$ signifie que $\begin{cases} x=\dfrac{1+m}{4} \\ y=\dfrac{m-1}{2} \end{cases}$

$x=\dfrac{1+m}{4}\Leftrightarrow m=4x-1$ et par suite $y=2x-1$ avec $m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]7,+\infty\right[$.

*pour $m=-1$; $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ soit A(0,-1). * pour $m=1$; $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ soit B(2,3).

Donc l'ensemble E est la droite $D_1 : y=2x-1$ privée du segment [AB].

11 1) a) $\Delta : y=2$ est une asymptote horizontale à ζ_m signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+2-m}{2x+m-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx}{2x}=\dfrac{m}{2}$ donc Δ:y=2 est une asymptote horizontale à ζ_m si et seulement si $\dfrac{m}{2}=2\Leftrightarrow m=4$.

b) $\Delta : x=1$ est une asymptote verticale à ζ_m signifie que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

or $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{mx+2-m}{2x+m-5}=\dfrac{2}{m-3}$.

pour avoir la limite $+\infty$, il faut donc $m-3=0\Leftrightarrow m=3$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $D_f=IR-\left\{\dfrac{5-m}{2}\right\}$

Et on a pour tout $x\in IR-\left\{\dfrac{5-m}{2}\right\}$.

$$f_m'(x)=\frac{m(2x+m-5)-2(mx+2-m)}{(2x+m-5)^2}=\frac{m^2-3m-4}{(2x+m-5)^2}$$

$f_m'(x)$ a le même signe que m^2-3m-4.

$m^2-3m-4=0$; $a-b+c=0$ donc $m=-1$ ou $m=4$.

m	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
m^2-3m-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

* 1^{er} cas : si $m \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$f_m'(x) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{5-m}{2}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	||	$+$	
$f_m(x)$	$\frac{m}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$

* $2^{ème}$ cas : Si $m \in]-1,4[$ alors

$f_m'(x) < 0$

x	$-\infty$		$\frac{5-m}{2}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	||	$+$	
$f_m(x)$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	$\frac{m}{2}$

* <u>$3^{ème}$ cas:</u> Si $m \in \{-1,4\}$.

- Si $m=-1$; $f_{-1}(x)=\dfrac{-x+1+2}{2x-6}=\dfrac{-x+3}{2(x-3)}=-\dfrac{1}{2}$ pour $x \in IR-\{3\}$.

  Donc f_{-1} est constante avec $Df_{-1}=IR-\{3\}$.

- Si $m=4$; $f_4(x)=\dfrac{4x-2}{2x-1}=2$ pour $x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$ donc f_4 est constante avec $Df_4=IR-\{\frac{1}{2}\}$.

3) soit $M(x,y) \in \zeta_m$ signifie que $y=f_m(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{mx+2-m}{2x+m-5}$

$\Leftrightarrow y(2x+m-5)=mx+2-m \Leftrightarrow 2xy+my-5y-mx-2+m=0$

$\Leftrightarrow m(y+1-x)+2xy-5y-2=0$. Cette équation est vérifiée pour tout

$m \in IR-\{-1,4\}$ si et seulement si $\begin{cases} y+1-x=0 & (1) \\ 2xy-5y-2=0 & (2) \end{cases}$

d'après (1) on a : $y = x-1$ et en remplaçant dans (2) , on obtient :

$2x(x-1)-5(x-1)-2=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0$ d'où $x=\dfrac{1}{2}$ où $x=3$.

- pour $x=\dfrac{1}{2}$; $y=-\dfrac{1}{2}$ et pour $x=3$; $y=2$. Donc toutes les courbes ζ_m

  passent par deux points fixes : $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ et $B(3,2)$.

3) les équations des asymptotes sont : Δ: $y=\dfrac{m}{2}$ et Δ': $x=\dfrac{5-m}{2}$.

Soit $I_m(x,y)\Delta\cap\Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-m}{2} \\ y=\dfrac{m}{2} \end{cases}$ donc $I_m(\dfrac{5-m}{2},\dfrac{m}{2})$

on pose $E_m = \{I_m(\dfrac{5-m}{2},\dfrac{m}{2})$ avec $m \in IR-\{-1,4\}\}$.

Soit $M(x,y)\in E_m \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-m}{2} (1) \\ y=\dfrac{m}{2} (2) \end{cases}$; (1) $\Leftrightarrow$ $2x=5-m \Leftrightarrow m=5-2x$.

En remplaçant dans (2), on obtient : $y = -x+\dfrac{5}{2}$.

* pour $m = -1$; $x=3$ et $y = -\dfrac{1}{2}$. Soit $J(3,-\dfrac{1}{2})$.

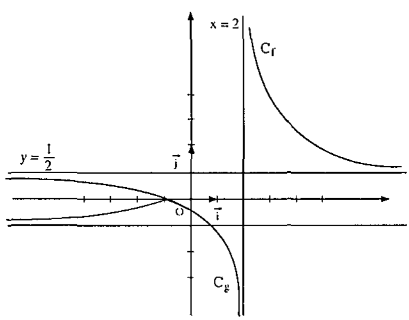
* pour $m = 4$ $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 2$. Soit $K(\dfrac{1}{2},2)$.

Donc I_m varie sur une droite D : $y = -x+\dfrac{5}{2}$, privée des deux point J et K

5) $f_1(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$; $m=1\in\left]-1,4\right[$ donc d'après 2), $f'_m(x)<0$ et on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'_1(x)$		-	||	-	
$f_1(x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$

Les droites d'équations $x=2$ et $y=\dfrac{1}{2}$, sont deux asymptotes à ζ_1.



6) $g(x)=\dfrac{|x+1|}{2x-4}= \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-4} & \text{si } x\geq -1 \\ -\dfrac{x+1}{2x-4} & \text{si } x\leq -1 \end{cases}$

Donc $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]-1, +\infty[\\ -f(x) \text{ si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$ et par suite:

• $\zeta_g = Cf$ si $x \in]-1, +\infty[$. • $\zeta_g = S_{(0\vec{i})}(\zeta_g)$ si $x \in]-\infty, -1[$.

12 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}; D_f=IR-\{2\}$

1) $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$

$=\dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$ si et seulement si:

$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-1 \\ -2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$ d'où $f(x)=x+1+\dfrac{3}{x-2}$.

2) f(x) est une fonction rationnelle donc est dérivable sur son domaine

$IR-\{2\}$ et on a : pour tout $x \in IR-\{2\}; f'(x)=1-\dfrac{3}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

Le signe de f ' (x) et celui de x^2-4x+1.

$x^2-4x+1=0$; $\Delta'=4-1=3$ d'où $x=2-\sqrt{3}$ où $x=2+\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-4x+1		+	0	-	0	+	

Donc

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

3) a) * $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$ de même:

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$ donc la droite Δ d'équation :

$y = x+1$ est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation D :x=2

est une asymptote à ζ.

Soit $I(x,y) \in \Delta \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ donc I(2,3).

* Montrons que I(2,3) est un centre de symétrie de ζ.

$x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq -2 \Leftrightarrow 4-x \neq 2$

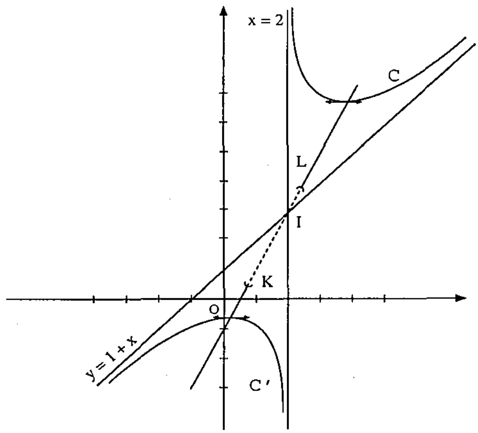
d'où $4-x \in IR-\{2\}$.

• $f(4-x)=\dfrac{(4-x)^2-(4-x)+1}{4-x-2}$

$=\dfrac{16-8x+x^2-4+x+1}{2-x}$

• $f(4-x)=\dfrac{x^2-7x+13}{2-x}$.

$6-f(x)=6-\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$



$=\dfrac{6x-12-x^2+x-1}{x-2}=\dfrac{-x^2+7x-13}{x-2}$ et par suite $6 - f(x)=\dfrac{x^2-7x+13}{2-x}$.

D'où f(4-x)=6-f(x) donc I(2,3) est un centre de symétrie de ζ.

4) Soit $(E_m) : x^2-(m+1)x+2m+1=0 \Leftrightarrow x^2-x+1-mx+2m=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+1+m(2-x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x-2}=m$ pour tout $x \in IR-\{2\}$

$\Leftrightarrow f(x)=m$; soit D:y=m.

Donc les solutions de l'équation (E_m) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (ζ) avec la droite Δ_m.

1er cas : Si $m \in \left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right[\cup \left]2+\sqrt{3}, +\infty\right[$ donc $D \cap \zeta$={2points} donc l'équation (E_m) admet deux solutions distincts.

2ème cas : Si $m \in \{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$;$D \cap \zeta$={1point} donc l'équation (E_m) admet une seule solution.

3ème cas : Si $m \in \left]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right[$;$D \cap \zeta = \varnothing$ donc l'équation (E_m) n'admet pas de solution.

5) soit D : y = m ;

$D \cap \zeta = \{M', M''\}$ si et seulement si $m \in \left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right[\cup \left]2+\sqrt{3}+\infty\right[$.

Soit x' et x'' sont les abscisses respectives des points M' et M''.

x' et x'' sont les solutions de l'équation : $x^2-(m+1)x+2m+1=0$;

Donc $x'+x''=-\dfrac{b}{a}=m+1$ et $y'=m;y''=m$.

$$I=M'*M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{x'+x''}{2} \\ y_1=\dfrac{y'+y''}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{m+1}{2} \\ y_1=\dfrac{2m}{2}=m \end{cases}$$

Donc $I(\dfrac{m+1}{2},m)$ avec $m\in\left]-\infty,2-\sqrt{3}\right[\cup\left]2+\sqrt{3},+\infty\right[$

a) $H=\{I(\dfrac{m+1}{2},m)$ avec $m\in\left]-\infty,2-\sqrt{3}\right[\cup\left]2+\sqrt{3},+\infty\right[\}$

Soit $M(x,y)\in H$ signifie que $\begin{cases} x=\dfrac{m+1}{2} \\ y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$

* pour $m=2-\sqrt{3};x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $y=2-\sqrt{3}$. soit $K(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3})$

* pour $m=2+\sqrt{3};x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $y=2+\sqrt{3}$. Soit $L(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$

Donc l'ensemble H est la droite D_1 : $y=2x-1$, privée du segment [KL].

b) OM'M '' est rectangle en O, si et seulement si $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}=0$.

$\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM''}\begin{pmatrix} x'' \\ m \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}=0. \Leftrightarrow x'x''+m^2=0$ or $x'x''=\dfrac{c}{a}=2m+1$

donc $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}=0. \Leftrightarrow 2m+1+m^2=0 \Leftrightarrow (m+1)^2=0 \Leftrightarrow m=-1$

donc $OM'M''$ rectangle en O, si et seulement si $m=-1$.

6) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $x\mapsto |x|+1+\dfrac{3}{|x|-2}$.

a) $D_g=\{x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|-2\neq 0\}$

$|x|-2=0 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=2$ où $x=-2$ d'où $D_g=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

$x\in D_g \Leftrightarrow x\neq -2$ et $x\neq 2 \Leftrightarrow -x\neq 2$ et $-x\neq -2 \Leftrightarrow -x\in D_g=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

$g(-x)=|-x|+1+\dfrac{3}{|-x|-2}=|x|+1+\dfrac{3}{|x|-2}=g(x)$ d'où g est paire.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2(x+1)(x-2)+6+(x-2)}{2x(x-2)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(2x-1)}{2x(x-2)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-1}{2(x-2)}=\dfrac{1}{4}=g_d'(0).$

g est paire il suffit de l'étudier sur $D_g\cap IR_+=IR_+-\{2\}$;

or pour $x\in IR_+-\{2\}$; $g(x)=f(x)$ et par suite :

x	0		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

13

A) a) * $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}f_m(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}2x+1+\dfrac{m-3}{2x-1}.$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}2x+1=2$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}(2x-1)=0^-$ donc:

- Si $m>3$ alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}f_m(x)=-\infty$ • Si $m<3$ alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}f_m(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f_m(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}2x+1+\dfrac{m-3}{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(2x-1)=0^+$ donc:

- Si $m>3$ alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f_m(x)=+\infty$. Si $m<3$ alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f_m(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1+\dfrac{m-3}{2x-1}=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m-3}{2x-1}=0\end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x+1+\dfrac{m-3}{2x-1}=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}2x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-3}{2x-1}=0\end{cases}$

b) f_m est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine :

$IR-\{\dfrac{1}{2}\}$ et on a : pour tout $x\in IR-\{\dfrac{1}{2}\}$;

$f_m'(x) = -2-\frac{2(m-3)}{(2x-1)^2}=\frac{2[(2x-1)^2-(m-3)]}{(2x-1)^2}$ et $f_m'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2-(m-3)=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=m-3$.

- Si $m<3$ alors $\underbrace{(2x-1)^2}_{\in IR_+-\left\{\frac{1}{2}\right\}} = \underbrace{m-3}_{\in IR_+^*}$ impossible.

D'où $f_m'(x) \neq 0$ pour tout $x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$ Et par suite $f_m'(x) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f_m(x)$		↗	‖	↗	

- Si $m>3$ alors $(2x-1)^2=m-3 \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{m-3}$ ou $2x-1=-\sqrt{m-3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{m-3}+1}{2}$ où $x=\frac{1-\sqrt{m-3}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{m-3}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{m-3}}{2}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

2) • Montrons que la droite Δ : $y = 2x+1$ est une asymptote oblique au voisinage de l'infinie.

* $\lim_{x\to+\infty}[f_m(x)-(2x+1)]= \lim_{x\to+\infty}\frac{m-3}{2x-1}=0$.* $\lim_{x\to-\infty}[f_m(x)-(2x+1)]= \lim_{x\to-\infty}\frac{m-3}{2x-1}=0$.

Donc Δ : $y = 2x+1$est une asymptote oblique commune à toutes les courbes (ζ_m)

D'après 1) a), on a : $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f_m(x)=\begin{cases}-\infty \text{ si } m>3\\ +\infty \text{ si } m<3\end{cases}$ et $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f_m(x)=\begin{cases}+\infty \text{ si } m>3\\ -\infty \text{ si } m<3\end{cases}$

alors D : $x =\frac{1}{2}$ est une asymptote commune à toutes les courbes (ζ_m).

• Montrons que $W(\frac{1}{2},2)$ est un centre de symétrie pour (ζ_m).

$*x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$ signifie que $x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-x \neq \frac{1}{2}$ d'où $1-x \in IR-\{\frac{1}{2}\}$

$*f_m(1-x)=2(1-x)+1+\dfrac{m-3}{2(1-x)-1}=3-2x+\dfrac{m-3}{1-2x}$.

$*\ 4-f_m(x)=4-2x-1-\dfrac{m-3}{2x-1}=3-2x+\dfrac{m-3}{-2x+1}=f_m(1-x)$

D'où $W(\frac{1}{2},2)$ est un centre de symétrie de (ζ_m).

3) $S(1,4)$ soit un sommet de (ζ_m) signifie que $\begin{cases} f_m'(1)=0 \\ f_m(1)=4 \end{cases}$

Or $f'_m(1)=8-2m$; $f_m(1)=3+m-3=m$

$\begin{cases} f'_m(1)=0 \\ f_m(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m=0 \\ m=4 \end{cases}$ c'est vérifiée.

Donc $S(1,4)$ est un sommet de (ζ_m) si et seulement si $m = 4$.

B) 1) $m = 4$ donc $m > 3$

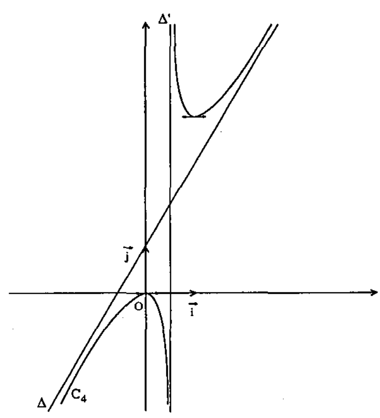
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'_4(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

On a: $\Delta: y = 2x+1$ est une asymptote oblique au voisignage de $+\infty$;

et $\Delta': x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale.



2) a) $g(x) = 2x+1+\dfrac{1}{|2x-1|}$ alors $D_g = \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	|	$+$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$	|	$2x-1$

D'ou
$$g(x)=\begin{cases} f_4(x) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\\ 2x+1-\dfrac{1}{2x-1} \text{ si } x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\end{cases}$$

- Si $x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$; on a: $g(x)=f_4(x)$ donc

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| ∞	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$; on a: $g(x)=2x+1-\dfrac{1}{2x-1}$ alors $g'(x)=2+\dfrac{2}{(2x+1)^2}>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$	||
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f_4'(x)$		$+$	||	$-$	|	$+$	
$f_4(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

b) • $\Delta : y = 2x+1$ est une asymptote oblique à (ζ').

• $D : x = \dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (ζ').

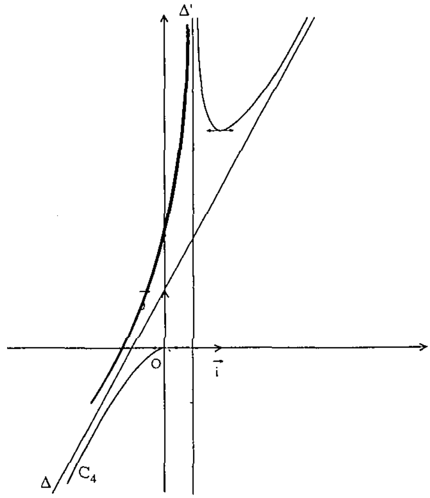
• $g(0)=0$.

c)

(E_m): $|2x-1|(m-2x-1)=1 \Leftrightarrow m-2x-1=\dfrac{1}{|2x-1|}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{|2x-1|}+2x+1=m \Leftrightarrow g(x)=m.$

Soit $D_m : y=m$; donc les solutions de l'équation (E_m) sont les abscisses des points d'intersection de D_m et (ζ') donc :



1^er cas :
$m \in]-\infty,4[; D_m \cap C' = \{1\text{point}\}$, donc l'équation (E_m) admet une seule solution.

2^ème cas : $m = 4$; $D_m \cap \zeta' = \{2\text{points}\}$, donc l'équation (E_m) admet deux solutions.

3^ème cas : $m \in]4,+\infty[; D_m \cap \zeta' = \{3\text{points}\}$, donc l'équation (E_m) admet trois solutions.

C) 1) $M(x,y)_R \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

$M(X,Y)_{R'} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}+X(\vec{i}+2\vec{j})+Y\vec{j}$.

$\overrightarrow{OM}=(\dfrac{1}{2}+X)\vec{i}+(2+2X+Y)\vec{j}$ or $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ d'où $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+X \\ y=2+2X+Y \end{cases}$

$\zeta : y=2x+1+\dfrac{1}{2x-1}$ d'où $2+2X+Y=2(\dfrac{1}{2}+X)+1+\dfrac{1}{2(\frac{1}{2}+x)-1}$

où encore: $2+2X+Y=1+1+2X+\dfrac{1}{1+2x-1}$ et par suite $\zeta : y=\dfrac{1}{2X}$ dans le repère R'.

2) $T: Y=f'(X_0)(X-X_0)+f(X_0)$ est l'équation de la tangente à ζ au point

M_0 d'abscisse X_0 dans le repère R' or $f'(X_0) = -\dfrac{1}{2X_0^2}$; $f(X_0)=\dfrac{1}{2X_0}$.

D'où T : $Y= -\dfrac{1}{2X_0^2}(X-X_0)+\dfrac{1}{2X_0}$ ou encore

$T: Y = -\dfrac{1}{2X_0^2}X+\dfrac{1}{2X_0}+\dfrac{1}{2X_0}$ d'où $T: Y=-\dfrac{1}{2X_0^2}X+\dfrac{1}{X_0}$.

3) Dans le repère R', l'équation de la courbe ζ est : $Y=\dfrac{1}{2X}$.

Donc les équations des asymptotes sont D_1 : $Y = 0$ et $D_2 : X = 0$
Car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(X) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(X) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(X)= -\infty$

On a :

- $M(X,Y) \in D_1 \cap T \Leftrightarrow \begin{cases} Y=0 \\ Y= -\dfrac{1}{2X^2_0}X+\dfrac{1}{X_0} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2X_0^2}X+\dfrac{1}{X_0}=0$

  $\Leftrightarrow X=2X_0$ d'où $D_1 \cap T=\{A(2X_0,0)\}$

- $D_2 \cap T=\{B(0,\dfrac{1}{X_0})\}$. Montrons que $S_{M_0}(A)=B$.

$$\begin{cases} \dfrac{X_A+X_B}{2}=\dfrac{2X_0+0}{2}=X_0 \\ \dfrac{Y_A+Y_B}{2}=\dfrac{0+\dfrac{1}{x_0}}{2}=\dfrac{1}{2X_0} \end{cases}$$

or $M_0(X_0;f(X_0)=\dfrac{1}{2X_0^2})$ donc $A*B=M_0$ d'où $S_{M_0}(A)=B$

et par suite la propriété « P » est bien vérifiée.

14 A) 1) $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x-1}$;$Df_m=IR-\{1\}$.

a) f_m est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine
IR-{1} et on a pour tout $x\in$ IR-{1}.

$$f_m'(x)=\frac{(2x+m)(x-1)-(x^2+mx+4)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-m-4}{(x-1)^2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f_m(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+mx+4}{x-1}$.

m	$-\infty$		-5		$+\infty$
$5+m$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+mx+4)=5+m$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$.

Donc il est nécessaire d'étudier la limite à droite et à gauche en 1 ;

Et on a $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0^+$.

<u>1^{er} cas</u> : $m \neq -5$.

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f_m(x)=\begin{cases}-\infty \text{ si } m\in\,]-5,+\infty[\\ +\infty \text{ si } m\in\,]-\infty,-5[\end{cases}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_m(x)=\begin{cases}+\infty \text{ si } m\in\,]-5,+\infty[\\ -\infty \text{ si } m\in\,]-\infty,-5[\end{cases}$

<u>$2^{ème}$ cas</u> : m-5 ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)}=-3$.

2) $f'_m(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-m-4=0$; $\Delta'=m+5$.

f_m admet deux extremums si et seulement si $m+5>0 \Leftrightarrow m>-5$ et dans ce cas $f'_m(x)=0 \Leftrightarrow x'=1-\sqrt{m+5}$ où $x''=1+\sqrt{m+5}$

x	$-\infty$		x'		1		x''		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x')$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$f(x'')$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $M(x,y)\in \zeta_m \Leftrightarrow y=f_m(x)$

$\Leftrightarrow x^2+mx+4=y(x-1)$ pour tout $x\in \mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow mx+x^2+4-yx+y=0$; cette équation est vérifiée pour tout

$m\in\mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases}x=0\\ x^2+4-yx+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$

Donc toutes les courbes C_m passent par un point fixe A(0,4).

b) Soit T : $y=f'_m(0)(x-0)-4$.

T : $y=f'_m(0)\,x-4$ est l'équation de la tangente à C_m en T.

T ait pour coefficient directeur (-3) , si et seulement si :

$f'_m{}'(0)=-3 \Leftrightarrow -m-4=-3 \Leftrightarrow m=-1$.

B) 1) $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$; Df=IR-{1}. et $f'(x)= \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

$* \quad x+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{x(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{x^2-x+4}{x-}=f(x).$

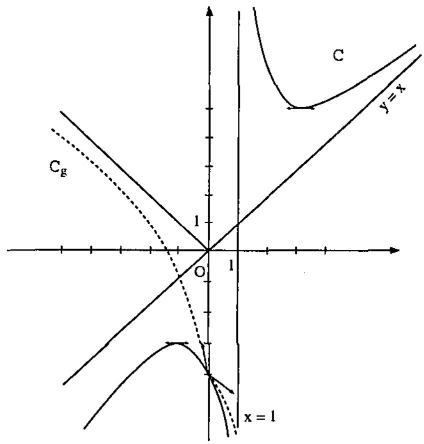
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$

de même $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

donc $y=x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty et\ -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$

donc x=1 est une asymptote à C.



2) a) $M\in D_a\cap C \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+1-a \\ y=f(x)\end{cases}$ alors $f(x) = ax+1-a \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+4}{x-1}=ax+1-a;$

où encore $x^2-x+4=(ax+1-a)(x-1) \Leftrightarrow (a-1)x^2+2(1-a)x+a-5=0.$

$\Delta'=(1-a)^2-(a-1)(a-5)=4a-4.$

D_a coupe C en deux points distincts, si et seulement si:

$\Delta'>0$ où encore $4a-4>0 \Leftrightarrow a>1.$

b) $x'+x''=S=\dfrac{2a-2}{a-1}=2$ et $x'x''=\dfrac{a-5}{a-1}.$

Soit T' : $y = f'(x')(x-x')+f(x')$.et T'':$y=f'(x'')(x-x'')+f(x'')$.

T'//T'';si et seulement si $f'(x')=f'(x'')$. or $x' = 2- x''$

$$f'(x')=\frac{x'^2-2x'-3}{(x'-1)^2}=\frac{(2-x'')^2-2(-x''+2)-3}{(2-x''-1)^2}$$

$$=\frac{4+x''^2-4x''+2x''-4-3}{(1-x'')^2}=\frac{x''^2-2x''-3}{(x''-1)^2}=f'(x'') \text{ d'où } T_M'//T_M''.$$

3) a) $g(x)=-x+\dfrac{4}{x-1}$ si $x\in\left]-\infty,0\right]$. et $g'(x)=-1-\dfrac{4}{(x-1)^2}<0$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 0
g(x)	-
g'(x)	$+\infty$ $\searrow$ -4

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x+\frac{4}{x-1}+4}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2+x+4+4x-4}{x(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2+5x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(-x+5)}{x(x-1)}=-5=g_g'(0).$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\frac{4}{x-1}+4}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x+4+4x-4}{x(x-1)}$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+3x}{x(x-3)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+3}{x-3}=-1=g_d'(0)$ alors $g_d'(0)\neq g_g'(0)$.

Donc g n'est pas dérivable en 0 d'où C'admet en 0, un point Anguleux.

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(-x)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=0$ donc $y=-x$ est une asymptote à C' au voisinage de $(-\infty)$.

Si $x\geq0\Rightarrow g(x)=f(x)$ donc si $x\in IR_+$; C'=C.

- **<u>Fonction irrationnelle de type :</u>** $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{ax^2+bx+c}$

15 1) f est le produit de deux fonctions dérivables l'une sur IR $(x\mapsto x^2)$ et l'autre $(x\mapsto\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$
donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f'(x)=2x(\alpha-\sqrt{x})-\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}=2x(\alpha-\sqrt{x})-\dfrac{x\sqrt{x}}{2}$

d'ou $f'(x)=\dfrac{x}{2}(4\alpha-5\sqrt{x})$

2) Le signe de f' est celui de $4\alpha-5\sqrt{x}$ car $x>0$

$4\alpha - 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\alpha \Leftrightarrow x = \dfrac{16\alpha^2}{25}$

Si $x > \dfrac{16\alpha^2}{25}$ alors $\sqrt{x} > \dfrac{4\alpha}{5} \Rightarrow 4\alpha - 5\sqrt{x} < 0$

Si $x < \dfrac{16\alpha^2}{25}$ alors $\sqrt{x} < \dfrac{4\alpha}{5} \Rightarrow 4\alpha - 5\sqrt{x} > 0$

on obtient :

x	0		$\frac{16\alpha^2}{25}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

3) Le coefficient directeur de T est $f'(1) = \dfrac{4\alpha - 5}{2}$

Le coefficient directeur de D est 3.
T et D sont parallèles si et seulement si $f'(1) = 3$

soit $\dfrac{4\alpha-5}{2} = 3$ ou encore $\alpha = \dfrac{11}{4}$

16 1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

comme $f(1) = 1$ l'équation de la tangente en 1 à ζ_f est

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$

alors $g'(1) = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$ comme $g(1)=1$

donc l'équation de la tangente à ζ_f en 1 est

$T' : y = g'(1)(x-1) + g(1)$ alors $T' : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Par suite $T = T'$ donc ζ_f et ζ_g sont une tangente comme D d'équation

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ au point d'abscisse 1.

2) • Etude de la position de ζ_g et T :

$$g(x) - y = -\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} = -(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})^2 \leq 0$$

$\Rightarrow \zeta_g$ est au dessous de D.

• Etude de la position de ζ_f et D.

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1).\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{x^2-x+1}\right]=\frac{3}{4(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}>0$$

car x^2-x +1> 0 puisque $\Delta=-3<0$ donc ζ_f est au dessus de D.

3) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ et $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

le signe f' est celui de 2x-1

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

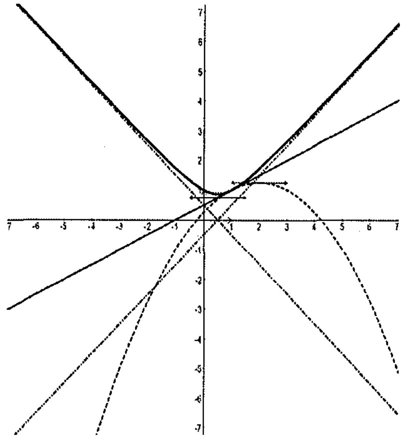
$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2-x+1=\lim_{|x|\to+\infty} x^2=+\infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-\frac{1}{2})\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2})(\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2})}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}^2-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}=0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \frac{1}{2} = +\infty$



donc $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote en $+\infty$ pour ζ_f

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x - \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4^2-x+1}^{\,2} - (x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1} - x + \frac{1}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1} - x + \frac{1}{2}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x + \frac{1}{2} = +\infty$

donc $y = -x + \frac{1}{2}$ est l'asymptote à ζ_f en $-\infty$.

4) ζ_f est une parabole de sommet $S\,(2, \frac{5}{4})$ d'axe de symétrie $(S, \vec{j})$

17 1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > x^2$

d'ou $\sqrt{1+x^2} > |x|$ ainsi $\sqrt{1+x^2} > x$ et $\sqrt{1+x^2} > -x$

par suite : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ et $\sqrt{1+x^2} + x > 0$

$* \sqrt{1+x^2} - x > 0$

$\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2}} - x > \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{1+x^2} > 0$

2) a) $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2 - \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

car d'après la 1ère question on a $2\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
par conséquent g est strictement croissante sur IR.

b) $g(x)=0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 4x^2 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{1/3}$ d'ou $S_{IR} = \{\sqrt{\frac{1}{3}}\}$

c) * si $x \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$ et g est strictement croissante sur IR

alors $g(x) \leq g(\sqrt{\frac{1}{3}})$ et $g(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 0$ donc $g(x) \leq 0$.

* Si $x \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$ et g est strictement croissante dur IR

alors $g(x) \geq g\ (\sqrt{\frac{1}{3}})$ et $g\ (\sqrt{\frac{1}{3}}) = 0$ donc $g\ (x) \geq 0$

d'ou :

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

3) a) * $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\sqrt{1+x^2} \text{-} x = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} - x = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x = (+\infty - \infty)\text{F.I}$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} - x = \lim_{x \to +\infty} x(\underbrace{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}_{1}) = +\infty \times 1 = +\infty$$

b) $f'(x) = 2.\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \quad = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \text{-} 1 = \dfrac{2x\text{-}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Le signe de f' est de g :

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$$f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 2\sqrt{1+\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

4) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\text{-}x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{1+x^2} \text{ - } x \text{ -}x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{1+x^2} \text{ -}2x$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

donc $y = x$ est une asymptote en $+\infty$ par ζ_f

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 3x = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} + 2x = \lim_{x\to-\infty} 2(\sqrt{1+x^2}+x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} 2\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

donc Δ est une asymptote en $-\infty$ pour ζ_f.

c) * **Position ζ_f et Δ :**

$f(x) + 3x = 2(\sqrt{1+x^2}+x) > 0$

d'après la 1ère question

$\sqrt{1+x^2}+x >$

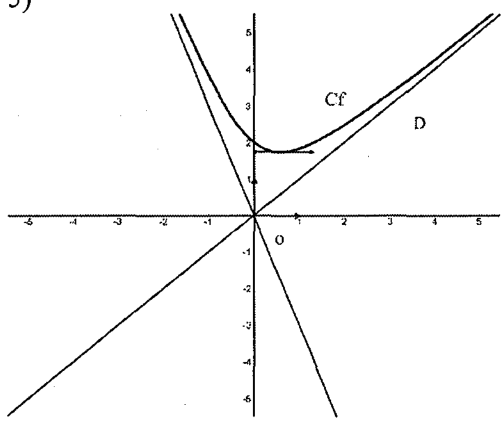
donc ζ_f est au dessus de Δ

* **Position ζ_f et D : y = x :**

$f(x) - x = 2(\sqrt{1+x^2} - x) > 0$ d'après la 1ère question :

donc ζ_f est au dessus de D.

5)



18 1) * $x^2 - 6x + 5 = 0$

$a+b+c = 1 - 6 + 5 = 0$

donc x=1 et x=5 sont ces racines.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	-	0	+	

* f est définie si et seulement si $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$D_f =]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$

2) • $x \in D_f \Leftrightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 5$

$\Leftrightarrow -x \geq -1$ ou $-x \leq -5 \Leftrightarrow 6 - x \geq 5$ ou $6 - x \leq 1 \Leftrightarrow 6 - x \in D_f$

• Montrons que f(6-x)=f(x)

$f(6-x)=\sqrt{(6-x)^2-6(6-x)+5}$

$=\sqrt{6^2-12x+x^2-6^2+6x+5}$

$=\sqrt{x^2-6x+5}=f(x)$

donc la droite Δ : $x = 3$ est un axe de symétrie par ζ .

3) $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\sqrt{(5+h)^2-6(5+h)+5}-0}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\sqrt{h^2+4h}}{h}$ or $h\geq0$

$=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\sqrt{h}\sqrt{h+4}}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\sqrt{h+4}}{h}=+\infty$ car $\lim\limits_{h\to0^+}\sqrt{h+4}=2$ et $\lim\limits_{h\to0^+}\sqrt{h}=0^+$

donc f n 'est pas dérivable en 5 par suite ζ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 5 dirigée vers le haut.

4) Comme $x^2-6x+5>0$ sur $]5,+\infty[$ alors f est dérivable sur $]5,+\infty[$

et $f'(x)=\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$ puisque $x>5 \Rightarrow x-3>2$

d'ou f est strictement croissante sur $]5,+\infty[$

$x=3$ étant un axe de symétrie pour ζ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+5}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-6x+5=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-3))=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+5}-(x-3)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[\sqrt{x^2-6x+5}-(x-3)][\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)]}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6x+5-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+5}+x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{f(x)+x-3}=0$

$=0$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-3=+\infty$

d'ou la droite D_1 : $y = x-3$ est une asymptote à ζ en $+\infty$

* d'après la propriétés de la symétrie de la courbe D_2 symétrique de D_1 sera l'asymptote à ζ en $-\infty$.

$A(3,0)\in D_1$ on aussi l'axe de symétrie donc $A\in D_2$

$B(4,1)\in D_1$ son symétrie $B'(2,1)\in D_2$

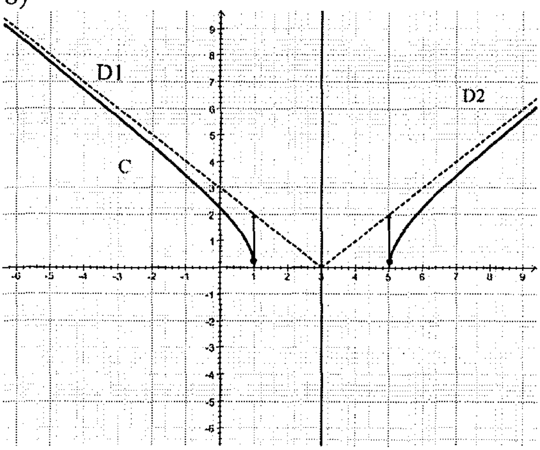
$D_2 : y = ax + b$

$$\begin{cases} A \in D_2 \Leftrightarrow 0 = 3a + b & (1) \\ B' \in D_2 \Leftrightarrow 1 = 2a + b & (2) \end{cases}$$ d'ou(1)-(2) donne $a = -1$ et on déduit que $b = 3$

ainsi $D_2 : y = -x + 3$

7) x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'(x)		-	‖	//////	‖	+	
f(x)	$+\infty$ ↘		0	//////	0		↗ $+\infty$

8)



■ Fonctions rationnelles de la forme : $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

19 1) $g(x) = ax^2 + bx + c$

Pour tout $x \in IR$, $g'(x) = 2ax + b$

$g'(1) = -1 \Leftrightarrow 2a + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - 2a$

$g'(2) = 1 \Leftrightarrow 4a + b = 1$ on remplace b par sa valeur on obtient

$4a - 1 - 2a = 1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$ par suite $b = -3$.

* l'équation de la tangente T en 1 est

$y = g'(1)(x-1) + g(1)$ or $g'(1) = -1$ et $g(1) = a + b + c = c - 2$

$y = -x + 1 + c - 2$ d'où $T : y = -x - 1 + c$

$A(2, -20) \in T \Leftrightarrow -20 = -2 - 1 + c \Leftrightarrow c = -17$

On a donc $g(x) = x^2 - 3x - 17$

2) $h(x) = rx^2 + sx + t$ alors $h'(x) = 2rx + s$

* La tangente en 0 a pour équation $T : y = h'(0)x + h(0)$

or $h(0) = t$ et $h'(0) = s$ alors $T : y = sx + t$

$B(0, -14) \in T \Leftrightarrow -14 = t$

$C(1, -16) \in T \Leftrightarrow -16 = s + t \Rightarrow s = -2$

* $h(1) = -15 \Leftrightarrow r + s + t = -15 \Leftrightarrow r - 14 - 2 = -15$ donc $r = 1$

on a donc $h(x) = x^2 - 2x - 14$

3) a) f est définie si et seulement si $h(x) \neq 0$

$x^2 - 2x - 14 = 0$

$\Delta' = 1 + 14 = 15$

$x' = 1 - \sqrt{15}$ et $x'' = 1 + \sqrt{15}$

$Df = IR - \{1 + \sqrt{15}, 1 - \sqrt{15}\}$

b) f est rationnelle donc dérivable sur Df

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-2x-14)-(2x-2)(x^2-3x-17)}{(x^2-2x-14)^2} = \frac{x^2+6x+8}{(x^2-2x-14)^2}$$

c) Le signe de f((x) est celui de $x^2 + 6x + 8$ puisque $(x^2 - 2x - 14)^2 > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Delta' = 9 - 8 = 1$ alors $x' = -3 - 1 = -4$ et $x'' = -3 + 1 = -2$

x	-7		-4		$1-\sqrt{15}$		-2		$1+\sqrt{15}$		7
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	||	+	
$f(x)$		↗		↘	||	↘		↗	||	↗	

20 1) f est définie si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ d'où $Df = IR - \{2, -2\}$

2) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur Df et

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-4)-(2x)(x^2+2x-3)}{(x^2-4)^2} = -2\frac{x^2+x+4}{(x^2-4)^2} < 0$$

car $(x^2 - 4)^2 > 0$ et $x^2 + x + 4 > 0$ puisque $\Delta = -17 > 0$

par suite f est strictement décroissante sur Df.

3) * $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$

$\Rightarrow$ $y = 1$ est une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ pour ζ

* $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to2^+} x^2 + 2x - 3 = 5$ et $\lim\limits_{x\to2^+} x^2 -' = 0^+$

de même $\lim\limits_{2^-} f(x) = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2} x^2+2x-3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2 - 4 = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{(-2)^+} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2} x^2+2x-3=-3\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2-4=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{(-2)^+} f(x)=-\infty$$

donc x = 2 et x = -2 sont deux asymptotes de ζ.

4) *

$$M\in\zeta_f\cap(o,\vec{i})\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ y=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\ y=0\end{cases}$$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$

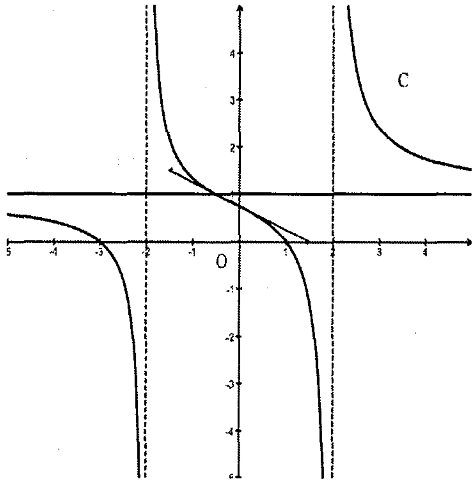
$\zeta_f\cap(o,\vec{i})=\{(1,0),(-3,0)\}$.

* $f'(1)=-\dfrac{4}{3}$ et $f'(-3)=-\dfrac{4}{5}$

*

$$\zeta_f\cap(o,\vec{j})=\left\{(0,\frac{3}{4})\right\}$$

* $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.



5) $(1-m)x^2+2x-3+4m=0$ équivaut à $m(x^2-4)=x^2+2x-3$

comme 2 et –2 ne sont pas solution de l'équation alors elle est équivalente à

$\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}=m$ Soit $f(x)=m$

l'équation admet autant de solutions qu'il y a de points d'intersection de ζ_f et la droite d'équation y = m.

- Si m = 1 alors l'équation admet 1 seule solution.
- Si $m\neq 1$ alors l'équation admet 2 solutions

21

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=a$

$\Rightarrow$ y = a est l'asymptote en $+\infty$ comme y = 1 donc a = 1.

* $0\in\zeta \Leftrightarrow f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$

* $f'(x)=\dfrac{(ax+b)(x-1)^2-2(x-1)(ax^2+bx+c)}{(x-1)^4}$

$f'(0)=b+2c$ or $f'(0)=-2$ par suite $b+2c=-2$ or $c=0$ donc $b=-2$

on a donc $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

2) f est définie si et seulement si $(x-1) \neq 0$. Soit $x \neq 1$ donc $Df = \mathbb{R} - \{1\}$.

* $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. * $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2x = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$.

3) a) Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} = \dfrac{2}{(x-1)^2(x-1)}$

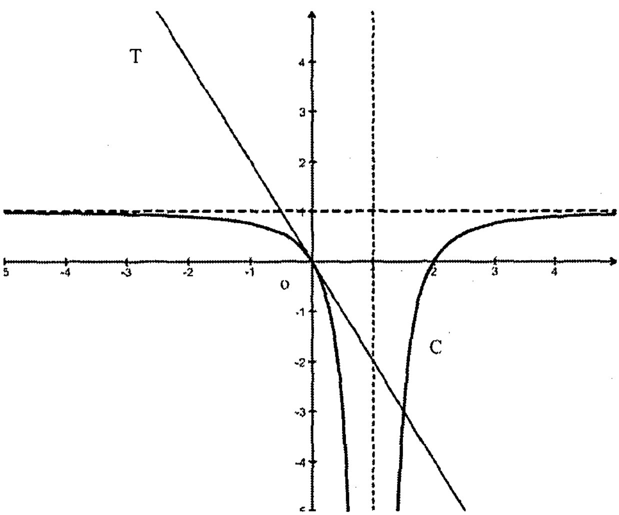
alors le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$ car $(x-1) > 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	+	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	||	$-\infty$ ↗	1

4) T: $y = f'(0)\,x + f(0)$

T : $y = -2x$

* $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 1 \Rightarrow y = 1$ est une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ de ζ.
* $\lim\limits_{1} f = +\infty \Rightarrow x = 1$ asymptote de ζ



Chapitre VIII

Fonctions trigonométriques

- **Fonctions** :

Fonctions	Ensembles de définition continuité et dérivabilité	Fonctions dérivées
$x \mapsto \sin x$	IR	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	IR	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	IR	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	IR	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto tg(ax+b)$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$	$x \mapsto a(1+tg^2(ax+b))$ ou $x \mapsto \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$
$x \mapsto cotg(ax+b)$	$k \in Z$ $ax+b \neq k\pi$	$x \mapsto -a(1+cotg^2 x)$ ou $x \mapsto \frac{-a}{\sin^2(ax+b)}$

- **Limites** :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a \quad (a \in IR)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg\, ax}{x}=a \quad (a \in IR)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

- **Périodicité d'une fonction** :
  - Définition :

f est définie sur D juste il existe un réel T, strictement positif et le plus petit possible tel que : $\forall x \in D; x+T \in D$ et $f(x+T)=f(x)$.

T est appelée période de f :

Fonctions	période T
Cosx	2π
Sinx	2π
tg x	π

Fonctions	période T
Cos (ax+b)	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
Sin(ax+b)	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
tg(ax+b)	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$

- **Domaine de d'étude :**

* Si f est de période T alors D_E le domaine d'étude est

$D_E = [a,a+T] \cap D_f$

Si f est paire alors la droite d'équation
x=0 est l'axe de symétrie pour ζ_f

Si f est impaire, alors l'origine du repère est un
centre de symétrie pour ζ_f et $D_E=IR_+$

Comment représenter :
$g: x \to f(x)+b$
$M(x,f(x)) \in \zeta_f ; M'(x,f(x)+b) \in \zeta_g$
$\overrightarrow{MM'}=b\vec{j}$ donc $\zeta_g = t_{b\vec{j}}(\zeta_f)$

Comment représenter :
$g: x \to f(x-a)$;
$M'(x,g(x)) \in \zeta_g$; $M(x-a,f(x-a) \in \zeta_f$
$\overrightarrow{MM'}=a\vec{i}$ alors $\zeta_g = t_{a\vec{i}}(\zeta_f)$

Réflexes :

Situations	**Réflexes**
$\lim\limits_{x\to a} f = \frac{0}{0}$"	1) simplification 2) se ramener au théorème sur les limites. 3) utiliser le nombre dérivé 4) changement de variable en posant h = x-a.
Signe d'une somme de termes hybrides (exemples x+ sin x, -x +sin x).	Dresser le tableau de variation de f Tel que f(x) = expression dont on veut déterminer le signe
Déterminer un minimum on un maximum de f.	Etudier le signe de f'(x).

ENONCÉS

1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\operatorname{tg}x}{2\sin x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{1-\cos x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

2 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\sin 3x}$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-1}{2\cos x-1}$ 5) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$ 6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1+2\cos 2x}{1-2\cos x}$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}$ 8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}3x.\operatorname{tg}2x.$

3 Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$ 2) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

3) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ 4) $\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}$.

4 Calculer les limites suivantes en utilisant le nombre dérivé :

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\cos x-\cos a}\left(a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\operatorname{tg}x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$ 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}$.

5 Soit f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.
2) f est-elle dérivable en 1 ?

6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes, les ensembles sur les quels sont définit ces fonctions, sont supposés convenablement choisis.

1) $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^2 x$
2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2+\cos x}$
3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$
4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$
5) $f(x)=x^2 \operatorname{tg} x\,(x\neq 0)$
6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

7 1) déterminer l'approximation affine de sin $(\frac{\pi}{6}+h)$ pour h proche de 0 associé à la fonction sinus.

2) On rappelle que 1 correspond à $\frac{\pi}{180}$ radians

Déduire une valeur approchée de sin (31°)

Comparer la valeur trouvée avec celle donnée par la calculatrice.

8 **Vrai -Faux**

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse

Justifier votre réponse.

1) f définie sur IR par f(x)=2x+sin x alors f est croissante sur IR
2) La fonction sinus et cosinus ont le même nombre dérivé en $\frac{3\pi}{4}$.
3) La fonction définie par : f(x) = cos x + sin x
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)= -\cos x - \sin x$
4) La fonction f définie sur IR par
   f (x) = -sin x+3 est bornée sur IR
5) La fonction f définie sur IR par f(x) = x cos x
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x$

9 Soit f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ si $x\neq\frac{3\pi}{4}$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$.

1) Déterminer D le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est continue en $\frac{3\pi}{4}$, en déduire que f est continue sur D.

3) Montrer que pour tout $x \in D$, on a $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)$.

4) a) Montrer que f est dérivable sur $D - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$,

et que $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\sin x + \cos x)(-2 + \sin 2x)}{\sin^2 x . \cos^2 x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Ecrire l'équation de la tagente à la courbe de ξ_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

10 Soit f définie sur IR^+ par $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

1) Etudier successivement le sens de variation et le signe des fonctions: g''' ; g'' ; g' et g.

2) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^2}{6}$.

11 Soit g définie sur IR par $g(x) = a \sin 2x + b(1 + \cos 2x)$.

1) Déterminer a et b sacant que $g(0) = 2\sqrt{3}$ et que g admet un extremum au point $\frac{5\pi}{12}$.

2) On pose $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$.

a) Montrer que $\forall x \in IR, g(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$.

b) Calculer $g'(x)$ et déduire: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi}{2}} \frac{2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}}{2x + \pi}$.

d) Etudier les variation de g sur $[0,\pi]$.

3) Soit h définie sur $[0,\pi]$ par $h(x)=\dfrac{1+2\cos 2x}{\sqrt{3}+2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

a) Déterminer le domaine de définition de h

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} h(x)$.

12 f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=a\cos^3 x+b\cos x+c$.

a, b, c trois réels données, ξ la courbe de f.

1) Déterminer a , b et c pour que ξ passe par $A(0,2)$ et $B(\pi,0)$ et possède un extremum en $\dfrac{\pi}{3}$.

2) On pose dans la suite que $a=4$; $b=-3$ et $c=1$.

a) Calculer f '.

b) Montrer que $I\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ est un centre symétrie pour ξ.

c) En utilisant le nombre dérivé, calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-f(x)}{2x-\pi}$.

13 Soit la fonction $f:\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\to \mathrm{IR}\,;x\to\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Montrer que la droite $\Delta: x=\dfrac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour ξ_f.

3) a) Montrer que $\forall\, x\in\left]\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right[$; $\sin x+\cos x\rangle 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\pi}{4}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} f(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

14 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et le point A(2 , 0), on désigne par ξ le cercle de diamètre $[OA]$.

1) a) Trouver une équation du cercle ξ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Soit $M\in\xi$, on note α une mesure en radian, de $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$;

avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $OM=2\cos\alpha$.

2) On suppose que $M\in\xi-\{0,A\}$ tel que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

On note H le projeté orthogonal de M sur (OA);

$f(\alpha)$ désigne l'aire du triangle OHM.

a) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

b) Etudier les variation de f sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle soit maximale.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha-2}{4\alpha-\pi}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(\alpha)}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

15 Soit la fonction f définie par $f(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$.

1) a) Montrer que la droite $\Delta: x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe C_f.

b) Montrer que le point A $(\frac{\pi}{2},0)$, est un centre de symétrie pour Cf.

c) Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Construire C_f.

16 Soit la fonction f_a définie par $f_a(x)=\frac{1+x\cos a}{x+\cos a}$. On désigne par ζ_a la Courbe de f_a dans un repère orthonormé.

1) Pour $a\neq k\pi$ avec $k\in Z$. Etudier les variations de f_a selon les valeurs de a.

2) a) Montrer que ζ_a admet un centre de symétrie I_a.

b) Déterminer l'ensemble décrit par les points I_a, lorsque a Vraie dans : $IR\backslash\{k\pi;\ k\in Z\}$.

3) On prend $a=\frac{\pi}{3}$, soit la droite $\Delta: y=-x+m$.

a) Discuter suivant m le nombre de point d'intersection de $\zeta_{\frac{\pi}{3}}$ et Δ.

b) Dans le cas où on a deux points d'intersection P' et P'',
Montrer que $\overrightarrow{OP'}.\overrightarrow{OP''}$ est constant lorsque m vraie.

17 On considère $f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to \mathrm{IR};x\mapsto \begin{cases} f(x)=\dfrac{2\cos x}{\pi-2x} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f(\dfrac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

1) Soit la fonction $U:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to \mathrm{IR};x\mapsto \cos x+x-\frac{\pi}{2}$.

a) Etudier les variations de U et en déduire que $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ on a $U(x)\geq 0$.

b) On désigne par φ la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$\varphi(x)=2\cos x+\dfrac{(\pi-2x)^3}{24}+(2x-\pi)$. Etudier les variations de φ' et de φ.

En déduire que $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$; $\varphi(x)\leq 0$.

c) Déduire que pour tout $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$;$1-\dfrac{(\pi-2x)^2}{24}\leq f(x)\leq 1$.

2) On pose $g(x)=2\cot g\, x+2x-\pi$ pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\setminus\{\pi\}$.

Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x).

3) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $\forall x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\setminus\{\pi\}$; $f'(x)=\dfrac{2\sin x}{(\pi-2x)^2}.g(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer la courbe de f.

18 Soit $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR};x\mapsto\dfrac{\cos x.\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

1) a) Déterminer D le domaine de définition de f.
b) Etudier la parité et la périodicité de f.

2) a) Montrer que f est dérivable sur D.
b) Calculer f'(x).
c) Exprimer f' (x) en fonction de cos x.

3) soit g la restriction de f sur $[0, \pi]$.

a) Etudier les variations de g.

b) Tracer la courbe de g.

19 On considère la fonction $f_m : IR \to IR;\ x \mapsto \dfrac{m+\cos 2x}{-m+2\cos 2x}$.

On désigne par ζ_m la courbe de f_m dans un repère orthonormé.

1) Caractériser f_0 et représenter C_0 sur $[-\pi,\pi]$.

2) Montrer que toutes les $\zeta_m (m \neq 0)$ passent par des points fixes que l'on déterminera.

3) Déterminer la valeur de m pour que ζ_m passe par $A(\frac{\pi}{2},0)$.

4) On prend m = 1. On définit ainsi la fonction $f(x)= \dfrac{1+\cos 2x}{2\cos 2x-1}$.

a) Etudier la partie et la périodicité de f.

b) Déterminer I le domaine d'étude de f.

c) Déterminer les variations de f.

d) Tracer ζ la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

5) soit $g(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{2\sin 2x-1}$ et ζ ' sa courbe.

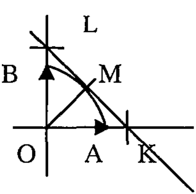
a) Montrer que ζ ' se déduit de ζ par translation de vecteur $\frac{\pi}{4}\vec{i}$.

b) Déduire les variations de g sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \cap D_g$.

20

$(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé . M une point du quart du cercle trigonométrique la tangente M coupe l'axe des abscisses en K et l'axe des ordonnées en L.

Le but du problème et de trouver la position de M sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ telle que la longueur KL soit minimale.



1) On note α l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

a) Montrer que $OK=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et $OL=\dfrac{1}{\sin\alpha}$

b) En déduire que LK= OK. OL= $\dfrac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}$

2) soit g la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha \sin\alpha}$

a) Calculer $g'(\alpha)$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) En déduire le valeur de pour α la quelle g admet un minimum.

Quel est alors ce minimum ?

21 f est la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

ζ étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est périodique de période 2π.

b) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour ζ

2) a) Déterminer la fonction dérivé de f

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, \pi]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c) tracer la courbe de f sur $[0, \pi]$, puis sur $[-\pi, \pi]$

22 f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \text{tg}\, x$

1) a) Déterminer les dérivées f' et f''.

b) Etudier le sens de variation de f'.

2) a) Démontrer que l'équation $f'(x)= 0$ admet une unique solution α dans $[0,\frac{\pi}{4}]$

b) Déterminer les signes de $f'(x)$ sur $[0,\frac{\pi}{4}]$

3) a) En déduire le sens variation de f.

b) Démontrer que pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$, $\text{tg}\, x \leq \frac{4}{\pi} x$.

CORRIGÉS

1 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}.\dfrac{\sin 3x}{x}=\dfrac{3}{4}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}-\dfrac{\sin x}{x}=3-1=2.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}=1.$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\operatorname{tg} x}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{2}.\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}.\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{7}{2}.$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left[\dfrac{1}{\cos x}-1\right]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}\left[\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{(1-\cos x)}{x}.\dfrac{1}{\cos x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}.\dfrac{1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=4.2=8.$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=0.$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}\,|\sin x|}.$

* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{\sqrt{2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

* $\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$, n'existe pas.

2 1) $x^2\sin\frac{1}{x}$ se présente au voisinage de $+\infty$ sous la forme $\infty\times 0$.

Car $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et donc $\sin\frac{1}{x}$ tend vers 0.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x.\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\text{; or } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\left[2\left(X+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]-1}{2\cos\left(X+\frac{\pi}{3}\right)-1}=\lim_{X\to 0}\frac{2\cos\left(2X+\frac{\pi}{3}\right)-1}{2\cos\left(X+\frac{\pi}{3}\right)-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 2x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x.\sin\frac{\pi}{3})-1}{2\left[\cos x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin x.\sin\frac{\pi}{3}\right]-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\sqrt{3}.\sin 2x-1}{\cos x-\sqrt{3}\sin x-1}=\frac{2\frac{\cos 2X-1}{2X}-2\sqrt{3}\frac{\sin 2X}{X}}{\frac{\cos X-1}{X}-\sqrt{3}\frac{\sin X}{X}}=\frac{0-2\sqrt{3}}{0-\sqrt{3}}=2.$$

2) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On pose $X = x - \pi$ ou encore $x= X+\pi$; $x\to\pi$ alors $X\to 0$

$$\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\frac{1+\cos(X+\pi)}{(X)^2}=\frac{1-\cos X}{X^2} \text{ alors } \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}.$$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\sin 3x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On pose $X = x-\frac{\pi}{3}$ ou encore $x= X+\frac{\pi}{3}$; $x\to\frac{\pi}{3}$ alors $X\to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\sin 3x}=\lim_{X\to0}\frac{2\cos(X+\frac{\pi}{3})-1}{\sin3(X+\frac{\pi}{3})}=\lim_{X\to0}\frac{2[\cos X.\cos\frac{\pi}{3}-\sin X.\sin\frac{\pi}{3}]-1}{\sin(3X+\pi)}$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{\cos X-\sqrt{3}\sin X-1}{\sin3X}=\lim_{X\to0}\frac{-\cos X+\sqrt{3}\sin X+1}{\sin3X}$$

$$=\lim_{X\to0}\frac{1-\cos X+\sqrt{3}\sin X}{\sin3X}=\lim_{X\to0}\frac{\frac{1-\cos X}{X}+\sqrt{3}\frac{\sin X}{X}}{\frac{\sin3x}{X}}=\frac{0+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos2x+\sqrt{3}\sin2x-1}{2\cos x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})-1}{2\cos x-1}$$

car $\cos2x+\sqrt{3}\sin2x=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$;

on pose $X=x-\frac{\pi}{3}$ ou encore $x=X+\frac{\pi}{3}$; $x\to\frac{\pi}{3}$ alors $X\to0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos(2x-\frac{\pi}{3})-1}{2\cos x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos[2(X+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]-1}{2\cos(X+\frac{\pi}{3})-1}=\lim_{X\to0}\frac{2\cos(2X+\frac{\pi}{3})-1}{2\cos(X+\frac{\pi}{3})-1}$$

$$\lim_{X\to0}\frac{2(\cos2x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin2X.\sin\frac{\pi}{3})-1}{2[\cos X.\cos\frac{\pi}{3}-\sin X.\sin\frac{\pi}{3}]-1}$$

$$\lim_{X\to0}\frac{\cos2x-\sqrt{3}.\sin2x-1}{\cos x-\sqrt{3}\sin x-1}=\lim_{X\to0}\frac{2\frac{\cos2X-1}{2X}-2\sqrt{3}\frac{\sin2X}{X}}{\frac{\cos X-1}{X}-\sqrt{3}\frac{\sin X}{X}}=\frac{0-2\sqrt{3}}{0-\sqrt{3}}=2$$

5) $$\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}};$$

on pose $h=x+\frac{\pi}{4}$ quand $x\to-\frac{\pi}{4}$ on a $h\to0$ d'où $\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\sqrt{2}.\frac{\sin h}{h}=\sqrt{2}$.

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1+2\left[2\cos^2 x-1\right]}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 x-1}{1-2\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(2\cos x-1)(2\cos x+1)}{-(2\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}-(2\cos x+1)=-2.$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\cos 4x}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi}=-1.$

8) On pose $X=x-\frac{\pi}{2}$ ou encore $x=X+\frac{\pi}{2}$;

d'où $\operatorname{tg}3x\,.\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}(2X+\pi)$

$=-\operatorname{cotg}3X\,.\operatorname{tg}2X.$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}3x\,.\operatorname{tg}2x=\lim\limits_{X\to 0}-\operatorname{cotg}3X\,.\operatorname{tg}2X=\lim\limits_{X\to 0}-\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3x}$

$=\lim\limits_{X\to 0}-\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}.\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}.\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$

3

1) $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}=\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\operatorname{tg}x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$

$\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{2\sin x}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=1.$

2) $\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{1-\cos x}{x^2}$ d'où

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$

4) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x.\cos x+\sin x.\cos 2x$

$=2\sin x.\cos^2x+\sin x(1-2\sin^2x)=2\sin x(1-\sin^2x)+\sin x-2\sin^3x$

$=3\sin x-4\sin^3x.$

Alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{-4\sin^3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}}{-4\dfrac{\sin^3x}{x^3}}=-\dfrac{1}{8}.$

4 1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\cos x-\cos a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}.\dfrac{1}{\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}}$ or

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}=\operatorname{tg}^2a+1$ c'est le nombre dérivé de tg x en a ;

et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}=-\sin a$ d'où $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\cos x-\cos a}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2a}{-\sin a}$

or $1+\operatorname{tg}^2a=\dfrac{1}{\cos^2a}$ donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\cos x-\cos a}=\dfrac{-1}{\cos^2a.\sin a}.$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\operatorname{tg}x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}.\dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}}$

or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ c'est le nombre dérivé de $\sqrt{2}\sin x-1$ en $\dfrac{\pi}{4}$;

qui est égal à $\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=1$, et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{x-\dfrac{\pi}{4}}=1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4}=2$

par suite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\operatorname{tg}x-1}=1.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

3) On pose $U(x)=\sin x-\cos x$ dérivable sur IR.

$U'(x)=\cos x+\sin x$; comme $U\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{U(x)-U\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

4) On pose: $2\cos x-1=U(x)$ dérivable sur IR et $U'(x)=-2\sin x$.

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=V(x)$ dérivable sur IR et $V'(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

Par suite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{U(x)-U(\frac{\pi}{3})}{V(x)-V\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{U(x)-U\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}.\frac{1}{\frac{V(x)-V\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{U'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{V'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-2\sin\frac{\pi}{3}}{-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5

1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{x-1}$ on pose $h=x-1$ quand $x\to1$ on a : $h\to0$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\pi(h+1)}{h}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2(\pi h+\pi)}{h}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\pi h}{h}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\pi h}{h}.\sin\pi h=0=f(1)$. Donc f est continue en 1.

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\sin^2\pi x}{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)^2}$; on pose $h=x-1$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\pi(h+1)}{h^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\pi h}{h^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\pi h}{h}\right)^2=\pi^2$.

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\pi^2$.

6

1) $f'(x)=3(2\sin x.\cos x)+4(-2\sin x.\cos x)=-2\sin x\cos x$.

2) $f'(x)=\dfrac{\sin x(2+\cos x)-(-\sin x)(1-\cos x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{3\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

3) $f'(x)=\dfrac{-\sin x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{-1}{(\sin x+\cos x)^2}$.

4) $f'(x)=\dfrac{\cos x\,.\cos 2x-\sin x(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x}=\dfrac{\cos x.\cos 2x+2\sin x.\sin 2x}{\cos^2 2x}$

$=\dfrac{\cos x\left[1-2\sin^2 x\right]+4\sin^2 x\cos x}{\cos^2 2x}=\dfrac{\cos x\left[1-2\sin^2 x+4\sin^2 x\right]}{\cos^2 2x}$

$=\dfrac{\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)}{\cos^2 2x}$.

5) $f'(x)=2x\,\mathrm{tg}\,x+x^2\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)$.

6) $f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$.

7

1) $f(x)=\sin x$ et f est dérivable sur IR et $f'(x)=\cos x$

$f'(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

alors l'approximation affine proche de f et $f(x+\frac{\pi}{6})\simeq f'(\frac{\pi}{6})x+f(\frac{\pi}{6})$

d'ou $\sin(x+\frac{\pi}{6})\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}$

2) $\sin 31°=\sin(30°+1°)=\sin(\simeq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\simeq\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180}+\frac{1}{2}=0{,}515$

avec la calculatrice $\sin 31°=0{,}515$

On retrouve alors la même valeur de $\sin 31°$ à 10^{-3} près

8

Vrai : $f'(x)=2+\cos x>0$ car $\cos x\in[-1,1]$ Donc f est croissante.

2) Vrai : les dérivée de cos x et sin x sont – sin x et cos x

ainsi $-\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'ou l'égalité.

3) Faux : $f(x)=\cos x+\sin x$ et $f'(x)=-\sin x+\cos x\neq-\sin x-\cos x$

4) Vrai: On sait que $-1\leq\sin x\leq1$ alors $2\leq3-\sin x\leq4$

ainsi f est bornée par 2 et 4

5) Faux : f(x) = x cos x c'est un produit de deux fonction x et cos x alors f '(x) = cos x –x sin x $\neq$ -sin x.

9 1) $D_f=\left\{x\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}\text{ tel que } \sin 2x.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.

$$\sin 2x.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \text{ ou } \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x=k\pi \text{ ou } x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z} \text{ or } x\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

alors $x=0$ ou $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\pi$ par suite $D_f=\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; on pose $h=x-\frac{3\pi}{4}$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos\left(2h+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(2h+\frac{3\pi}{2}\right).\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{\cos 2h.\sin h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h/h}{\cos 2h.\sin h/h}=2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ donc f est continue en } \frac{3\pi}{4}$$

* f est le quotient de deux fonctions continues sur $\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$

or f est continue en $\frac{3\pi}{4}$ d'où f est continue sur $\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3) $$f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin 2x\times\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin 2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sqrt{2}\sin x.\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}.\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right].$$

4) a) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(\cos x-\sin x)\left(\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x\right)}{\cos^2 x.\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(\cos x+\sin x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\cos^2 x.\sin^2 x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(\cos x+\sin x)(2-\sin 2x)}{\cos^2 x.\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(\cos x+\sin x)(\sin 2x-2)}{\cos^2 x.\sin^2 x}.$$

b) On a : $\sin 2x < 2 \Leftrightarrow \sin 2x-2<0$ et $\sin^2 x.\cos^2 x>0.$

Le signe de f'est celui de $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in Z.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi;k\in Z;$$

d'où :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	‖

$$\lim_{h\to\pi^-} f(x)=\left(\frac{-1}{0^-}\right)=+\infty\ ;\ \lim_{h\to 0^+} f(x)=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$$

c) $T: y\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ or $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ d'où $T:\ y=-2x+\frac{\pi}{2}$.

10

1) g est une fonction trigonométrique donc dérivable 3 fois sur $\mathbb{R}^+$

et $g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$; $g''(x)=-\sin x+x$ et $g'''(x)=-\cos x+1$.

$-1\leq\cos x\leq 1$ donc $1-\cos x\geq 0$.

x	0		$+\infty$
$g'''(x)$		$+$	
$g''(x)$	0	$\nearrow$	

Pour $x\geq 0$; g'' est croissante donc $g''(x)\geq g''(0)$ d'où $g''(x)\geq 0$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$	

Pour $x\geq 0$; g' est croissante donc $g'(x)\geq g'(0)$ d'où $g'(x)\geq 0$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

Pour $x\geq 0$; g est croissante donc $g(x)\geq g(0)$ d'où $g(x)\geq 0$.

2) • $x\geq 0$ on a $g(x)\geq 0$ ou encore $\sin x-x+\frac{x^3}{6}\geq 0$ d'où $\frac{x^3}{6}\geq x-\sin x$.

• $x\geq 0$ on a $g''(x)\geq 0$ ou encore $x-\sin x\geq 0$ d'où $\frac{x^3}{6}\geq x-\sin x\geq 0$.

11

1) $g(0)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow b(1+1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow b=\sqrt{3}$;

g est dérivable sur IR et $g'(x)=2a\cos 2x+b(-\sin 2x)$

g admet un $\frac{5\pi}{12}$ alors $g'\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$ ou encore

$2a\cos\frac{5\pi}{6}-2b\sin\frac{5\pi}{6}=0\Leftrightarrow-\sqrt{3}a-b=0$ or $b=\sqrt{3}$. Donc $a=-1$.

2) a) $g(x)=-\sin 2x+\sqrt{3}\,(1+\cos 2x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+\sqrt{3}$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\sqrt{3}=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}.$$

b) $g'(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{0}=g'(0)=-4\sin\frac{\pi}{6}=-2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos(2x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=g'(\frac{\pi}{6})=-4$$

c) $$\lim_{x\to\frac{-\pi}{2}}\frac{2\cos(2x+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}}{2x+\pi}=\lim_{X\to 0}\frac{2\cos\left(2X+\frac{\pi}{6}+\pi\right)+\sqrt{3}}{2X}\text{ avec }x=x-\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{X\to 0}\frac{-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}{2X}=\lim_{X\to 0}\frac{-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+\sqrt{3}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{3}\frac{(1-\cos 2x)}{2x}+\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

d) $g'(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ et $g'(x)=0\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\ k\in Z$

or $x\in[0,\pi]$ donc $x=\frac{5\pi}{12}$ ou $\frac{11\pi}{12}$.

Pour $0\le x\le\frac{5\pi}{12}\Leftrightarrow\pm\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi$ donc $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\ge 0$; D'où

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$2\sqrt{3}$	↘	$-2+\sqrt{3}$	↗	$2+\sqrt{3}$	↘	$2\sqrt{3}$

3) a) $D_h=\{x\in[0,\pi]\text{tel que } g(x)\neq 0\}$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \qquad k\in Z$$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$ d'où $D_h=[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$.

b) • On pose $k(x) = 1 + 2\cos 2x$ dérivable sur IR.
$k'(x) = -4 \sin 2x$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} h(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{k(x)-k\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\times\frac{1}{\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=k'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}.$$

12

1) $A(0,2)\in\zeta \Leftrightarrow f(0)=2 \Leftrightarrow a+b+c=2 \quad (1)$

$B(\pi,0)\in\zeta \Leftrightarrow f(\pi)=0 \Leftrightarrow -a-b+c=0 \quad (2)$

$(1)+(2)$ donne: $2c=2$ d'où $c=1$.

f est dérivable sur IR et f admet un extremum en $\frac{\pi}{3}$ alors:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow -3a\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}-b\sin\frac{\pi}{3}=0$$

$\Leftrightarrow \frac{-3\sqrt{3}}{8}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a+b=0$ or $a+b=c=1$ donc $a=1-b$.

$\frac{3}{4}(1-b)+b=0$ ou encore $b=-3$ et $a=4$.

2) $f(x)=4\cos^3 x-3\cos x+1$.

a) $f'(x)=-12\cos^2 x.\sin x+3\sin x=3\sin x\left(1-4\cos^2 x\right)$.

b) $\forall x\in IR$ on a: $\pi-x\in IR$. Montrons que $f(\pi-x)=2-f(x)$

$$f(\pi-x)=4\cos^3(\pi-x)-3\cos(\pi-x)+1=-4\cos^3 x+3\cos x+1$$

$$2-f(x)=2-4\cos^3x+3\cos x-1=-4\cos^3x+3\cos x+1=f(\pi-x);$$

Donc $I\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ est un centre de symétrie pour ξ.

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-f(x)}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{f(x)-1}{2\left(x-\pi/2\right)}$ or $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\pi/2}=-\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ or $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ d'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-f(x)}{2x-\pi}=-\frac{3}{2}$.

13 1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$ or $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ d'où $D_f=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$.

2) $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ ou encore $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ ou encore $\frac{\pi}{4}>x>-\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}>\frac{\pi}{2}-x>-\frac{\pi}{4}$ d'où $\frac{\pi}{2}-x\in D_f$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\cos x+\sin x}=f(x).$$

par suite $\Delta : x=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour ζ_f.

3) a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. On sait que $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ soit $-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$;

Donc $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ d'où $\sin x+\cos x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}\cos x+\sin x=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-}\cos x+\sin x=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^-}f(x)=+\infty$.

4) $x \to \cos x + \sin x$ est dérivable et non nul sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$;

donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ et $f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

or $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ donc $x = \frac{\pi}{4}$.

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
$x + \frac{\pi}{4}$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	||	+	0	-	||
$f'(x)$	||	-	0	+	||
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$+\infty$

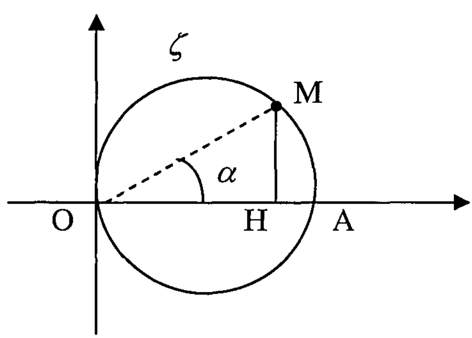
14

1) a) Soit I * A ; A ; I(1, 0) le centre du cercle ξ de rayon $\frac{OH}{2} = 1$

$M(x, y) \in \xi \Leftrightarrow IM = 1 \Leftrightarrow IM^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1.$

b) $[OA]$ diamètre de ζ et $M \in \zeta$ alors OAM est un triangle rectangle

2) a) $f(\alpha) = \frac{OH \times HM}{2}$.



Dans le triangle OHM, on a :

$\cos\alpha = \frac{OH}{OM}$

d'où $OH = OM\cos\alpha = 2\cos^2\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{HM}{OM}$ ou encore

$HM = OM\sin\alpha = 2\cos\alpha.\sin\alpha$

d'où $f(\alpha)=\dfrac{2\cos^2\alpha.2\cos\alpha.\sin\alpha}{2}=2\cos^3\alpha.\sin\alpha=\cos^2\alpha.\sin2\alpha.$

Comme $\dfrac{1}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{4}\sin4\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin2\alpha.\cos2\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha(1+\cos2\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha\left(2\cos^2\alpha\right)=\sin2\alpha.\cos^2\alpha.$

D'où $f(\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{4}\sin4\alpha.$

b) f est la somme de fonction trigonométrique donc dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

et $f'(\alpha)=\cos2\alpha+\cos4\alpha=\cos2\alpha+2\cos^2\alpha-1$

$=2\cos^2 2\alpha+\cos2\alpha-1=2(\cos2\alpha+1)\left(\cos2\alpha-\dfrac{1}{2}\right).$

* $\cos2\alpha+1\geq0$ car $\cos2\alpha\geq-1.$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos2\alpha-\frac{1}{2}$		+	0	-	
$\cos2\alpha+1$		+	0	+	
f '(x)		+		-	
f(x)	0	↗	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	↘	0

3) • en $\dfrac{\pi}{6}$, f admet un maximum absolu donc $\alpha_0=\dfrac{\pi}{6}.$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin4\alpha+2\sin2\alpha-2}{4\alpha-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin4\alpha+2\sin2\alpha-2}{4\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{4}\sin4\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}}{\alpha-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\alpha-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

- $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\alpha)}{\sqrt{1-\cos\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{4}\sin4\alpha}{\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}{4\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\frac{\sin2\alpha}{\alpha}+\frac{\sin4\alpha}{\alpha}}{4\sqrt{2}.\sin\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha}}=\frac{4+4}{4\sqrt{2}.\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}.$$

15 1) a) $D_f=\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ alors $-\pi-x\in\mathbb{R}$;

$$f(-\pi-x)=2\cos[\frac{1}{2}(-\pi-x)+\frac{\pi}{4}]=2\cos[-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}]$$

$$=2\cos[-\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}]=2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=f(x).$$

donc $\Delta:y=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour ζ.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$ alors $\pi-x\in\mathbb{R}$.

$$f(\pi-x)=2\cos[\frac{1}{2}(\pi-x)+\frac{\pi}{4}]=2\cos[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}]$$

$$=2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4})=-2\cos[(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{2}]=-2\cos(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=-f(x).$$

donc $A(\frac{\pi}{2},0)$ est un centre de symétrie pour ζ.

c) f est de période $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$.

Δ est un axe de symétrie limite l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+2\pi]=[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

La symétrie par rapport à A $(\frac{\pi}{2},0)$, permet de se limiter à l'intervalle :

$$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}+\pi\right]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=I$$

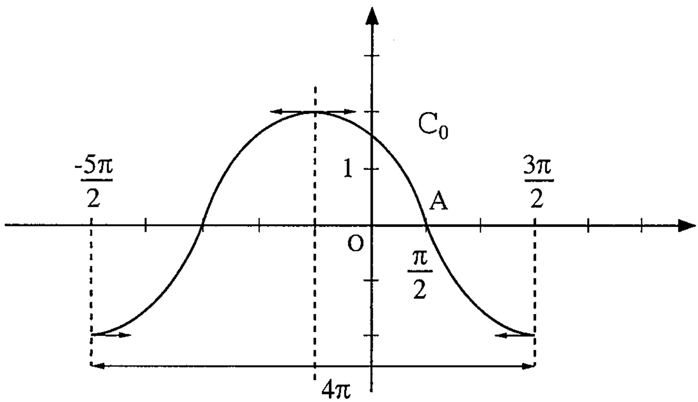
2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2.(-\frac{1}{2})\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=-\sin[\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}]$.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{\pi}{4}$ où encore $0 \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

d'où $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ donc $f'(x) \leq 0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	0

b) ζ_f est l'image par la translation de vecteur $4\pi k\vec{i}$ de ζ_0.



16

1) f_a est une fonction dérivable sur $IR \setminus \{-\cos a\}$.

$$f'_a(x) = \frac{\cos a(x+\cos a)-(1+x\cos a)}{(x+\cos a)^2} = \frac{\cos^2 a-1}{(x+\cos a)^2} = \frac{-\sin^2 a}{(x+\cos a)^2} < 0.$$

x	$-\infty$		$-\cos a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f_a(x)$	$\cos a$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\cos a$

2) a) Soit $I_a(-\cos a, \cos a)$, montrons que I_a est un centre de symétrie.

$\forall x \in Df_a \Leftrightarrow x \neq -\cos a \Leftrightarrow -x \neq \cos a \Leftrightarrow -2\cos a - x \neq -\cos a$

d'où $-2\cos a - x \in Df_a$.

$$f(-2\cos a-x)=\frac{1+\cos a(-2\cos a-x)}{-2\cos a-x+\cos a}=\frac{1-x\cos -2\cos^2 a}{-\cos a-x}=\frac{x\cos a+2\cos^2 a-1}{\cos a+x}.$$

$$2\cos a-f(x)=2\cos a-\frac{1+x\cos a}{x+\cos a}=\frac{2\cos^2 a+2x\cos a-1-x\cos a}{x+\cos a}=\frac{2\cos^2 a+x\cos a-1}{x+\cos a}=f(-2\cos a-x).$$

donc I_a est un centre de symétrie.

b) $\begin{cases} x_a=-\cos a \\ y_a=\cos a \end{cases}$ et $a \neq k\pi$; $\begin{cases} y=-x \\ a \neq k\pi \end{cases}$

donc l'ensemble des points I_a est la droite $\Delta : y = -x$ privé des points $A_k((-1)^{k+1}, (-1)^k)$ car $\cos k\pi=(-1)^k$.

3) a) $f(x) = \dfrac{1+\frac{1}{2}x}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{2+x}{2x+1}$; $f=f_{\frac{\pi}{3}}$. $M(x,y)\in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2+x}{2x+1} \\ y=-x+m \end{cases}$

il suffit de résoudre $\dfrac{2+x}{2x+1}=-x+m$.

$2+x=(-x+m)(2x+1)$ où encore $2x^2+(2-2m)x+2-m=0$.

$\Delta'=(1-m)^2-2(2-m)=1-2m+m^2-4+2m=m^2-3$.

<u>1^{er} cas</u>: $m \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$; alors $\Delta'>0$

donc $\zeta \cap \Delta=\{2\text{points}\}$.

<u>$2^{ème}$ cas</u>: $m \in \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$ alors $\Delta'<0$ donc $\zeta \cap \Delta = \varnothing$.

<u>$3^{ème}$ cas</u>: $m \in \{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ alors $\Delta'=0$ donc $\zeta \cap \Delta=\{1\text{point}\}$.

b) $\Delta'=m^2-3>0$ pour $m\in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$.

$\overrightarrow{OP'}.\overrightarrow{OP''}=x'x''+y'y''$ or $x'x''=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2-m}{2}$ et $x'+x''=-\dfrac{b}{a}=m-1$

et $y'=-x'+m$ et $y''=-x''+m$ et $y''=-x''+m$.

$y'y''=(-x'+m)(-x''+m)=x'm'$

$=\dfrac{2-m}{2}-m(m-1)+m^2=1-\dfrac{1}{2}m-m^2-m+m^2=1+\dfrac{1}{2}m$

$\overrightarrow{OP'}.\overrightarrow{OP''}=1-\dfrac{m}{2}+1+\dfrac{m}{2}=2$ est constante, ne dépend pas de m.

17 1) a) U est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ et $U'(x) = -\sin x + 1$

or $-1 \leq \sin x \leq 1$ alors $1 - \sin x \geq 0$.

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
U'x)		+	
U(x)		$\nearrow$	0

U est croissante alors pour $x \geq \frac{\pi}{2}$, on a $U(x) \geq U(\frac{\pi}{2})$; par suite $U(x) \geq 0$.

b) φ est dérivable deux fois sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\varphi'(x) = -2\sin x + \frac{(-2).3(\pi-2x)^2}{24} + 2 = -2\sin x - \frac{(\pi-2x)^2}{4} + 2.$$

$$\varphi''(x) = -2\cos x + (\pi-2x) = -2[\cos x - \frac{\pi}{2} + x] = -2U(x) \leq 0 \text{ car } U(x) \geq 0. \text{D'où:}$$

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\varphi''(x)$		-	
$\varphi'(x)$		$\searrow$	**0**

φ' est décroissante alors pour $x \geq \frac{\pi}{2}$, on a $\varphi'(x) \leq \varphi(\frac{\pi}{2})$,

par suite $\varphi'(x) \leq 0$.

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		-	
$\varphi(x)$	**0**	$\searrow$	

φ est décroissante alors pour $x \geq \frac{\pi}{2}$, on a $\varphi(x) \leq \varphi(\frac{\pi}{2})$, par suite $\varphi(x) \leq 0$.

c) $\varphi(x) \leq 0$ où encore $2\cos x + \frac{(\pi-2x)^3}{24} + (2x-\pi) \leq 0$.

On a : $x\geq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x-\pi\geq 0.$

$\frac{2\cos x}{2x-\pi}-\frac{(\pi-2x)^2}{24}+1\leq;\frac{2\cos x}{2x-\pi}\leq\frac{(\pi-2x)^2}{24}-1\text{donc } f(x)\geq 1-\frac{(\pi-2x)^2}{24}.$

On a: $U(x)\geq 0$ ou encore $x-\frac{\pi}{2}\geq 0\Leftrightarrow \cos x\geq 0\Leftrightarrow 2\cos x\geq \pi-2x$

$\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{\pi-2x}\leq 1\text{car } \pi-2x\leq 0;\text{ donc } f(x)\leq 1.\text{par suite } 1-\frac{(\pi-2x)^2}{24}\leq f(x)\leq 1.$

2) g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]-\{\pi\}.$

$g'(x)=-2(1+\cot g^2x)+2=-2\cot g^2x\leq 0.$

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
g'(x)		-	‖	-	
g(x)	**0**	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\mathbf{2\pi}$

Si $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ alors $g(x)\leq 0$ et Si $x\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ alors $g(x)\geq 0.$

3) a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{\pi-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ C'est le nombre dérivé de -cos x en $\frac{\pi}{2}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1=f(\frac{\pi}{2})$ donc f est continue en $\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\frac{\frac{2\cos x}{\pi-2x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ On pose $X=x-\frac{\pi}{2}$:

$$\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\frac{2\cos(X+\frac{\pi}{2})}{\pi-2X-\pi}-1}{X}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{2\cos(X+\frac{\pi}{2})+2X}{-2X^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin X-X}{X^2}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{-\frac{\sin X}{X}-1}{X}=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

b) $f'(x)=\dfrac{-2\sin x(\pi-2x)-(-2).2\cos x}{(\pi-2x)^2}=\dfrac{2\sin x[-\pi+2x+\dfrac{2\cos x}{\sin x}]}{(\pi-2x)^2}=\dfrac{2\sin x}{(\pi-2x)^2}.g(x).$

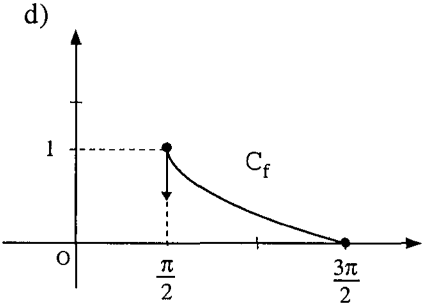
c)

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
sin(x)		+	0	-	
g(x)		-	||	+	
sinx.g(x)		-	||	-	

D'où

x	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
fx)	||	-	
f(x)	1	↘	0

d)



18 1) a) $1+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi;\ k\in \mathbb{Z}$.

$D=\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi;\ k\in \mathbb{Z}\}$.

b) * $\forall x\in D \Leftrightarrow x\neq \pi+2k\pi \Leftrightarrow -x\neq -\pi-2k\pi \Leftrightarrow -x\neq \pi+2k'\pi$

$\Leftrightarrow -x\in D$

$f(-x)=\dfrac{\cos(-x).\sin(-x)}{[1+\cos(-x)]^2}=\dfrac{-\cos x.\sin x}{(1+\cos x)^2}=-f(x)$. Donc f est impaire.

* $x\mapsto \sin x$ et $x\mapsto \cos x$ de période 2π est une période de f.

2) a) $x\mapsto (1+\cos x)^2$ est dérivable et nul sur D.

$x\mapsto \cos x.\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur D.

b) $f'(x)=\dfrac{(1+\cos x)^2[\cos^2x-\sin^2x]+2\cos x.\sin x.(1+\cos x)}{(1+\cos x)^4}$

$=\dfrac{(1+\cos x)^2(2\cos^2x-1)+2\cos x(1-\cos^2x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^4}.$

c) $f'(x)=\dfrac{(1+\cos x)^2[2\cos^2x-1+2\cos x-\cos^2x]}{(1+\cos x)^4}=\dfrac{2\cos x-1}{(1+\cos x)^2}.$

3) a) pour tout $x\in[0,\pi[;g'(x)=\dfrac{2\cos x-1}{(1+\cos x)^2}.$

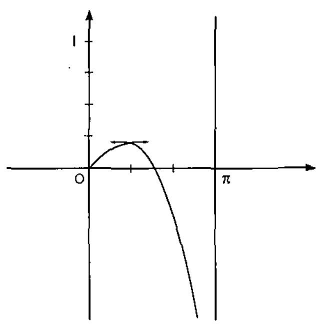
$2\cos x-1\geq 0\Leftrightarrow \cos x\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}.$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$g'(x)$	+	| -	
$g(x)$	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘ $-\infty$

On pose $h=x-\pi$;

$\lim\limits_{x\to\pi^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos(\pi+h)\sin(\pi+h)}{[1+\cos(\pi+h)]^2}=$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cosh.\sinh}{(1-\cosh)^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{2}.\frac{\sin^2h}{h}}{\frac{(1-\cosh)^2}{h}}=-\infty.$



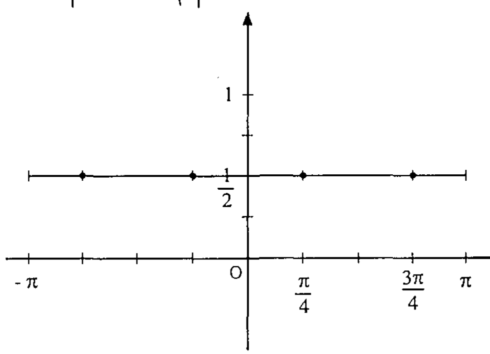
b) $x=\pi$ est une asymptote

19

1) $\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}.$

$Df_0=\mathbb{R}-\{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}\};k\in\mathbb{Z}.$



$\forall x\in Df_0;f_0(x)=\dfrac{\cos^2x}{2\cos^2x}=\dfrac{1}{2};$ constante.

2) $\forall x \in IR^*; y=\dfrac{m+\cos^2 x}{-m+2\cos^2 x}. \Leftrightarrow y(-m+2\cos^2 x)=m+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow m(1+y)+\cos^2 x-2(\cos^2 x)y=0.$ Vraie pour tout $m \in IR^*$

Si et seulement si $\begin{cases} y+1=0 \\ \cos^2 x-2y.\cos^2 x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \cos^2 x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$

Alors toutes les C_m passent par des points fixes : $A_k(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},-1)$; $k \in Z$.

3) $A \in C_m \Leftrightarrow \dfrac{m+\cos\pi}{-m+2\cos\pi}=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1.$

4) $f(x)=\dfrac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}.$

a) $D_f=\{x \in IR \backslash \cos^2 x \neq \dfrac{1}{2}\}$;

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{où} \\ 2x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ \text{où} \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{cases} ;k \in Z$$

$Df=IR-\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;k \in Z\right\}.$

$\forall x \in D_f;-x \in D_f.$

$f(-x)=\dfrac{1+\cos(-2x)}{2\cos(-2x)-1}=\dfrac{1+\cos 2x}{2\cos 2x-1}=f(x)$; donc f est paire.

$\cos^2 x$ est de période $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$; donc f est de période $T=\pi$.

b) f est paire alors C admet (yy') comme axe de symétrie alors il suffit de l'étudier sur $IR_+ \cap D_f$;

$T=\pi$ alors il suffit de l'étudier sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \cap D_f$;

Donc $I=\left[-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\pi}{2}\right] \cap IR_+ \cap D_f=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \backslash \{\dfrac{\pi}{6}\}.$

20 1) a) (LK) tangente à ζ en M

alors (OM) $\perp$ (LK) donc OMK est rectangle en M

d'ou $\cos x = \dfrac{OM}{OK}$. Comme OM = 1 rayon de ζ ainsi $OK= \dfrac{1}{\cos x}$

dans le triangle rectangle OML on a

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\right) = \dfrac{OM}{OL}$ comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)= \sin x$ et $OM = 1 \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{OL}$ Soit $OL=\dfrac{1}{\sin x}$

b) dans le triangle rectangle OLK en O ; on a : $OL^2+OK^2=LK^2$

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x} = LK^2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = LK^2 \text{ d'ou } LK^2 = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

Or $x \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ d'ou $LK=\dfrac{1}{\cos x \sin x}$ or $LK=\dfrac{1}{\cos x \sin x}=\dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{1}{\sin x} = OK.OL$

2) a) $g(x)=\dfrac{1}{\cos x \sin x}=\dfrac{2}{2\cos x \sin x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$

pour tout $x \in]0,\pi/2[$, $g'(x)=\dfrac{-2(\sin 2x)}{(\sin (2x)^2)} = \dfrac{-4\cos 2x}{\sin^3(2x)}$

b) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2}+K\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ or $x \in]0,\pi/2[$ d'ou $x = \dfrac{\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)	‖	-	0	+	‖
g(x)	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\sin 2x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin 2x = 0^+$

* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\cos x \sin x} = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$

c) d'après le tableau de variation g admet un minimum absolu 2 en $\dfrac{\pi}{4}$

KL est minimale pour $x = \dfrac{\pi}{4}$

21 1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

et $f(x+2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) \quad = \sin^2 x + \cos x = f(x)$

donc f est périodique et de période 2π

b) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) \text{ comme } \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$= \sin^2 x + \cos x \qquad = f(x)$$

par suite f est paire donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour

2) a) $f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x \;\; = \sin x\,(2\cos x - 1)$

b) sur $[0, \pi]$ on sait que $\sin x \geq 0$.

* $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \dfrac{1}{2}$ comme $x \in [0, \pi]$ donc $x \in [0, \pi/3]$

par suite le signe de f'(x) est celui de 2 cos x-1 d'ou

x	0		$\pi/3$		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0

3) a)

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	

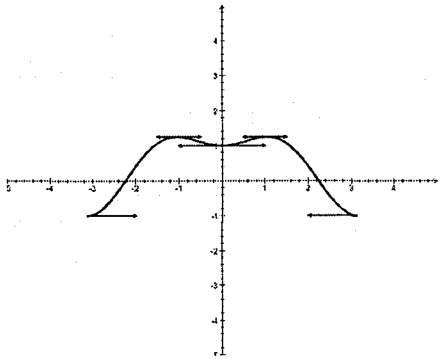
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

b) * d'après le tableau de variation Si $x \in [0, \dfrac{\pi}{3}]$ alors $f(x) \in [1, \dfrac{5}{4}]$ donc $f(x) \neq 0$

par suite f(x) = 0 on admet pas de solution sur $[0, \pi/3]$

* sur $[\dfrac{\pi}{3}, \pi]$ f est continue et $f(\dfrac{\pi}{3}).\ f(\pi) = -5/4$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins $\alpha \in [\pi/3, \pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$ comme f est strictement décroissante sur $[\pi/3, \pi]$ alors α est unique.



Finalement : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, \pi]$

* si $x = 120° = \frac{2\pi}{3} \simeq 2{,}1\,\text{rd}$ on a $f(x) = 0{,}2$

Si $x = 130° = 2{,}2$ rd on a $f(x) = -0{,}005$

et $f(x) = 0$

$\Rightarrow 2{,}1 < \alpha < 2{,}2$

22

a) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \text{tg}\, x$ alors $f'(x) = \frac{4}{\pi} - (1 + \text{tg}^2 x)$

soit $f'(x) = \frac{4}{\pi} - 1 - \text{tg}^2\, x$ donc $f''(x) = -2\text{tg}\, x(1 + \text{tg}^2 x)$

b) on a : $f''(x) = -2\text{tg}\, x\, (1 + \text{tg}^2 x)$ d'autre part $\text{tg}\, x \geq 0$ sin $[0, \frac{\pi}{4}]$ par suite $f''(x) \leq 0$.

x	0	α	$\frac{\pi}{4}$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$	$\frac{4}{\pi} - 1$	$\searrow$ 0	$\frac{4}{\pi} - 2$

$f(0) = \frac{4}{\pi} - 1 \simeq 0{,}27$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} - 2 = -0{,}72$

2) a) $\begin{cases} f' \text{ est continue sur } [0, \frac{\pi}{4}] \\ f'(0) \times f'(\frac{\pi}{4}) = 0{,}27 \times (-0{,}72) < 0 \end{cases}$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe

au moins un α dans $[0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $f'(\alpha) = 0$

comme f' est strictement croissante alors α est l'unique solution .

finalement : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

b) sur $[0, \alpha]$ on a f' est strictement décroissante alors
$\forall x \in [0, \alpha]$, $f'(x) \geq f'(\alpha)$ et $f'(\alpha) = 0$ donc $f'(x) \geq 0$

* sur $[\alpha, \frac{\pi}{4}]$ on a f' est strictement décroissante alors

$\forall x \in [\alpha, \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) \leq f'(\alpha) \Rightarrow f'(x) \leq 0$

3) a)

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	+		0	-	
$f(x)$			$f(\alpha)$		
	0	↗		↘	0

b) * sur $[0, \alpha]$ on a f est strictement croissante alors
$\forall x \in [0, \alpha]$, $f(x) \geq f(0)$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$

* sur $[\alpha, \frac{\pi}{4}]$ on a f est strictement décroissante alors

$\forall x \in [\alpha, \pi/4]$, $f(x) \geq f[\frac{\pi}{4}]$ et $f[\frac{\pi}{4}] = 0$ donc $f(x) \geq 0$

par suite $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) \geq 0$ ou encore $\frac{\pi}{4}x - \text{tg}\, x \geq 0$ par suite $\frac{\pi}{4}x \geq \text{tg}\, x$

Chapitre IX

Les suites réelles

■ Généralités :

➢ Une suite numérique est une application de IN(ou une partie de IN) dans IR.

➢ Une suite peut-être définie entre autres :

- Une façon **explicite** : $U_n = f(n)$ (exemple : $U_n = 2n - 1$).
- **La récurrence** : U_0 donné et $U_{n+1} = f(U_n)$,(exemple : $U_{n+2} = U_n - 5$).

➢ **Principe de raisonnement par récurrence.**

Soit (U) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$; (ou une partie I de IN)

on désigne par Q une propriété .

Pour que Q est varie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de prouver que :

- La propriété Q est vraie pour l'ordre 0 (le 1[er] ordre)
- Supposons que la propriété est vraie pour l'ordre p ($p \in$ IN resp $p \in I$)
- Montrons que la propriété est vraie pour l'ordre p + 1.

■ Suites arithmétiques- Suites géométriques :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ $(r \in \mathbb{R})$	$U_{n+1} = q\, U_n$ $(q \in \mathbb{R})$
Raison	r	q
Terme général	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = q^n \cdot U_0$
Relation entre Deux termes quelconques	$U_n = U_p + (n - p)r$	$U_n = q^{n-p}\, U_p, q \neq 0$ $(\text{si } q = 0 \text{ alors } U_n = 0)$
Somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$	$S = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$	Si q = 1 alors $S = (n + 1) U_0$ Si $q \neq 1$ alors $S = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

■ Relations entre trois termes consécutifs a, b, c d'une suite :

- Pour une suite arithmétique alors on a : $a + c = 2b$.
- Pour une suite géométrique alors on a : $a \cdot c = b^2$.

■ Suites monotones- Majorées – Minorées- Bornées :

➢ **Monotonie**: Une suite numérique U est:

- **Croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$.
- **Décroissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1}$.
- **Constante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.
- **Strictement croissante** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$.
- **Strictement décroissante** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > U_{n+1}$.

■ Suite bornée :

Une suite numérique U est :

-**Majorée** par un réel M si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.

-**Minorée** par un réel m si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq m$.

- **Bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

■ Conséquence :

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme ($U_n \geq U_0$)
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.($U_0 \geq U_n$)

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment étudier les variations d'une suite ?	• On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$. • Où, Si $U_n = f(n)$ on étudie le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. • Où si $U_n > 0$ on compare $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1. • Où par récurrence.
Comment démontrer qu'une suite u est majorée par M ? (de même pour minorée)	• On étudie le signe de $U_n - M$. • On montre par récurrence ce que $U_n \leq M$. • Où si $U_n = f(n)$ on dresse le tableau de variation de f on établit que f est majorée par M.

ENONCES

1 Vrai – Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier cette réponse.

1) U une suite définie sur IN par $U_n = n + 1$ alors $U_{2n} = 2n + 2$.
2) Toute suite est arithmétique ou géométrique.
3) La suite U définie sur IN* par $U_n = (-2)^n$ est décroissante.
4) U une suite de terme non nuls si pour tout entier naturel n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ alors U est croissante.
5) $U_n = 1 + \frac{2}{7} + ... + \left(\frac{2}{7}\right)^n$ est une suite bornée.
6) $U_n = 10 + 2 \cos n$ est majorée par 15.
7) $U_n = \frac{3n}{n+1}$ est bornée.
8) Toute suite qui n'est pas croissante elle est décroissante.

2 Q.C.M

Indiquer la bonne réponse a, b ou c. avec justification.

1) La suite U définie sur IN* par $U_n = n + (-1)^n$ est :
   a) Croissante b) décroissante c) ni croissante et ni décroissante
2) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024}$ est égale :
   a) $\frac{171}{512}$ b) $\frac{341}{1024}$ c) $\frac{1023}{1024}$
3) La suite U définie par $U_n = n^2$ est :
   a) Croissante b) décroissante c) ni croissante ni décroissante
4) $U_n = \frac{n+3}{n^2+2}$ est une suite qui est :
   a) bornée b) n'est pas majorée c) n'est pas minorée
5) La suite U définie par $2n + (-1)^n$:
   a) bornée b) majorée c) minorée

3

U la suite définie sur IN par : $U_n = n^2 - 8n + 7$.

a) Calculer U_0, U_1 et U_2 conjecturer le sens de variation de u.
b) Calculer U_3, U_4, U_5 et U_6 et revoir la conjecture .
c) U est-elle croissante ? décroissante ?

4 Soit la suite U définie sur IN par $U_n = \dfrac{2}{n+3}$.

a) Calculer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et comparer ce quotient à 1.

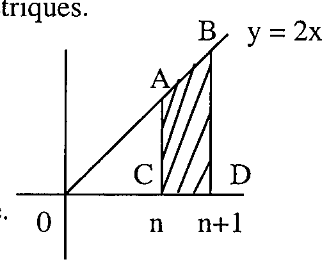
b) En déduire le sens de variation de U.

5 U la suite définie sur IN par $U_n = \sqrt{2}\,(n-1) + \dfrac{3}{5}(n+1)$.

a) Calculer $U_{n+1} - U_n$.
b) Quel est la nature de U ?
c) Quel est sens de variation de U?

6 Soit U et V deux suites définies sur IN
par $U_n = (1{,}03)^n$ et $V_n = 9^n \times 0{,}02^{n+2}$
a) Montrer que U et V sont deux suites géométriques.
b) Déduire le sens de variation de U et V.

7 Pour n entier naturel.
U_n est l'aire de la partie
De plan colorée sur le graphique.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.
En déduire le sens de variations de U.



8 Soit la suite U définie sur IN* par $U_n = \dfrac{10n}{n^2+1}$

1) Montrer que pour tout $n \in$ IN*, U_n est bornée par 0 et 5.
2) Déterminer le sens de variation de U.

9 Pour chacune des suites définies si dessous. Etudier ses variations et indiquer lorsque c'est possible si elle est majorée, minorée, bornée.

1) Pour tout $n \in$ IN*, $U_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{8}{n}$.

2) pour tout $n \in$ IN*, $U_n = 2n + \sin x$.

3) pour tout $n \in$ IN*, $W_n = \dfrac{(-1)^n n + \cos n}{1+n}$

10 Soit (U_n) la suite définie par son première terme U_0 et la relation

$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ pour tout entier naturel n.

1) Si $U_0 = 3$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 2$.

2) Si $U_0 = 1$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$0 \le U_n \le 2$. conclure.

11 Soit la suite définie par $U_0 = 5$ pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{n+3}{n+4} U_n$.

1) Montrer que pour tout entier n, $U_n \ge 0$.
2) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} \langle U_n$. Conclure.

12 1) On considère $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + a x^2 + bx$.

et que pour tout réel x on a $P(x + 1) - P(x) = x^2$.

a) Sans calculer a, b calculer P(0), P(1) et P(-1).

b) Déterminer alors a et b.

2) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un entier naturel.
3) On pose $S_1 = 1$ et $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

Démontrer que $S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

13 On considère les suites définies par tout entier naturel n par :

$U_0 = 0$ et $V_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}$ et $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + \frac{1}{4}$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et V_1, V_2, V_3.
2) a) Tracer les droites $\Delta : y = x$ et $D : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

b) Utiliser Δ et D pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'abscisses respectifs U_1, U_2, U_3 et U_4.
Les points B_1, B_2, B_3et B_4 d'abscisses respectifs V_1, V_2, V_3 et V_4.

3) Soit $S_n = U_n + V_n$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a)Calculer S_0, S_1, S_2, S_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturé par la suite S_n ?

b) Montrer par récurrence que la suite S_n est constante.

4) Soit $t_n = V_n - U_n$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

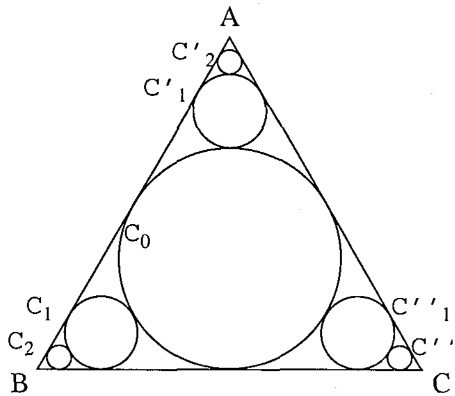
a)Montrer que (t_n)est une suite géométrique .

b) Donner l'expression de (t_n)en fonction de n.

5) Déterminer alors (U_n)et(V_n)en fonction de n.

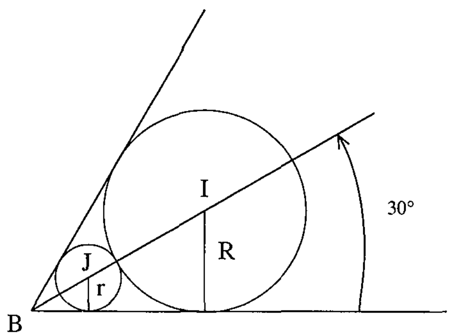
14

ABC un triangle équilatéral de côté a.
ξ_0 le cercle inscrit dans ABC.
On construit ensuite 3 cercles $\xi_1;\xi_1';\xi_1''$
Tangents aux côtes et au cercle ξ_0,
puis trois cercles $\xi_2;\xi_2';\xi_2''$ tangents
aux côtes de chacun des cercles
$\xi_1;\xi_1';\xi_1''$ ... et ainsi de suite comme
indique la figure.



On s'intéresse au calcul, en fonction de aet de n l'aire du domaine intérieur au triangle et extérieur aux cercle ξ_0 aux trois cercles $\xi_1;\xi_1';\xi_1''$ etc.... aux cercles $\xi_n;\xi_n';\xi_n''$.

1)Déterminer la valeur du nombre
$q=\dfrac{r}{R}$ (Indication : Ecrire
$\sin 30°=\dfrac{r}{BJ}=\dfrac{R}{BI}$ et BI = BJ + r + R).



2) On désigne par R_n le rayon de cercle ξ_n.
Montrer que R_n est une suite géométrique. Préciser sa raison.

2) On désigne par U_n l'aire du disque limité par le cercle ξ_n.
Montrer que U_n est une suite géométrique.

3) Calculer $S_n=U_0+3U_1+3U_2+...+3U_n$.
Calculer l'aire S du triangle ABC. En déduire l'aire $S-S_n$

15 Soit (U_n) une suite définie sur IN par $U_0=a;a\rangle 0$
et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}=\dfrac{2+3U_n}{2+U_n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\rangle 0$.

2) Déterminer U_0 pour que (U_n) soit une suite constante.

3) On suppose que $U_0 \neq 2$, on désigne par (V_n) la suite définie sur IN par :

$V_n = \dfrac{-2+U_n}{1+U_n}$. Montrer que (V_n) es une suite géométrique.

4) Déterminer U_n en fonction de n.

5) Soit la suite $w_n = (1-V_n)U_n$.

Exprimer S en fonction de n tel que : $S = \sum_{i=n}^{2n+1} W_i$.

16 U la suite définie sur IN* par $U_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$

On se propose de montrer que U est majorée par $\dfrac{3}{2}$

1) <u>$1^{ère}$ Méthode</u> :

a) Exprimer $U_n - \dfrac{3}{2}$ en fonction de n.

b) En déduire que U est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

2) <u>$2^{ème}$ méthode</u> :

a) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$. Etudier le variation de f et calculer f(1).

b) En déduire que U est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

17 Soit la suite V définie sur IN par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = U_n(2 - U_n)$.

1) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x(2 - x)$. Montrer que f est Strictement croissante sur [0, 1] et que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

a) La suite (U_n) est majorée par 1 et minorée 0.

b) La suite (U_n) est strictement croissante.

18 Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeune dans l'année.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2005 + n).

1) a) Calculer U_0, U_1, U_2.

La suite U de terme général U_n est-elle arithmétique? Géométrique ? justifier les réponses.

b) Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = 0{,}9U_n + 100$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $V_n = U_n - 1000$.

a) Démontrer que la suite V de terme général V_n est géométrique. Préciser sa raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n = 500 \times 0{,}9^n + 1000$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n$.

En déduire le sens de variation de la suite U.

4) Au 1er janvier 2005, l'entreprise comporte un sureffectif de 300 employés.

A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

CORRIGÉS

1

1) Faux : $U_n = n + 1$ alors $U_{2n} = (2n) + 1 \neq 2n + 2$

2) Faux : contre exemple la suite $U_n = 2^n + n$ ni arithmétique, ni géométrique.

3) Faux : $U_{n+1} - U_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante.

4) Faux : Si $U_n < 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \quad \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow U_n$ est décroissante.

5) Vrai : $U_n = 1 + \frac{2}{7} + \ldots + (\frac{2}{7})^n = \dfrac{1-(\frac{2}{7})^{n+1}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{7}{5}(1-(\frac{2}{7})^{n+1})$

$0 < U_n < \frac{7}{5}$ car $1 > (\frac{2}{7})^{n+1}$ car c'est la somme de terme positif.

donc U_n est bornée .

6) Vrai : $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 8 \leq 10 + 2\cos x \leq 12 < 15$

7) Vrai : $U_n = \frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)-3}{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1}$ par suite $U_n - 3 = \frac{-3}{n+1} < 0$

$\Rightarrow U_n \leq 3$ et $U_n = \frac{3n}{n+1} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq U_n \leq 3$

8) Faux : contre exemple la suite constante. (ni croissante, ni décroissante).

2

1) La réponse est $\boxed{c}$: $U_0 = 1$, $U_1 = 0$ $U_2 = 3$ alors $U_1 - U_0 = -1 < 0$ et $U_2 - U_1 = 3 > 0$ donc U est ni croissante et ni décroissante.

2) La réponse est $\boxed{b}$: S est la somation des termes consécutifs d'une suite Géométrique donc $S = \frac{1}{2}\dfrac{1-(-\frac{1}{2})^{10}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{2^{10}}) = \frac{341}{1024}$

3) le réponse est $\boxed{a}$: car $U_{n+1} - U_n = 2n + 1$

4) La réponse est $\boxed{a}$: • $U_n = \frac{n+3}{n^2+2} > 0$ • $U_n - 1 = \frac{n+3}{n^2+2} - 1 = \frac{-n^2+n-2}{n^2+2}$

(car $-n^2 + n - 2 < 0$ puisque $\Delta = -7 < 0$) par suite U_n est bornée par 0 et 1.

5) La réponse est $\boxed{c}$: On sait que $(-1)^n \geq -1 \Rightarrow 2n + (-1)n \geq 2n - 1 \geq -1$

Donc est minorée.

3

a) $U_0 = 7$, $U_1 = 0$ et $U_2 = -5$

$U_2 - U_1 = -5 \Rightarrow U_2 < U_1$ et $U_1 - U_0 = -7 \Rightarrow U_1 < U_0$ donc $U_2 < U_1 < U_0$

on peut conjecturer : probablement qui (U_n) est décroissante.

(conjecturer c'est pas une démonstration, pour démontrer il faut le prouver pour tout $n \in \mathbb{N}$)

b) $U_3 = 9-24+7 = -8$; $U_4 = 9$ et $U_5 = -8$

$U_5 < U_4$ et $U_3 < U_4 \Rightarrow U_3 = U_5 < U_4$

On peut rien conclure pour les variations de u.

c) on a $U_3 < U_4$ et $U_1 < U_0$ donc Uelle est ni croissante et ni décroissante.

4 a) $U_n = \dfrac{2}{n+3}$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{n+4}$ alors $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2}{n+4} \times \dfrac{n+3}{2} = \dfrac{n+3}{n+4}$

on a $3 < 4 \Rightarrow n+3 < n+4 \Rightarrow \dfrac{n+3}{n+4} < 1$ d'ou $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

b) $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ et $U_n = \dfrac{2}{n+3} > 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $U_{n+1} < U_n$ d'ou (U_n) est décroissante.

5 On a $U_n = \sqrt{2}(n-1) + \dfrac{3}{5}(n+1)$

a) $U_{n+1} = \sqrt{2}n + \dfrac{3}{5}(n+2)$ d'ou $U_{n+1} - U_n = \sqrt{2} + \dfrac{3}{5}$

b) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{2} + \dfrac{3}{5}$ est constante

donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = \sqrt{2} + \dfrac{3}{5}$

c) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{2} + \dfrac{3}{5} > 0$ donc $U_{n+1} > U_n$ d'ou (U_n) est croissante.

6 a) * $U_n = (1{,}03)^n$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 1{,}03$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$

* $V_n = 9^n \times (0{,}02)^{n+2}$ alors $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{9^{n+1} \times (0{,}02)^{n+3}}{9^n \times (0{,}02)^{n+2}} = 9 \times (0{,}02) = 0{,}18$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}18$.

b) * $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 1{,}03 > 1$ et $U_n = (1{,}03)^n > 0$

donc $U_{n+1} > U_n$ d'ou (U_n) est croissante.

* $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0{,}18 < 1$ et $V_n = 9^n \times 0{,}02^{n+2} > 0$

donc $V_{n+1} < V_n$ d'ou (V_n) est décroissante.

7 a) la partie colorée est un trapèze donc $A(n, 2n)$; $B(n+1, 2n+2)$

C (n ,0) ; D(n+1,0) d'où AC = 2n, BD = 2n + 2 et CD = 1.

$$U_n = \frac{(AC + BD)\times CD}{2} = \frac{(2n + 2n + 2)}{2} = 2n + 1$$

b) $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2$

donc U_n est une suite arithmétique de raison 2.

Comme $U_{n+1} - U_n = 2 > 0$ donc (U_n) est croissante.

8 1) on a $U_n = \frac{10\,n}{n^2+1} > 0$ car $n \geq 1$

* $U_n - 5 = \frac{10n}{n^2+1} - 5 = \frac{-5n^2+10n-5}{n^2+1} = \frac{-5(n^2-2n+1)}{n^2+1} = \frac{-5(n-1)^2}{n^2+1} < 0$

donc $U_n < 5$. par suite u_n est bornée par 0 et 5.

2) $U_{n+1} - U_n = \frac{10(n+1)}{(n+1)^2+1} - \frac{10n}{n^2+1} = \frac{10n+10}{n^2+2n+2} - \frac{10n}{n^2+1} = \frac{-10(n^2+n-1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$

comme $n \geq 1$ alors $n - 1 \geq 0$ et $n^2 > 0$

donc $n^2+n-1 > 0$ et $n^2+2n+2 > 0$, $n^2+1 > 0$

donc $U_{n+1} - U_n < 0 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n \Leftrightarrow (U_n)$est décroissante

9 1) $U_n = \frac{n}{2} + \frac{8}{n} > 0$ car $n > 0$ donc un est minorée par 0.

* $U_1 = \frac{17}{2}$, $U_2 = 5$, $U_3 = \frac{25}{6}$ alors $U_1 > U_2$ et $U_2 < U_3$

donc u est ni croissante ni décroissante.

2) $U_n = 2n + \sin n$ et on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$

$0 < 2n-1 \leq 2n + \sin n \leq 1+2n$ donc (u_n) est minorée par 0.

* on pose $f(x) = 2x+\sin x$ dérivable sur IR.

$f'(x) = 2+\cos x > 0$ cos $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow$ f est croissante sur IR.

$n+1 > n$ et f est croissante sur IR $\Rightarrow f(n+1) > f(n)$

$\Rightarrow U_{n+1} > U_n \Rightarrow (U_n)$ est croissante.

3) $w_n = \frac{(-1)^n n + \cos n}{1+n}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ alors } \left.\begin{matrix} -n \leq (-1)^n n \leq n \\ -1 \leq \cos n \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -n-1 \leq (-1)^n n + \cos n \leq n+1$$

on multiplie par $\frac{1}{n+1}$ d'ou $-1 \leq U_n \leq 1$ donc U_n est bornée.

10 1) Vérification pour n = 0 : $U_0 = 3$ et $3 > 2$ d'où $U_0 \geq 2$ vraie

Supposons que la propriété est vraie par n = p

Soit $U_p \geq 2$. Montrer que $U_{p+1} \geq 2$

On a $U_{p+1}=\sqrt{2+U_p}$ .Comme $U_P \geq 2$ alors $U_P+2 \geq 4$ donc $\sqrt{U_P+2} \geq \sqrt{4}$

Soit $U_{p+1} \geq 2$ D'après le principe de récurrence on a montrée que $U_n \geq 2$.

2) Vérification par n = 0 : $U_0 = 1$ et $0 < 1 < 2$ alors $0 \leq U_0 \leq 2$

Donc la projeté est vrai pour le rang 0

Supposons que : $0 \leq U_p \leq 2$. Montrons que $0 \leq U_{p+1} \leq 2$

On a : $U_{p+1}=\sqrt{U_p+2}$ et $0 \leq U_p \leq 2$ alors $2 \leq U_p+2 \leq 4$

Ainsi $0 < \sqrt{2} \leq \sqrt{U_p+2} \leq \sqrt{4}=2 \Leftrightarrow 0 \leq U_{p+1} \leq 2$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in IN$ on a : $0 \leq U_n \leq 2$ donc U est bornée.

11 1) Montrons que pour tout $x \in IN$, $U_n \geq 0$.

Vérification pour n = 0 : $U_0 = 5 \geq 0$ donc la propriété est vrai

Supposons que pour tout $p \geq 0$ ona: $U_p \geq 0$

Montrer que : $U_{P+1} \geq 0$

On a : $U_{p+1}=\frac{P+3}{P+4}U_P$ comme $U_p \geq 0$

et $p \in IN$ donc $p + 4 > 0$ et $p + 5 > 0$ d'où $U_{p+1} \geq 0$

D'après le principe de récurrence on a : $\forall n \in IN$, $U_n \geq 0$

2) pour montrer que $U_{n+1} < U_n$ où on a : $U_n > 0$

il suffit de comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ avec 1.

$U_{n+1}=\frac{n+3}{n+4}U_n$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n+3}{n+4}$ Comme $n + 3 < n + 4$ alors $\frac{n+3}{n+4} < 1$

D'où $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ or $U_n > 0$ on Conclut que $U_{n+1} < U_n$.

12 On a p (n+1) -p (n) = x^2

1) p(0) = 0 et p (1) = $\frac{1}{3} + a + b$ et p (-1) = $-\frac{1}{3} + a - b$

Donc p (1) - p (0) = 0^2 par suite p (1) = p (0) = 0

* p (0) - p (-1) = $(-1)^2$ par suite 0-p (-1) =1 D'où p (-1) =-1

2) p (1) = 0 donc $a + b = -\frac{1}{3}$

p (-1) = -1 donc $a - b = -1+\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

On additionne les deux équations on obtient. $2a = -1$ donc $a = -\dfrac{1}{2}$

Où $a + b= -\dfrac{1}{3}$ donc $b = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

3) Montrons que p (n) est un rentier naturel?

Vérification : $p(0) = 0$ est un entier naturel,donc la propriété vrai pour 0.

Supposons que p (n) est un entier nature l.

Montrons que p (n+1) l'est l'aussi

Comme $p(n + 1)-p(n) = n^2$

Alors $p(n + 1) = n^2 + p(n) \in IN$ Car $n^2 \in IN$ et $p(n) \in IN$

D'après le principe de récurrence P (n) est un entier.

4) vérification par $n = 1$: $S_1=1$ et $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

D'où $S_1 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$ vraie pour $n = 0$

Supposons que la propriété est vraie pour $n \in IN$.

Soit $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$S_{n+1} = P(n+2) = (n+1)^2 + P(n+1)$ car $P(n+2)-P(n+1) = (n+1)^2$

$$= (n+1)^2 + S_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)\left[\frac{6(n+1)+(2n+1)}{6}\right] = (n+1)\left[\frac{+2n^2+7n+6}{6}\right]$$

où $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$ ainsi $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

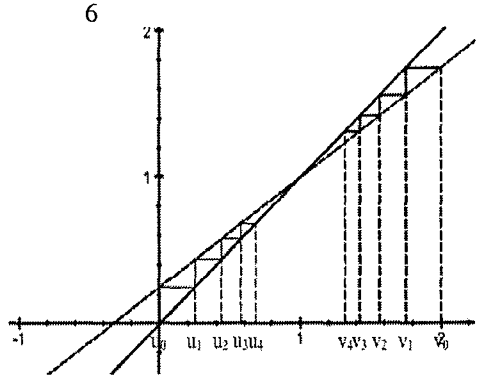
D'après le principe de récurrence on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

13

1) En remplaçant n par 0, 1 puis 2 dans U_{n+1} et V_{n+1} on obtient :

$U_1 = \dfrac{1}{4}$, $U_2 = \dfrac{7}{16}$ et $U_3 = \dfrac{37}{64}$

$V_1 = \dfrac{7}{4}$, $V_2 = \dfrac{25}{16}$ et $V_3 = \dfrac{91}{64}$



3) a) $S_0 = U_0 + V_0 = 2$; $S_1 = U_1 + V_1 = 2$

$S_2 = U_2 + V_2 = 2$; $S_3 = U_3 + V_3 = 2$

$S_1=U_1+V_1=2S_0=S_1=S_2=S_3=2$ ces cas particulier semblent

Indiquer que que la suite (S_n) est constante.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n=2$

On a $S_0 = 2$ supposons que la propriété est vraie pour l'entier p soit $S_p= 2$. Montrons que $S_{p+1} = 2$.

$$\text{On a}: S_{p+1}=U_{p+1}+V_{p+1} =\frac{3}{4}U_p+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}V_p+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}(U_p+V_p)+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}S_p+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times 2+\frac{1}{2}=2 \text{ car } S_p=2$$

D'après le principe de récurrence on a :

Montrer que pour tout entier n, $S_n = 2$.

On dire S_n est constante et $S_n = 2$.

4) a) $T_{n+1}= V_{n+1} - U_{n+1} =\frac{3}{4}V_n+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}U_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(V_n-U_n)=\frac{3}{4}T_n$

donc (T_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $T_0 = V_0 - U_0 = 2$.

b) $T_n=q^n.T_0$ d'où $T_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n.2 = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5) a) $S_n = U_n + V_n = 2$ et $T_n = Vn - Un = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^n$

On additionne membre à membre on obtient :

$2V_n=2 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ d'où $V_n=1+\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et la soustraction membre à membre on obtient :

$2U_n=2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ d'où $U_n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n=1$ Car $\frac{3}{4}\in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} Vn = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{3}{4}\right)^n=1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n=1$

14 1) $BI = BJ + r + R$ d'où $\frac{BI}{R}=\frac{BJ}{R}+\frac{r}{R}+1(1)$.

Or $\sin 30°=\frac{R}{BI}=\frac{r}{BJ}$ d'où $\frac{BI}{R}=\frac{1}{\sin 30°}=2=\frac{BJ}{r}$

Ainsi l'équation (1) devient : $2=\frac{BJ}{r}.\frac{r}{R}+\frac{r}{R}+1$

Ou encore $2=2q+q+1$ soit $q=\frac{1}{3}$.

2) Etant donné la démonstration précédente, la suite (R_n) des rayons des cercles ξ_n vérifie: $\frac{R_{n+1}}{R_n}=\frac{1}{3}$.

R_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3) $U_n=\pi R_n^2$ alors $U_{n+1}=\pi R_{n+1}^2=\frac{\pi}{9}.R_n^2=\frac{1}{9}U_n$

donc U est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$.

Le rayon du cercle inscrit est égal au tiers de la hauteur et la hauteur d'un triangle équilatéral est $\frac{\sqrt{3}}{2}$**a**.

$R_0=\frac{1}{3}.a\frac{\sqrt{3}}{2}=a\frac{\sqrt{3}}{6}$ d'où $U_0=\pi R_0^2=\frac{\pi a^2}{12}$.

4) $S_n=U_0+3U_1+3U_2+...+3U_n=3(U_0+U_1+...+U_n)-2U_0$

$$=3.U_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-2U_0=U_0\left[3.\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}-2\right]=\frac{\pi a^2}{12}\left[\frac{27}{8}\left(1-\frac{1}{9^{n+1}}\right)-2\right].$$

- L'aire du triangle ABC est : $S=\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}.a^2}{4}$.
- *L'aire cherchée est donc :* $S-S_n=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{12}\left[\frac{27}{8}\left(1-\frac{1}{9^{n+1}}\right)-2\right]$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\sqrt{3}-\frac{9\pi}{8}+\frac{\pi}{8.9^n}+\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{a^2}{4}\left[\sqrt{3}-\frac{11\pi}{24}+\frac{\pi}{8}.\frac{1}{9^n}\right].$$

15 1) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, U_n > 0$.

* Pour n = 0 ; $U_0=a>0$ donc l'inégalité est vraie pour n = 0.

* On suppose que $U_n \rangle 0$, montrons que $U_{n+1} \rangle 0$?

$U_{n+1} = \dfrac{2+3U_n}{2+U_n}$; or $U_n \rangle 0$ donc $2+3U_n \rangle 0$ et $2+U_n \rangle 0$ d'où $U_{n+1} \rangle 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \rangle 0$.

2) (U_n) est constante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n = U_0$.

équivaut à : $a = \dfrac{2+3a}{2+a} \Leftrightarrow 2a + a^2 = 2a + a^2 = 2 + 3a$.

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ ou $a = 2$ or $a \rangle 0$ donc $a = 2$.

3) $$V_{n+1} = \frac{-2+U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \frac{-2+\dfrac{2+3U_n}{2+U_n}}{1+\dfrac{2+3U_n}{2+U_n}} = \frac{-4-2U_n+2+3U_n}{2+U_n+2+3U_n}$$

$= \dfrac{U_n - 2}{4U_n + 4} = \dfrac{U_n - 2}{4(U_n + 1)} = \dfrac{1}{4} V_n$; d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme: $V_0 = \dfrac{-2+a}{1+a}$.

Son terme général est définie par : $V_n = q^n . V_0 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \left(\dfrac{-2+a}{1+a}\right)$.

4) a) $V_n = \dfrac{-2+U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow V_n + U_n . V_n = -2 + U_n \Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = -2 - V_n$.

Si $V_n = 1$ on a : $0 = -3$ imposssible donc $V_n \neq 1$.

$$\text{D'où } U_n = \frac{-2-V_n}{V_n-1} = \frac{2+V_n}{1-V_n} = \frac{2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left(\dfrac{-2+a}{1+a}\right)}{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left(\dfrac{-2+a}{1+a}\right)}.$$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ car $q = \dfrac{1}{4} \in]-1,1[$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+V_n}{1-V_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}(2+V_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1-V_n)} = \dfrac{2}{1} = 2$.

5) $W_n=(1-V_n)U_n=(1-V_n)\left(\dfrac{2+V_n}{1-V_n}\right)=2+V_n$.

$$S=\sum_{i=n}^{2n+1}W_i=(2+V_n)+(2+V_{n+1})+\ldots+(2+V_{2n+1})$$

$$=(2+2+\ldots+2)+(V_n+V_{n+1}+\ldots+V_{2n+1})$$

$$=2(n+1)+\sum_{i=n}^{2n+1}V_i=2(n+1)+V_0.\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}}=2n+2+\frac{4}{3}\left(\frac{a-2}{a+1}\right).\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

16 1) a) $U_n-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2n+1}{3n-1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2(2n+1)-3(3n-1)}{2(3n-1)}=\dfrac{-5n+5}{2(3n-1)}$

b) $U_n-\dfrac{3}{2}\leq 0$ car $n\geq 1\Rightarrow 5n\geq 5\Rightarrow 0\geq 5-5n$ et $3n\geq 3>1\Rightarrow 3n-1\geq 0$.

donc $U_n\leq\dfrac{3}{2}$ ou encore U_n est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

2) a) f est la restriction d'une fonction rationnelle donc dérivable sur $[1,+\infty[$

et $f'(x)=\dfrac{-2-3}{(3x-1)^2}=\dfrac{-5}{(3x-1)^2}<0$

$\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $f(1)=\dfrac{3}{2}$

b) $n\geq 1$ et f strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ alors $f(n)\leq f(1)$ d'où $U_n\leq\dfrac{3}{2}$

18 1) a) • U_0 est le nombre d'employés au 1er janvier 2005
; le texte indique que $U_0=1500$

• U_1 est le nombre d'employés au 1er janvier 2006. D'après le texte :

$U_1=U_0-\dfrac{10}{100}U_0+100=0{,}9U_0+100$ d'où $U_1=1\,405$.

• U_2 s'obtient à partir de U_1 comme U_1 à partir de U_0:
$U_2=0{,}9U_1+100$; $U_2=1\,405$.
On remarque que: $U_1-U_0\neq U_2-U_1$ car $U_1-U_0=-50$ et $U_2-U_1=-45$.
La suite (U_n) n'est donc pas arithmétique.

On remarque aussi que $\dfrac{U_1}{U_0}\neq\dfrac{U_2}{U_1}$ car $\dfrac{U_1}{U_0}\approx 0{,}9667$ et $\dfrac{U_2}{U_1}\approx 0{,}9689$.

La suite (U_n) n'est pas géométrique.

b) Soit U_n et U_{n+1} le nombre d'employés au 1er janvier (2005 + n) et au 1er janvier (2005 + n + 1).
Pour tout entier naturel n, le nombre d'employés U_{n+1} est égal au nombre U_n diminué de 10% auquel on ajoute 100.
On a donc, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n - \frac{10}{100} U_n + 100$

$U_{n+1} = 0{,}9\, U_n + 100$.

2) Pour tout entier naturel n, on se pose $V_n = U_n - 1000$.

a) Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = U_{n+1} - 1000$ d'où $U_{n+1} = V_{n+1} + 1000$
$V_n = U_n - 1000$ d'où $U_n = V_n + 1000$.

En utilisant la relation obtenue en 1) b) on obtient pour tout entier naturel n

$V_{n+1} + 1000 = 0{,}9\,(V_n + 1000) + 100$

$V_{n+1} = 0{,}9V_n + 900 + 100 - 1000$

$V_{n+1} = 0{,}9\, V_n$.

La suite (V_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de premier terme $V_0 = U_0 - 1000 = 500$.

b) • Pour tout entier naturel n, $V_n = V_0 q^n = 500 \times (0{,}9)^n$; $V_n = 500 \times (0{,}9)^n$.

• On en déduit que, pour tout entier naturel n, $U_n = V_n + 1000$
$U_n = 500 \times 0{,}9^n + 1000$.

3) Pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} - U_n = 500 \times 0{,}9^{n+1} + 1000 - (500 \times 0{,}9^n + 1000)$

$= 500 \times 0{,}09\,(0{,}9 - 1) = -500 \times 0{,}9 \times 0{,}1$

$U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9$.

Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n$ est strictement négatif.
La suite (U_n) est strictement décroissante .

4) l'entreprise ne sera plus en sureffectif lorsque le nombre U_n d'employés sera inférieur ou égal à 1500 – 300 = 1200.
Déterminons les entiers naturels n tels que : $U_n \leq 1200$.
Cette inéquation est équivalente, pour tout n de $\mathbb{N}$, à :

$$500 \times 0{,}9^n + 1000 \leq 1200 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leq \frac{2}{5}.$$

En utilisant une calculatrice on obtient n = 9.
Les solutions de l'inéquation sont les entières supérieurs ou égaux à 9.
Donc à partir de l'année 2005 + 9 = 2014 l'entreprise ne sera plus en sureffectif.

Chapitre X

Limites des suites réelles

Suites convergentes :

■Définitions: 1)Une suite U est convergente si elle admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$.

2) (u_n) converge vers L signifie que
Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que n $\geq$ N alors $|U_n - L| < \varepsilon$

■Théorèmes de comparaison :

•Soient U et V deux suites, ℓ un réel.

Si à partir d'un certain rang, on a : $|U_n - \ell| < V_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ Alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$.

•Soient U, V et W trois suites, et ℓ un réel ;

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $U_n \leq W_n \leq V_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell$

•Soient U, V deux suites tel que $\lim\limits_{+\infty} U_n = \ell$; $\lim\limits_{+\infty} V_n = \ell'$

Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ alors $\ell < \ell'$.

•U est une suite, si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $U_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang).alors $\ell \geq 0$.

3) Suites divergentes :

■Définition :Une suite est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ est l'infini où n'existe pas.

■Théorèmes

•Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang

Si $V_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

•Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang

Si $V_n \leq U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = -\infty$.

	Suite arithmétique de raison r	**Suite géométrique de raison q**
Limite	Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ Si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$	• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ • Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } U_0 > 0 \\ -\infty \text{ si } U_0 < 0 \end{cases}$ • Si $q \leq -1$ alors U_n n'admet pas de limite. • Si $q = 1$ alors U_n est constante donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$.

Réflexes :

Situations	**Réflexes**
Comment étudier la limite d'une suite géométrique ?	• On exprime u_n en fonction de n : $U_n = q^n . u_0$ et on étudie selon la valeur de q en utilisant le théorème du cours.
Comment établir qu'une suite est convergente ?	• On observe s'il s'agit d'une suite géométrique • Ou on applique les règles (somme, produit, quotient) de suites convergentes. • où avec les théorèmes de comparaison • où on calcule sa limite.

ENONCES

1 **Vrai – faux**

Dire si l 'affirmation est vraie ou fausse
Justifier cette réponse.

1) Toute suite bornée est convergente
2) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{x \to +\infty}$ alors $u_n = 0$
3) La suite u définie sur IN par $u_n = (0{,}99)^n$ converge vers 0.
4) La suite w définie sur IN par $w_n = \sin n$ est divergente.
5) Si une suite géométrique u de raison $q > 1$ alors u pour limite $+\infty$.
6) Si u est une suite quelconque et v une suite qui converge vers 0 alors la Limite u. v converge vers 0.
7) Si une suite u est croissante alors u a pour limite $+\infty$.
8) u une suite définie sur IN, à termes positif

   et v une suite définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ Si u converge alors v converge.

2 **Q.C.M**

Indiquer la bonne réponse a, b ou c avec justification.

1) u est la suite définie par $u_n = \dfrac{n+1}{2n+5}$ alors u a pour limite.

   a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $+\infty$

2) u est la suite définie par un $= 5+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ u a pour limite.

   a) 0 b) 5 c) $-\infty$

3) V la suite définie sur IN par $V_n = (-1)^n . n^4$ la suite V.

   a) n'a pas de limite b) diverge vers $+\infty$
   c) diverge vers $-\infty$

4) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

   a) n'admet pas la limite b) converge vers 0 c) diverge vers $+\infty$.

5) u la suite définie sur IN par : $u_0 = 0$

   et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1}$

   a) u est croissante b) u est une suite arithmétique
   c) u converge vers 2.

6) Pour tout entier naturel n, $u_n < 2$ alors :

a) La suite u est convergente b) $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 2$

c) la suite u est majorée par 2.

3

Déterminer les limites éventuelles de chaque suite (u_n) définie sur n , par le terme général.

1) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$ 2) $u_n = \frac{3}{5^n}$ 3) $u_n = (-7)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+2}$ 5) $u_n = (\cos 3)^n + 1$ 6) $u_n = n^2 + n + \frac{1}{n^2} (n \in \mathbb{N}^*)$

4

En utilisant le théorème de comparaison, Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ dans chaque cas :

1) $u_n = \frac{\cos n}{2n+3}$ 2) $u_n = \frac{\sin(n)+2}{n^2+1}$

3) $u_n = \frac{(-1)^n + 7}{4n^2 + 3}$ 4) $u_n = n + \cos n$

5

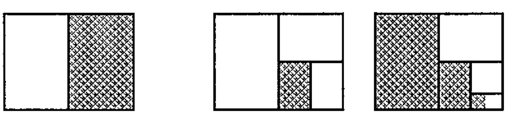
Etudier la convergente des suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = \frac{1+2^n}{3^n}$ b) $u_n = (1-\sqrt{2})^n$ c) $u_n = n^2 + (1{,}5)^n$

6

A partir d'un carré de coté 1, on construit les rectangles colorés suivants :

Etape 1 Etape 2 Etape 3



A chaque étape, les segments construits relient les milieux de deux segment opposés.

a) Calculer l'aire S_n de la surface colorée à l'étape n.

b) Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$. Déduire.

7

La suite (U_n) définie par : $U_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + n^2 - n$

1) Montrer qu'a partir d'un certain rang : $U_n > n$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

8 Soit la suite (V_n) définie sur IN par $\begin{cases} V_0 = 1 ; V_1 = 3 \\ V_{n+2} = aV_{n+1} + (1-a)V_n \end{cases}$

Et soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = V_{n+1} - V_n$.

1) a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer W_n en fonction de n.

c) Déterminer l'ensemble E des réels a pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

2) Dans la suite on donne $a = \frac{5}{3}$.

a) Montrer la récurrence que : pour tout $n \in IN ; V_n = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Calculer la fonction de n ; $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} W_k$,puis retrouver l'expression de V_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

d) Calculer en fonction de n, $S' = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$.

9 Soit (U_n) définie sur IN par: $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 8}{2U_n + 1}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3.

2) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$.

a) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ et tracer la droite $\Delta : y = x$.

b) Construire à l'aide de la courbe de f et de Δ les points de l'axe $(o, \vec{i})$ d'abscisses respectifs U_0, U_1, U_2, U_3.

c) Que peut-on prévoir de la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

3) Soit (V_n) la suite définie sue IN par $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$.

a) Calculer V_0, V_1, V_2.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que caractérisera.

c) Exprimer V_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend $+\infty$

4) En déduire alors U_n en fonction de n et déterminer sa limite en $+\infty$.

10 * Approximation de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

Soient $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_0=1$ et $V_0=2$

$U_{n+1}=\dfrac{2U_n V_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1}=\dfrac{1}{2}(U_n+V_n)$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\rangle 0$ et $V_n\rangle 0$.

2) Soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $W_n=V_n-U_n$.

a) Démontrer que $W_{n+1}=\dfrac{W_n^2}{2(U_n+V_n)}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n\geq 0$.

c) Démontrer à l'aide de a) que $W_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}W_n$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

e) En déduire $\lim\limits_{+\infty} W_n=0$ et que $\lim\limits_{+\infty} U_n=\lim\limits_{+\infty} V_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $U_{n+1}\geq U_n$.

b) Démontrer que $V_{n+1}\,V_n\leq 0$.

c) Montrer que la suite $t_n=U_n.V_n$ est une suite constante égale à 2.

d) Déduire alors $\lim\limits_{+\infty} U_n=\sqrt{2}$.

e) Calculer U_4 et V_4 et en déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux rationnels.

11 Soit (U_n) la suite définie par $U_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$U_{n+1}=\dfrac{3U_n+9}{2U_n}$

1) Montrer que $U_{n+1}-3$ et U_n-3 sont de signes contraires.

En déduire que pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a : $U_{2p}\leq 3\leq U_{2p+1}$.

2) En déduire que si (U_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=3$.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\geq 2$.

4) Montrer que pour tout $n\geq 2$, On a : $|U_n-3|\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.

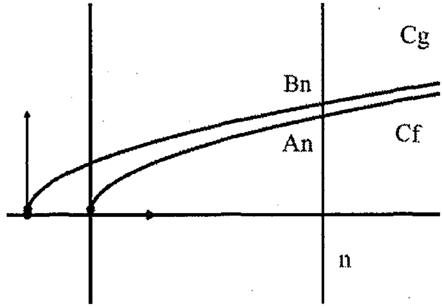
5)En déduire que (U_n) converge et trouver sa limite.

12

Soit f et g deux fonctions tel que :

$f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

pour tout entier naturel n, on note A_n et B_n les points d'abscisse n qui appartiennent respectivement à ζ_f et ζ_g les courbes de f et g.



on pose $U_n = A_n B_n$

a) Conjecturer la limite de U

b) Montrer que pour tout n de IN; $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

d) En déduire la limite de (U_n)

13

Soit $n \in IN^*$, la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ et g la fonction définie sur $IR - \{1\}$ par

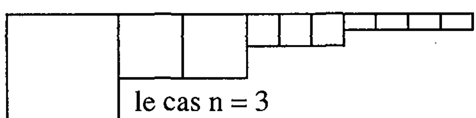
$$g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

1) a) Calculer les dérivées des fonctions f et g.

b) En déduire que pour tout $a \neq 1$

$$1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1} = \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}$$

2) On construit un carrée de côté 1 , deux carré de côtés $\frac{1}{2}$, 3 carrés de côté $\frac{1}{2^2}$,........n carrés de côté $\frac{1}{2^{n-1}}$



On note A_n l'aire total de la figure obtenue.

a) Exprimer A_n en fonction de n.

b) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{4^n} = 0$. Démontrer que $(A_n)_{n\geq1}$ converge vers un réel que l'on précisera.

14 Dans une réserve, une population initiale de 1000 animaux évolue ainsi : 20% des animaux disparaissent (c'est le plan global de naissances et des décès) et on introduit 120 animaux supplémentaires.
P_n est l'évolution de cette population au bout de n années.

1) Montrer que $P_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 120$
2) Représenter les 4 premiers termes de la suites (p_n).
   La suite (p_n) est-elle convergente ?
3) On pose $V_n = P_n - 600$
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$. En déduire la convergence de (p_n).
4) Déterminer alors la valeur de stabilisation de cette population.
   Est elle rapide ?

15 Ali et Wadi sont jumeaux . Ali qui est fumeur , dépense 600 dinars par an pour l'achat de ses cigarettes. Wadi qui ne fume pas , lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.
Il lui propose de déposer tous les ans , le 1^{er} janvier , cette somme de 600 dinars sur une compte rémunéré à intérêts composés par la banque au taux annuel de 3 %. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.
Le 1^{er} janvier1999, il verse 600 dinars et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 1^{er} janvier, il verse de nouveau 600 dinars

1) Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes ?
   a) Le 3 janvier 2000.
   b) Le 3 janvier 2001.
2) On noteU_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999 et on désigne par U_n la somme d'argent disponible sur le livret le 3 janvier de l'année 1999+ n.

Montrer qu'on a la relation $U_{n+1} = 1{,}03U_n + 600$

3) Soit (V_n) la suite d définie , pour tout entier naturel n , par $V_n = U_n + 20\,000$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la premier terme.
   b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n puis celle de U_n en fonction de n.
4) Wadi affirme qu'en moyenne , un fumeur s'arrête de fumer après avoir fumé pendant trente ans.
   De quelle somme Ali aurait –il pu déposer le 3 janvier 2029 ?

CORRIGES

1

1) Faux : contre exemple $U_n = -1 \leq (-1)^n \leq 1$
(U_n) c'est une suite bornée mais n'est pas convergente.

2) Faux : contre exemple $U_n = -n^2$ on a $-n^2 < 0 < \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{+\infty} U_n = -\infty$

3) Vrai : $U_n = (0{,}99)^n$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}99 \in \left]-1,1\right[$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 0$ d'où (U_n) converge vers 0.

4) Vrai : $W_n = \sin n$ n'admet pas de limite à l'infini donc (W_n) est divergente.

5) Faux : $U_n = -(5)^n$
$\lim\limits_{+\infty} U_n = -\infty$ car $q = 5 > 1$ et $U_0 = -1 < 0$

6) Faux : $U_n = n$ et $V_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{+\infty} V_n = 0$ et $\lim V_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{+\infty} U_n . V_n = \lim\limits_{+\infty} \cancel{n} . \frac{1}{\cancel{n}} = 1 \neq 0$

7) Faux : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ donc (U_n) est croissante.

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) \quad \frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[\text{ alors } \lim_{+\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} = 0$$

d'où $\lim\limits_{+\infty} U_n = 2 \neq +\infty$

8) Vrai : si u converge alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ (ℓ finie) or $U_n \geq 0$ donc $\ell \geq 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{\ell}{1+\ell}$ d'où (V_n) converge vers $\frac{L}{1+L}$

2

1) La réponse est $\boxed{b}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$

2) La réponse est $\boxed{b}$: on sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ alors $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 5$

3) La réponse est $\boxed{a}$: $V_n = (-1)^n . n^4 = \begin{cases} n^4 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -n^4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

donc (V_n) n'admet pas de limites.

4) La réponse est $\boxed{b}$: on a $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ d'où (U_n) converge vers 0.

5) La réponse est $\boxed{a}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$ alors (U_n) est croissante.

6) La réponse est $\boxed{c}$: $U_n < 2$ donc U_n est majorée par 2.

3 1) $(-\frac{1}{2})$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

et $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{2})^n + 2 = 2$

2) $U_n = \frac{3}{5^n} = 3 \times (\frac{1}{5})^n$ est une suite géométrique de

raison $q = \frac{1}{5} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) $U_n = (-7)^n$ est une suite géométrique de raison $q = -7 < -1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas .

4) $U_n = (-\frac{3}{2})^{n+2} = (-\frac{3}{2})^2 . (-\frac{3}{2})^n$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{2} < -1$
donc (U_n) n'admet pas de limite .

5) $U_n = (\cos 3)^n + \frac{1}{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $(\cos 3)^n$ est une suite géométrique
de raison $q = \cos 3 \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos 3)^n = 0$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} n^2 + n + \frac{1}{n^2} = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} n^2 + n = \lim\limits_{+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

4 1) On a $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $2n+3 > 0$ alors $\frac{-1}{2n+3} \leq \frac{\cos n}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n+3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{2n+3} = 0$

2) On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$ alors $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ or $n^2 + 1 > 0$
alors $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{2+\sin n}{n^2+1} \leq \frac{3}{n^2+1}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2+\sin n}{n^2+1} = 0$

3) $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow 6 \leq (-1)^n + 7 \leq 8$ or $4n^2+3>0$

alors $\dfrac{6}{4n^2} \leq \dfrac{(-1)^n+7}{4n^2+3} \leq \dfrac{8}{4n^2+3}$; $\dfrac{6}{4n^2+3} \leq U_n \leq \dfrac{8}{4n^2+3}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{4n^2+3} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{4n^2+3} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow n-1 \leq n+\cos n \leq n+1$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\cos n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

5 a) $U_n = \dfrac{1+2^n}{3^n} = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{2^n}{3^n} = (\dfrac{1}{3})^n + (\dfrac{2}{3})^n$ or $(\dfrac{1}{3})^n$ et $(\dfrac{2}{3})^n$ sont 2 suites

géométrique de raison respectives $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$ qui appartiennent à]-1, 1[donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{3})^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{2}{3})^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ donc que (U_n) converge vers 0.

b) $U_n = (1-\sqrt{2})^n$ est une suie géométrique de raison $q = 1-\sqrt{2} \simeq -0,4 \in \left]-1,1\right[$

Donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$ d'où (U_n) converge vers 0.

c) • $(1,5)^n$ est une suite géométrique de raison $q = 1,5 \in \left]1,+\infty\right[$ de premier terme 1 Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,5)^n = +\infty$

• et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$ par suite (U_n) est divergente.

6 a) Pour chaque entier $n \geq 1$, puisqu'à chaque étape, on ajoute une portion colorée égale à la moitié de la moitié de celle ajouté à l'étape précédente. On additionne n termes consécutifs qui forment une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$

d'où $S_n = \dfrac{1}{2} \times (1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + ... + \dfrac{1}{4^{n-1}}) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1-(\dfrac{1}{4})^n}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}(1-(\dfrac{1}{4})^n)$

b) $q = \dfrac{1}{4} \in \left]-1,1\right[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{4})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{3}$ d'où S_n converge vers $\dfrac{2}{3}$.

7 1) $U_1 = -2 + 1^2 - 1 = -2$, $U_2 = U_1 + 4 - 2 = 0$, $U_3 = U_2 + 9 - 3 = 6$
$U_3 > 3$

Montrons par récurrence que pour $n \geq 3$. Supposons que $U_n > 3$ pour
$U_n \geq 3$et montrons que $U_{n+1} > n + 1$
$U_n > n \Rightarrow U_n + n^2 - n > n + n^2 - n \Rightarrow U_{n+1} > n^2$

Or $n^2 > n + 1$ car $n^2 - n - 1 > 0$ puisque

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	3
$x^2 - x - 1$	+ 0	- 0	+

Et comme $n > 3 \Rightarrow n^2 - n - 1 > 0$ par conséquent $U_{n+1} > n^2 > n + 1$

Conclusion $\forall n \geq 3$, $U_n \geq n$

2) Pour tout $n \geq 3$ on a $U_n \geq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

8

La suite (V_n) est définie par $\begin{cases} V_0 = 1; V_1 = 3 \\ V_{n+2} = aV_{n+1} + (1-a)V_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(W_n) est définie par : $W_n = V_{n+1} - V_n$.

1) a) $W_{n+1} = V_{n+2} - V_{n+1} = a\,V_{n+1} + (1-a)V_n - V_{n+1}$

$= (a-1)V_{n+1} + (1-a)V_n = (a-1)\left[V_{n+1} - V_n\right] = (a-1)W_n$.

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison $q = a-1$.

b) $W_n = W_0 . q^n ; W_0 = V_1 - V_0 = 2$ d'où $W_n = 2(a-1)^n$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} W_n = 0$ si seulement si $a-1 \in]-1,1[$;

$-1 \langle a-1 \langle 1 \Leftrightarrow 0 \langle a \langle 2$ d'où $E =]0,2[$.

2) a)Montrons par récurrence que : « pour tout $n \in \mathbb{N}; V_n = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$. »

* Pour $n = 0; V_0 = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc la propriété est varie pour n = 0.

* On suppose que : $V_n = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que :

$V_{n+1} = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. On a : $W_n = V_{n+1} - V_n \Leftrightarrow V_{n+1} = W_n + V_n$.

et par suite : $V_{n+1} = 2\left(\frac{5}{3}-1\right)^n + 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= 7-4\left(\frac{2}{3}\right)^n = 7-4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 7-4\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ d'où $V_{n+1} = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

* <u>Conclusion</u> : Donc pour tout $n\in\mathbb{N}, V_n = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

a) * $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k = W_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right) = 2\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

* On a $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(V_{k+1}-V_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

$\left(V_1+V_2+...+V_{n-1}+V_n\right)-\left(V_0+V_1+V_2+...+V_{n-1}\right) = V_n - V_0$.

d'où $S_n = V_n - 1 \quad (1)$; d'autre part $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \quad (2)$.

D'après (1) et (2), $V_n - 1 = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ d'où $V_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+1 = 6-6\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$;

et par suite: $V_n = 7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[7-6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} 7 - \lim\limits_{x\to+\infty} 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= 7-6\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 7-6\times 0 = 7$ car $\frac{2}{3}\in\left]-1,1\right[$.

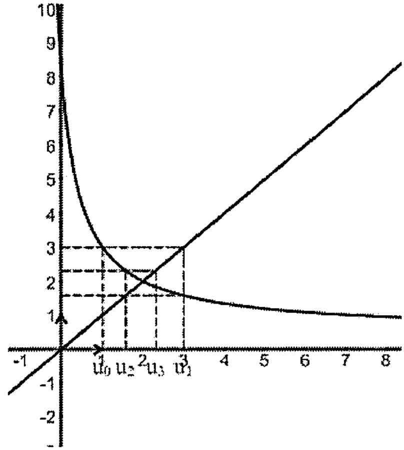
d) $S' = \sum_{k=0}^{n-1} V_K = \sum_{k=0}^{n-1}\left(7-6\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 7 - \sum_{k=0}^{n-1}\left[6\left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$

$$7n-6\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 7n-6\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right] = 7n-18\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

9 $\frac{U_0+8}{2U_0+1} = \frac{9}{3} = 3$ et $U_2 = \frac{11}{7}$ et $U_3 = \frac{67}{29}$

2)

b) Le point M_0 de la ζ_f d'abscisse U_0 à pour ordonnée f $(U_0)= U_1$, la parallèle issue de M_0 à l'axe des abscisses coupe Δ en M_1 (U_1, U_1) et M_1 se projette donc sur l'axe des abscisses au point d'abscisse U_1. On récurrence la même construction pour avoir U_2 et U_3.



c) Le dessin montre que la suite (U_n) semble s'approcher de plus en plus vers l'abscisse du point d'intersection de ζ_f et Δ.

Donc (U_n) semble tendre vers 2.

3) a) $V_0=\dfrac{U_0-2}{U_0+2}=-\dfrac{1}{3}$ et $v_1=\dfrac{1}{5}$ et $V_2=-\dfrac{3}{25}$

b) $V_{n+1}=\dfrac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{U_n+8}{2U_n+1}-2}{\dfrac{U_n+8}{2U_n+1}+2} = \dfrac{(U_n+8)-2(2U_n+1)}{(U_n+8)+2(2U_n+1)}=\dfrac{-3U_n+6}{5U_n+10}$

$= \dfrac{-3(U_n-2)}{5(U_n+2)}=\dfrac{-3}{5}V_n$

$\Longrightarrow$ (Vn) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{-3}{5}$ et de 1^er^ terme $V_0=\dfrac{-1}{3}$.

c) $V_n=q^n.V_0$

d'où $Vn=\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n.\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{5}\right)$puisque $q=-\dfrac{3}{5}\in\left]-1,1\right[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$

4) $V_n=\dfrac{U_n-2}{U_n+2} \Leftrightarrow V_n.(U_n+2)=U_n-2$

$U_n(V_n-1)=-2V_n-2$ Si $V_n\neq 1$ alors $U_n=\dfrac{2V_n+2}{1-V_n}=\dfrac{-\dfrac{2}{3}(-\dfrac{3}{5})^n+2}{1+\dfrac{1}{3}(-\dfrac{3}{5})^n}$

d'où $U_n=\dfrac{-2(-\dfrac{3}{5})^n+6}{3+(\dfrac{-3}{5})^n}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2V_n+2}{1-V_n} = 2$

On retrouve alors le résultat espéré à la question 2/ c

10 1) Vérification pour $n = 0 : V_0 = 2 \rangle 0$ et $U_0 = 1 \rangle 0$

donc la propriété est vrai par n = 0Supposons que $U_n \rangle 0$ et $V_n \rangle 0$

Montrer que $U_{n+1} \rangle 0$ et $V_{n+1} \rangle 0$

on a: $U_{n+1} = \dfrac{2U_n . V_n}{U_n + V_n}$ comme $U_n \rangle 0$ et $V_n \rangle 0$alors $U_n V_n \rangle 0$ et $U_n + V_n \rangle 0$

d'où $U_{n+1} \rangle 0$ et $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n + V_n) \rangle 0$

ainsi d'aprés le principe de récurrence on a $\forall n$ IN, $U_n \rangle 0$ et $V_n \rangle 0$

2) a) $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$

$$= \frac{1}{2}(U_n + V_n) - \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} = \frac{(U_n + V_n)^2 - 4U_n V_n}{2(U_n + V_n)} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{W_2^n}{2(U_n + V_n)}.$$

b) on a : $w_0 = V_0 - U_0 = 1 \geq 0$

Supposons que $W_n \geq 0$. Montrons que $W_{n+1} \geq 0$

$W_{n+1} = \dfrac{W_n^{\ 2}}{2(U_n + V_n)}$ comme $W_n^2 \geq 0$ et $U_n \geq 0$ et $V_n \geq 0$ alors $W_{n+1} \geq 0$.

d'où d'aprés le principe de recurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$

c) $W_{n+1} = \dfrac{W_n^2}{2(U_n + V_n)} = \dfrac{W_n}{2} \times \dfrac{W_n}{U_n + V_n}$

Comme $U_n \geq 0 \geq -U_n$ *alors* $V_n + U_n \geq V_n - U_n$ or $U_n + V_n \rangle 0$

Soit $\dfrac{V_n - U_n}{U_n + V_n} \leq 1$ où encore $\dfrac{W_n}{U_n + V_n} \leq 1$ ainsi $\dfrac{W_n}{2} . \dfrac{W_n}{U_n + V_n} \leq \dfrac{W_n}{2}$ Soit $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} W_n$ d)

on a : $W_0 = 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ Supposons que $W_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et Montrons que $W_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

on a: $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} W_n$ et $W_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} . \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

d'après le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

2) On a $W_n \geq 0$ et $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{+\infty} W_n = 0$ $\lim\limits_{+\infty} W_n = 0$ or $W_n = V_n - U_n$

donc $\lim\limits_{+\infty} V_n - U_n = 0$ d'où $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} V_n$

3) a) $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{2U_n V_n - U_n^2 - U_n V_n}{U_n + V_n}$

$= \frac{U_n V_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n} = \frac{U_n W_n}{U_n + V_n}$

or $W_n \geq 0$, $U_n \rangle 0$ et $V_n \rangle 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$

b) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n = -\frac{V_n - U_n}{2} = \frac{W_n}{2} \leq 0$ car $W_n \geq 0$ d'où $V_{n+1} - V_n \leq 0$

c) on a $U_0 . V_0 = 2$

Supposons que $U_n . V_n = 2$ *et* Montrons que $U_{n+1} V_{n+1} = 2$

$U_{n+1} . V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \times \frac{1}{2}(U_n + V_n) = U_n V_n = 2$

donc d'après le principe de récurrence $n \forall \in IN$, $U_n V_n = 2$ est une constante.

d) $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} V_n = \ell$ et $U_n V_n = 2$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n V_n = 2$

Soit $\ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$ or $\ell = -\sqrt{2}$ or $U_n \rangle 0 \Rightarrow \ell \rangle 0$ d'où $\ell = \sqrt{2}$

e) $U_0 = \frac{2U_0 V_0}{U_0 V_0} = \frac{4}{3}$ et $V_1 = \frac{1}{2}(U_0 + V_0) = \frac{3}{2}$

$U_2 = \frac{2U_1 V_1}{U_1 + V_1} = \frac{24}{17}$ et $V_2 = \frac{1}{2}(U_1 + V_1) = \frac{17}{12}$

$U_3 = \frac{816}{577}$ et $V_3 = \frac{577}{408}$; $U_4 = \frac{941664}{665857}$ et $V_4 = \frac{665857}{470832}$

$U_n \langle \sqrt{2} = \ell \langle V_n$ car U_n est croissante et V_n est décroissante ;

$U_4 \simeq 1,414231562371$

$V_4 \simeq 1,414213562374$ *or* $U_4 \langle \sqrt{2} \langle V_4$

d'où $1,414231562371 \langle \sqrt{2} \langle 1,414213562374$

11

1) $U_{n+1} - 3 = \dfrac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \dfrac{-3U_n + 9}{2U_n}$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$$

❖Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

◆Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$

◆Supposons que $U_n > 0$,montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 9}{2U_n} > 0$ car $U_n > 0$

◆*Conclusion:* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

donc $\dfrac{-3}{2U_n} < 0$ et comme on a : $U_{n+1} - 3 = \dfrac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$

donc $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signe contraire.

❖Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

◆Pour $p = 0$; $U_0 = 1$ et $U_1 = 6$ donc on a : $U_0 \leq 3 \leq U_1$

◆Soit $p \in \mathbb{N}$,supposons que $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$ et montrons que $U_{2p+2} \leq 3 \leq U_{2p+3}$.

On a : $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signes contraires donc pour $n = 2p + 1$ on a : $U_{2p+2} - 3$ et $U_{2p+1} - 3$ sont de signe contraire

Or $U_{2p+1} - 3 \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$U_{2p+2} - 3 \leq 0$ et par suite $U_{2p+2} \leq 3$.

De même pour $n = 2p + 2$ on a $U_{2p+3} - 3$ et $U_{2p+2} - 3$ sont de signe contraire or $U_{2p+2} - 3 \leq 0$ donc $U_{2p+3} - 3 \geq 0$.

C'est-à-dire $3 \leq U_{2p+3}$ d'où $U_{2p+2} \leq 3 \leq U_{2p+3}$.

◆Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

2) Si (U_n) converge vers ℓ alors (U_{2p}) converge vers ℓ et (U_{2p+1}) converge vers ℓ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$

d'où $\ell \leq 3 \leq \ell$ donc $\ell = 3$

3) On a $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$

❖ Si n est impair, $U_n = U_{2p+1} \geq 3 > 2$ donc $U_{2p+1} \geq 2$

❖ Si n est pair, $U_n = U_{2p}$, montrons par récurrence que $U_{2p} \geq 2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

❖ Pour $p = 1$, $U_2 = \dfrac{3U_1 + 9}{2U_1}$ or $U_1 = \dfrac{3U_0 + 9}{2U_0} = 6$ donc $U_2 = \dfrac{9}{4} > 2$ vrai

❖ Supposons que $U_{2p} \geq 2$, montrons que $U_{2p+2} \geq 2$

$$U_{2p+2} - 2 = \frac{3U_{2p+1} + 9}{2U_{2p+1}} - 2 = \frac{3U_{2p+1} + 9 - 4U_{2p+1}}{2U_{2p+1}} = \frac{-U_{2p+1} + 9}{2U_{2p+1}}$$

$$= \frac{-\dfrac{3U_{2p} + 9}{2U_{2p}} + 9}{2 \cdot \dfrac{3U_{2p} + 9}{2U_{2p}}} = \frac{-\dfrac{3U_{2p} - 9 - 18U_{2p}}{2U_{2p}}}{\dfrac{6U_{2p} + 18}{2U_{2p}}} = \frac{15U_{2p} - 9}{6U_{2p} + 18}$$

On a : $U_{2p} \geq 2 \Leftrightarrow 15U_{2p} \geq 30 \Leftrightarrow 15U_{2p} - 9 \geq 21 > 0$

de même $U_{2p} \geq 2 \quad \Leftrightarrow 6U_{2p} \geq 12 \quad \Leftrightarrow 6U_{2p} + 18 \geq 30 > 0$

donc $U_{2p+2} - 2 \geq 0$ et par suite $U_{2p+2} \geq 2$

❖ *Conclusion :* Pour tout $p \in \mathbb{N}^*, U_{2p} \geq 2$.

On a : $U_{2p+1} \geq 2$ et $U_{2p} \geq 2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

donc $U_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrons que pour tout $n \geq 2$ on a : $|U_n - 3| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

❖pour $n=2$, $|U_2-3|=\left|\frac{9}{4}-3\right|=\frac{3}{4}$ donc $|U_2-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^0=1$ vrai

On suppose que $|U_n-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ et montrons que $|U_{n+1}-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

$$|U_{n+1}-3|=\left|\frac{3U_n+9}{2U_n}-3\right|=\left|\frac{-3U_n+9}{2U_n}\right|=\left|\frac{-3}{2U_n}(U_n-3)\right|=\frac{3}{2U_n}|U_n-3|.$$

On a: $U_n\ge 2\Leftrightarrow 2U_n\ge 4\Leftrightarrow\frac{1}{2U_n}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2U_n}\le\frac{3}{4}$

d'où $|U_{n+1}-3|=\frac{3}{2U_n}|U_n-3|\le\frac{3}{4}\times|U_n-3|\le\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

et par suite $|U_{n+1}-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.*Conclusion* $|U_n-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ pour tout $n\ge 2$.

5) On a $|U_n-3|\le\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-3)=0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=3$

12 a) ζ_f et ζ_g se rapproche indéfiniment lorsque on prend des grands valeurs donc la conjonction est que $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

b) On a $A_n\in\zeta_f\Rightarrow A_n(n, f(n))$ et $B_n\in\zeta_f\Rightarrow B_n(n, g(n))$

donc $U_n=A_nB_n=\sqrt{(f(x)-g(x))^2}=|f(n)-g(n)|$ Comme ζ_g est au dessous du ζ_f

Donc $U_n=g(n)-f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

c) On sait que $n+1>n\Leftrightarrow\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n}$

Soit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$ Par suite $0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

13 1) a) * f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR et $f'(x)=1+2x+3x^2+\ldots+xx^{n-1}$

* g est une fonction rationnelle donc dérivable sur IR – {1}

et $g'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n.(1-x)+(1+-x^{n+1})}{(1-x)^2}$ d'où $g'(x)= \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

b) $f(x) = 1+ x +\ldots+ x^n$ c'est la sommation des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = x$ pour $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Donc $\forall x \neq 1, f(x) = g(x)$ par suite $f'(x) = g'(x)$

Donc pour tout $a \neq 1$, $f'(a) = g'(a)$

Soit $1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}=\dfrac{na^{n+1} - (n+1)a^{n+1}}{(1-a)^2}1$

2) a) A_n l'aire total de la figure $=1 + 2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\times\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^2 +\ldots.+ n.\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=1+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{4^2}+\ldots..+n\times\dfrac{1}{4^{n-1}}=1 + 2 \times\dfrac{1}{4}+ 3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 +\ldots+ n.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

On remarque que $A_n = f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ Comme $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=g'\left(\dfrac{1}{4}\right)$

Alors $A_n = \dfrac{b.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} - (b+1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n +1}{\left(\dfrac{1}{4}-1\right)^2}$ $\quad A_n = \dfrac{16}{9}\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left(\dfrac{n}{4}-n-1\right)+1\right]$

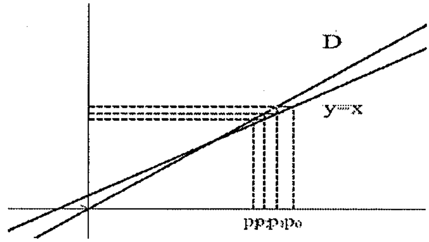
$A_n = \dfrac{16}{9}\left[-\dfrac{3}{4}.\dfrac{n}{4^n}-\dfrac{1}{4^n}+1\right]$ d'où $A_n = -\dfrac{4}{3}.\dfrac{n}{4^n}-\dfrac{16}{9}.\dfrac{1}{4^n}+\dfrac{16}{9}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{4n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}\in]-1,1[$ Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{4}{3}.\dfrac{n}{4^n}-\dfrac{16}{9}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\dfrac{16}{9}=\dfrac{16}{9}$

14

1) p_0 =1000 et puisque 20% disparaissent des animaux chaque années il on reste 80%.

Et comme n et n+1 sont deux années successives et puisqu'on introduit 120 animaux supplémentaires alors $P_{n+1}= 0,8\, P_n +120$



2) on trace la droite $y = x$ et la droite $y = 0,8\,x+120$

Le graphique nous persuade que la suite (P_n) semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites ($y = x$ et $y = 0,8\,x +120$)

$x = 0,8\,x +120 \Leftrightarrow x = 600$ alors la suite (P_n) semble converger vers 600.

3) a) $V_n = P_n - 600$ Alors $V_{n+1} = P_{n+1} - 600 = 0,8\,P_n + 120 - 600$ Donc $V_{n+1} = 0,8V_n$

Par suite (V_n) est une suite géométrique de raison (0,8) .

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ car (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8 \in]-1,1[$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + 600 = 600$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$ et $V_n = P_n - 600$

4) l'effectif de la population se stabilise sur la valeur 600 cette stabilisation est relativement rapide puisque $u_{10} = 643$ et $u_{20} = 605$ et $u_{30} = 600$

15

1) a) le 3 janvier 2000, la somme disponible correspond à la somme versée le 1er janvier 1999 augmentée de ses intérêts et à la somme versée le 1er janvier 2000 soit $600\text{ D} \times \left(1+\dfrac{3}{100}\right) + 600\text{D}$

La somme disponible le 3 janvier 2000 est 1218 dinars

b) Le 3 janvier 2001 la somme disponible correspond à la somme disponible augmentée le 3 janvier 2000augmentée de ses intérêts pour l'année 2000 et à la somme versée le 1er janvier 2001 soit $1218\text{D} \times 1.03 + 600\text{D}$

La somme disponible le 3 janvier 2001est 1854,54 dinars.

2) La somme u_{n+1} disponible le 3 janvier de l'année 1999 +n +1 correspond à la somme disponible le 3 janvier de l'année 1999 + n augmenté de ses intérêts pour cette année et de la somme versée le 1er janvier de l'année 1999 +n +1.

On a bien $u_{n+1} = 1,03u_n + 600$.

3) a) Pour tout entier naturel n, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} + 20\,000 = 1,03u_n + 600 + 20\,000 = 1,03u_n + 20\,600 = 1,03\,(u_n + 20\,000)$.

On a $v_{n+1} = 1,03\,v$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,03 .

Son premier terme est $v_0 = u_0 + 20000 = 20600$.

b) On a $v_n = v_0 \times 1,03^n = 20600 \times 1,03^n$

et $u_n = v_n - 20000 = 20\,600 \times 1,03^n - 20000$

4) La somme dont Ali aurait pu disposer le 3 janvier 2029 est u_{30} soit environ 30001, 61 dinars.

Les Cahiers des Mathématiques

كراس الرياضيات

Exercices corrigés

pour s'entraîner toute l'année

تمارين وحلول

Proposent pour chacune des notions fondamentales du programme:

> Des rappels de cours
> Des exercices progressifs et classés par thèmes couvrant la totalité du programme
> Tous les corrigés des exercices et des problèmes détaillés et commentés.

هذه المجموعة مقترحة لمعالجة كلّ المعطيات الأساسية المبرمجة:

> ملخّصات شاملة ومركّزة لجميع الدروس
> تمارين متدرّجة ومنتظمة حسب المحاور وتهمّ كلّ البرامج
> فروض مراقبة وتأليفية مقترحة تمكّن التلميذ من تقييم مكتسباته
> إصلاح لكلّ التمارين والمسائل الرياضية إصلاحا مفصّلا ومحلّلا.

Prix 7D.800

كنوز للنشر والتوزيع

www.Kounouz-Edition.Com

9 789973 879073

ISBN: 9973 - 879 - 07 - 4