# Bac sciences ex

**Page No.**

| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION 2020 | **Session principale** | |
|---|---|---|
| | Épreuve : **Mathématiques** | Section : **Sciences expérimentales** |
| | Durée : **3h** | Coefficient de l'épreuve: **3** |

*Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie*

## Exercice 1 : (3 points)

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une population en trois catégories, selon l'indice de masse corporelle (IMC) exprimé en $kg/m^2$.

| Catégorie | (IMC < 25) Personnes de poids normal | (25 ≤ IMC < 30) Personnes en surpoids | (IMC ≥ 30) Personnes obèses |
|---|---|---|---|
| Pourcentage | 50% | 30% | 20% |

Une étude a montré que :

- 3% des personnes de poids normal sont diabétiques.
- 7% des personnes en surpoids sont diabétiques.
- 9 % des personnes obèses sont diabétiques.

On choisit au hasard une personne de cette population et on considère les événements suivants :

A : « La personne choisie est de poids normal ».

B : « La personne choisie est en surpoids ».

C : « La personne choisie est obèse ».

D : « La personne choisie est diabétique ».

1) a) Déterminer $p(A \cap D)$ , $p(B \cap D)$ et $p(C \cap D)$.

b) Montrer que $p(D) = 0.054$.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie ne soit pas de poids normal sachant qu'elle est diabétique. (On donnera le résultat arrondi à $10^{-3}$)

2) On choisit, au hasard, n personnes de cette même population. On désigne par $p_n$ la probabilité qu'aucune personne n'est diabétique.

a) Exprimer $p_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ .

b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n \leq 0.1$ .

## Exercice 2 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la **figure de l'annexe ci-jointe** ( page 4/4 ), on a placé les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \frac{1}{2} z_A^2$ , ainsi que le milieu I du segment $[AB]$.

1) a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes $z_A$ et $z_B$.

b) Vérifier que l'affixe du point I est $z_I = (\frac{1+\sqrt{3}}{2})(1+i)$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2(1+\sqrt{3})(1+i) = 0$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives $z$ et $\frac{1}{2}z^2$ où $z$ est un nombre complexe non nul et différent de 2.

a) Montrer que le point I est le milieu de $[MN]$, si et seulement si, z est une solution de (E).

b) Justifier que $z_A$ est une solution de (E).

3) Soit $z_C$ la deuxième solution de (E), C le point d'affixe $z_C$ et K le point d'affixe $(-2)$.

a) Donner la valeur de $z_A + z_C$.

b) Montrer que le quadrilatère OAKC est un parallélogramme. Construire alors le point C.

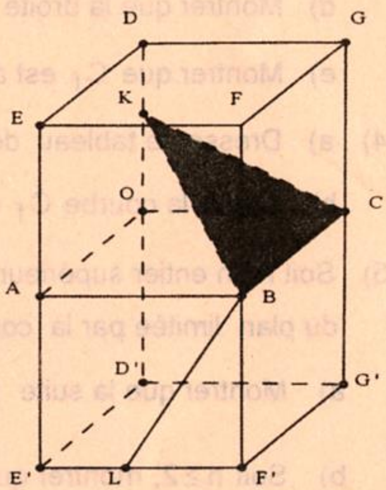
c) Soit le point D d'affixe $z_D = \frac{1}{2}z_C^2$. Construire dans l'annexe le point D.

4) a) Ecrire $(1+i)$ sous forme exponentielle. En déduire que $z_A \cdot z_C = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

b) Montrer que les points O, A et D sont alignés.

## Exercice 3 : (5 points)

Dans la figure ci-contre, OABCDEFG et OABCD'E'F'G' sont deux cubes identiques d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{OK} = a\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{E'L} = (1-a)\overrightarrow{OC}$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.




1) a) Donner les coordonnées des points C, B, F et K.

b) Montrer que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

c) Calculer le volume du tétraèdre FBCK.

2) Soit P le plan ( BCK).

Montrer qu'une équation de P est $ay + z - a = 0$.

3) a) Donner les coordonnées de E'. En déduire que $L(1, 1-a, -1)$.

b) Montrer que B est le projeté orthogonal du point L sur le plan P.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2(a-1)y + 2z + 1 - 2a = 0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre L est de rayon $R = \sqrt{2+a^2}$

b) Montrer que (S) et P se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

## Exercice 4 : (7 points)

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + e^{-x}$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a dressé ci-contre, le tableau de variation de **g' la fonction dérivée** de g.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\beta$ et vérifier que $0.3 < \beta < 0.4$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Dans la suite**, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ et $f'(x)$ ont même signe.

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{e^{-x}}{f(x) + x}$.

d) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que $C_f$ est au-dessus de la droite $\Delta$.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe $C_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\beta \simeq 0.35$)

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $a_n$ l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b) Soit $n \geq 2$, montrer que pour tout $x \in [1, n]$, $\dfrac{e^{-x}}{n + f(n)} \leq f(x) - x \leq \dfrac{e^{-x}}{1 + f(1)}$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{e^{-1} - e^{-n}}{n + f(n)} \leq a_n \leq \dfrac{e^{-1} - e^{-n}}{1 + f(1)}$.

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

6) a) Déterminer une valeur approchée à $10^{-4}$ de chacun des nombres $\dfrac{e^{-1} - e^{-2}}{2 + f(2)}$ et $\dfrac{e^{-1}}{1 + f(1)}$.

b) On note $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Montrer que $0.05 < L < 0.17$.

Section : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . N° d'inscription : . . . . . . . . . . . . . . . Série : . . . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

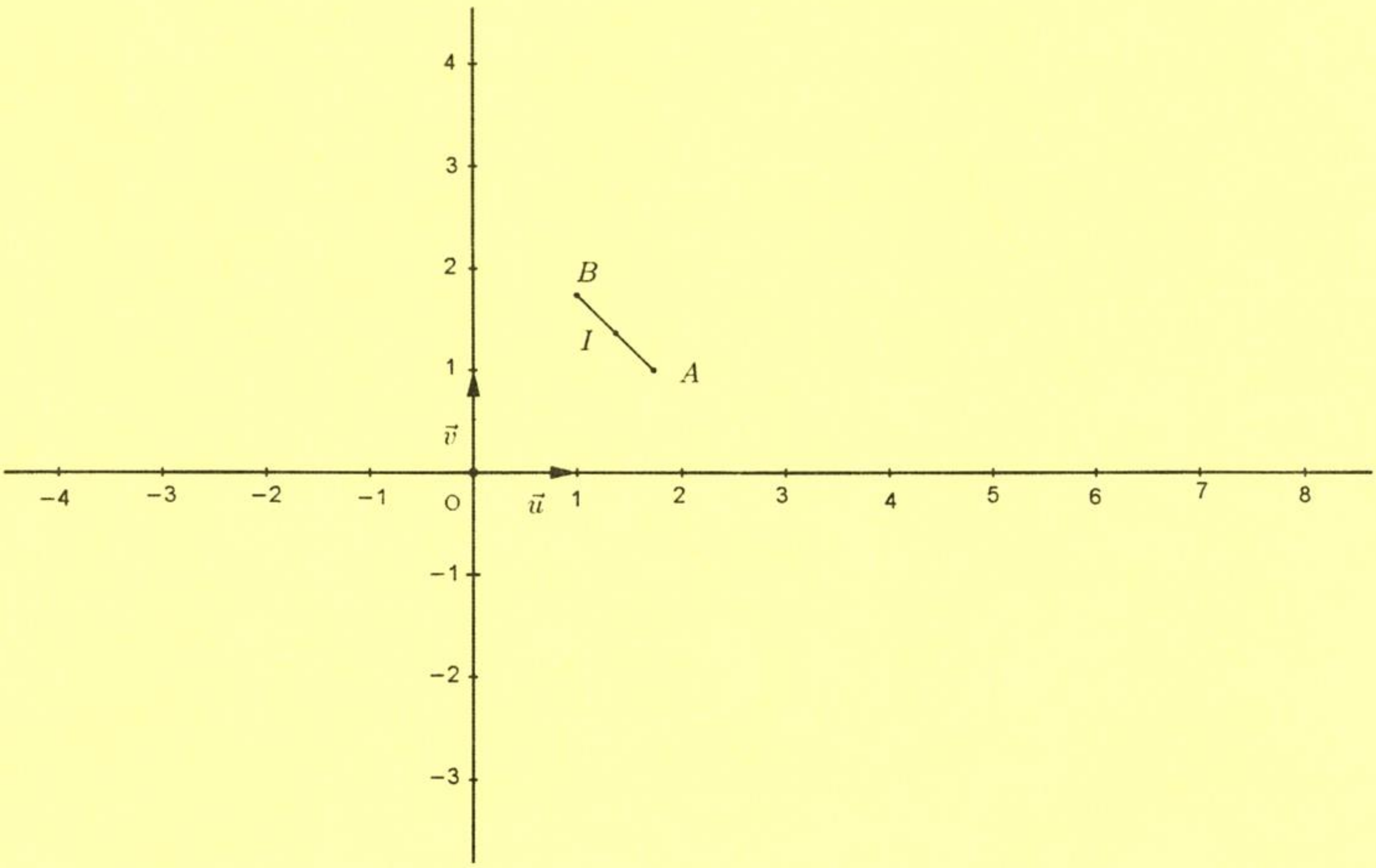
Date et lieu de naissance : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Signatures des surveillants

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales**
**Session principale (2020)**
**Annexe à rendre avec la copie**



| | | |
|---|---|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION**<br>**EXAMEN DU BACCALAURÉAT**<br>SESSION **2019** | **Session principale** | |
| | Épreuve :<br>**Mathématiques** | Section :<br>**Sciences expérimentales** |
| | Durée : **3h** | Coefficient de l'épreuve: **3** |

*Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.*

*La page 4/4 est à remettre avec la copie*

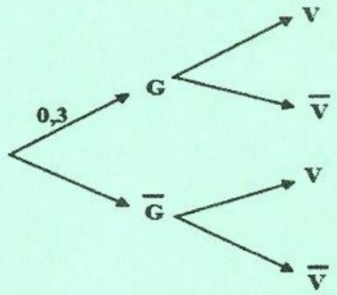
**Exercice 1 (4 points)**

Une étude statistique montre que dans une ville donnée, 15 % des individus âgés de moins de 60 ans et 80 % des individus âgés de plus de 60 ans ont été vaccinés contre la grippe.

Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30 % de la population de cette ville.

On choisit, au hasard, une personne de cette population et on considère les évènements suivants :

- G : " La personne est âgée de plus de 60 ans ".
- V : "La personne est vaccinée".




1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2) Montrer que la probabilité pour qu'une personne soit vaccinée est égale à 0,345.
3) La personne choisie étant vaccinée, quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans ?
4) On choisit au hasard 10 personnes âgées de plus de 60 ans. Calculer la probabilité pour que deux exactement d'entre elles soient vaccinées.
5) On choisit, au hasard, *n* personnes âgées de plus de 60 ans.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'aucune d'entre elles ne soit vaccinée ?
   b) Déterminer la probabilité $p_n$ pour que l'une au moins d'entre elles soit vaccinée.
   c) Déterminer la plus petite valeur de *n* pour que $p_n \geq 0,9$ .

**Exercice 2 (4 points)**

1) Soit le nombre complexe $a$ défini par $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$.

a) Montrer que $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

b) Donner les valeurs exactes de $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

2) a) Vérifier que $a^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$.

c) Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, **Γ** est le cercle trigonométrique et H est le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Placer les images des solutions de l'équation (E).

**Exercice 3 (5 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne

les points $A(-2,1,1)$, $B(-1,-1,0)$, $C(1,1,4)$, $H(0,0,2)$ et la droite $\Delta$

dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 2 \end{cases}$ ; $\alpha \in$ IR.

1) a) Montrer que les points A , B et C définissent un plan P.

b) Montrer qu'une équation de P est $x + y - z + 2 = 0$.

2) Soit le point E (2, 2, 0).

a) Vérifier que E n'appartient pas à P.

b) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

3) Montrer que la droite $\Delta$ est perpendiculaire au plan P en un point que l'on précisera.

4) Soit $\alpha \neq 0$ et M ( $\alpha$ ; $\alpha$ ; $-\alpha + 2$ ) un point de $\Delta$.

a) Calculer en fonction de $\alpha$ le volume du tétraèdre MABC.

b) En déduire les coordonnées des points M pour lesquels le volume du tétraèdre MABC est égal au double du volume du tétraèdre EABC.

**Exercice 4 (7 points)**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{2\left(x+\sqrt{x}\right)}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

d) Dresser le tableau de variations de $f$.

e) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

f) On désigne par $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

Montrer que pour tout $x\geq 0$, $f^{-1}(x)=(e^x-1)^2$.

2) Soit l'intervalle $I=\left[\dfrac{1}{4},1\right]$.

a) Montrer que pour tout $x\in I$, $f'(x)\leq\frac{2}{3}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans l'intervalle $I$ une unique solution $\alpha$ vérifiant $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

3) Dans ***la figure 2*** de l'annexe jointe, on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le réel $\alpha$ et la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.

a) Tracer dans ***la figure 2*** les courbes $C_f$ et $C_{f^{-1}}$, où $C_{f^{-1}}$ est la courbe représentative de la fonction $f^{-1}$. (On précisera les demi-tangentes en O ).

b) Calculer, en fonction de $\alpha$, l'aire de la partie du plan limitée par $C_f$, $C_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n). \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.

d) Soit la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par $v_n=f^{-1}(u_n)$.

Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

| | |
|---|---|
| Section : ……………… ……N° d'inscription : …………… Série :……. | Signatures des surveillants |
| Nom et Prénom : ………………………………………………………… | ………………………… |
| Date et lieu de naissance : ……………………… ………….……… | ………………………… |

**Epreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences expérimentales**
**(Session principale 2019)**

***Annexe (à rendre avec la copie)***

***Figure 1***

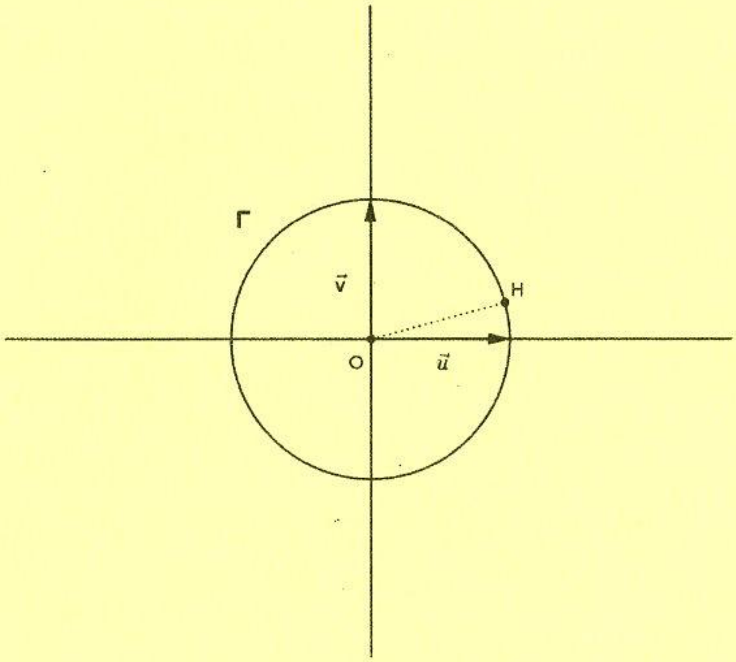
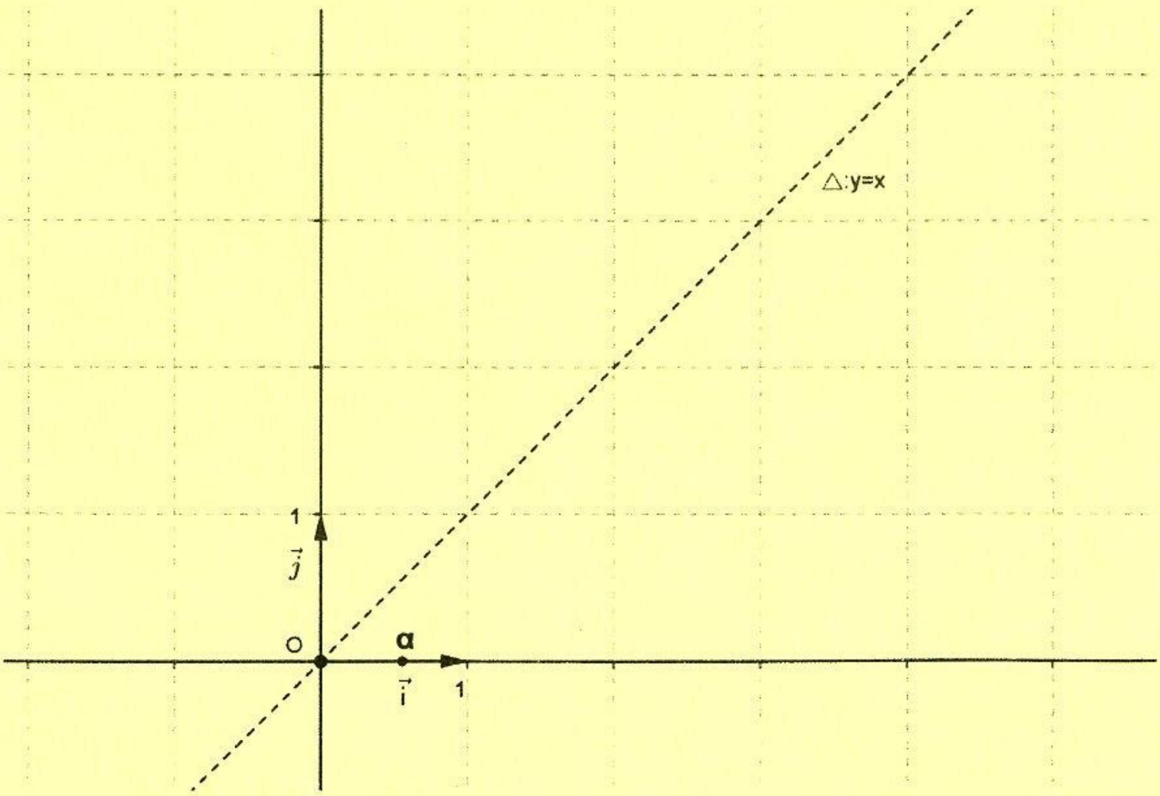


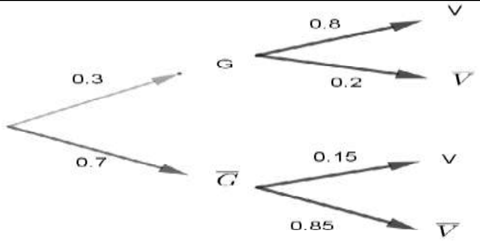

***Figure 2***



**Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale**

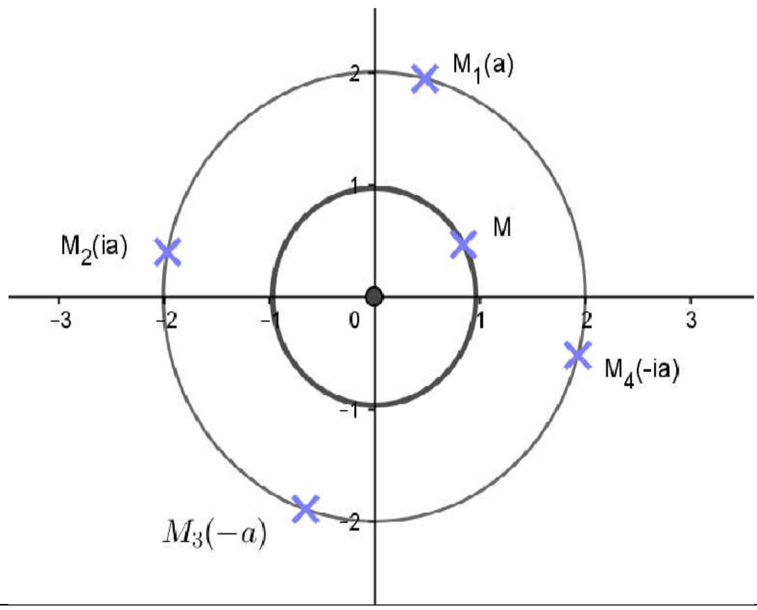
**Session principale**

## <u>Exercice 1</u> (4 points )

| Questions | Solution |
|---|---|
| 1) |  |
| 2) | $p(V)=p(V/G)p(G)+p(V/\overline{G})p(\overline{G})$<br>$=0.3\times0.8+0.7\times0.15=0.345$ |
| 3) | $p(\overline{G}/V)=\dfrac{p(\overline{G}\cap V)}{p(V)}=\dfrac{0.15\times0.7}{0.345}=0.304$ |
| 4) | $p=C_{10}^{2}\times(0.8)^2\times(0.2)^8=0.0000737$ |
| 5) a/ | La probabilité demandée est $(0.2)^n$ |
| b/ | $p_n=1-(0.2)^n$ |
| c/ | $p_n\geq0.9\Leftrightarrow1-(0.2)^n\geq0.9\Leftrightarrow(0.2)^n\leq0.1$<br>$\Leftrightarrow n\ln(0.2)\leq\ln(0.1)$<br>$\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)}\Leftrightarrow n\geq1.43$ alors le plus petit valeur est $n=2$ |

## <u>Exercice 2</u>( 4 points)

| Questions | solutions |
|---|---|
| **1)** a/ | $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$<br>on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc<br>$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ |
| b/ | on a : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1)$<br>$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$<br>et d’autre part on a $a=2e^{i\frac{5\pi}{12}}=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+2i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et par conséquent |

| | |
|---|---|
| | on aura $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$<br>Or on sait que $\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$ |
| 2) a/ | on a $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ donc $a^4 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4 = 16e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ . |
| b/ | b/ $z^4 = 8\left(1-i\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2-a^2\right)\left(z^2+a^2\right) = 0 \Leftrightarrow$<br>$(z-a)(z+a)(z+ia)(z-ia) = 0 \Leftrightarrow z = a$ , $z = -a$ , $z = ia$ et $z = -ia$ |
| **c/** | <br> |

## **<u>Exercice 3</u>** (5 points)

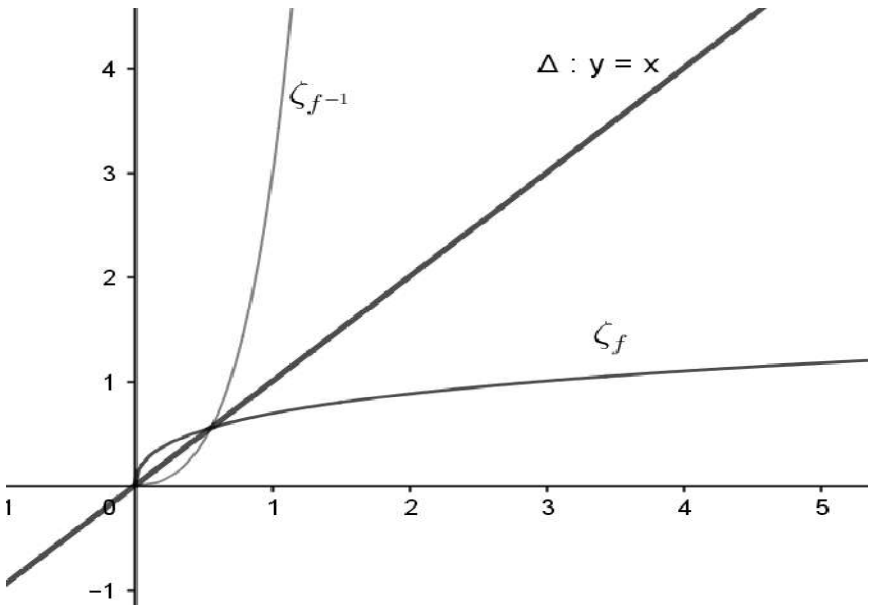
| **Questions** | **Solution** |
|---|---|
| 1) a/ | on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs<br>$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et alors les points $A$ , $B$ et C définissent un plan P. |
| b/ | $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc P a pour équation :<br>$-6x - 6y + 6z + d = 0$ et comme $A(-2,1,1) \in P$ donc $12 - 6 + 6 + d = 0$ donc<br>$d = -12$ et alors $P : -6x - 6y + 6z - 12 = 0$ alors P: $x + y - z + 2 = 0$ |

| | |
|---|---|
| 2) a/ | on a $2+2-0+2=6\neq 0$ donc $E\notin P$ |
| b/ | $V_{EABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|=6$ |
| 3) | $\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\Delta$ qui est un vecteur normal de P donc $\Delta\perp P$<br>$M\,(x\quad y\quad z)\in P\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow$<br>$\begin{cases}\alpha+\alpha-(-\alpha+2)+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\x=0\\y=0\\z=2\end{cases}$<br>Donc $P\cap\Delta=\{H\,(0,0,2)\}$ |
| 4) a/ | $\alpha\neq 0$ et $M\,(\alpha,\alpha,-\alpha+2)\in\Delta$<br>$V_{MABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha+2\\\alpha-1\\-\alpha+1\end{pmatrix}\right\|=\|3\alpha\|$ |
| b/ | $V_{MABC}=2\,V_{EABC}\Leftrightarrow\|3\alpha\|=12\Leftrightarrow\alpha=4$ ou $\alpha=-4$ donc<br>$M\,(4,4,-2)$ ou $M(-4,-4,6)$ |

**Exercice 4** ( 7 points )

| Questions | Solution |
|---|---|
| 1)<br>a/ | $f\,(x)=\ln(1+\sqrt{x})$<br>On a la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positif sur $[0,+\infty[$ alors la fonction $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a pour tout $x\in[0,+\infty[$ ,<br>$f\,'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$ |
| b/ | $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\,(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=(+\infty)\times 1=+\infty$<br>En effet<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ |

| | |
|---|---|
| | $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=1$<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc la courbe représentative de $f$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif |
| c/ | $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}.\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}=0\times 0=0$ En effet :<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}=0$<br>$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)}=0$<br>Donc la courbe représentative de $f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses. |
| d/ | <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f</td><td>0</td><td>$\nearrow$ $+\infty$</td></tr></table> |
| e/ | f est continu et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f\left([0,+\infty[\right)=[0,+\infty[$ . |
| f/ | soit $x\in[0,+\infty[$ $et$ $y\in[0,+\infty[$ tel que $f^{-1}(x)=y$<br>$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\ln(1+\sqrt{y})=x\Leftrightarrow 1+\sqrt{y}=e^x$<br>$\Leftrightarrow\sqrt{y}=e^x-1\Leftrightarrow y=\left(e^x-1\right)^2$ donc pour tout<br>$x\in[0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x)=\left(e^x-1\right)^2$ |
| 2)<br><br>a/ | $I=\left[\dfrac{1}{4},1\right]$<br>On a $\dfrac{1}{4}\le x\le 1$ donc $\dfrac{1}{2}\le\sqrt{x}\le 1$ donc $\dfrac{3}{4}\le x+\sqrt{x}\le 2$ donc<br>$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\le\dfrac{4}{3}$ d'ou $\dfrac{1}{4}\le f'(x)\le\dfrac{2}{3}$ soit donc pour tout $x\in I$ , $f'(x)\le\dfrac{2}{3}$ |
| b/ | On pose $u(x)=f(x)-x$<br>$u$ est dérivable sur $I$ et on a pour tout $x\in I$ $u'(x)=f'(x)-1\prec 0$ alors la fonction $u$ est strictement décroissante sur $I$ .<br>$u$ est continu et strictement décroissante sur $I$ alors elle réalise une bijection de $I$ sur $u(I)=\left[\ln 2-1,\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\right]=J$ et comme $0\in J$ alors l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $I$ .<br>De plus $u(0.5)\times u(0.6)\prec 0$ donc $0.5\prec\alpha\prec 0.6$ |

| | |
|---|---|
| | |
| 3) a/ |   |
| b/ | $A = 2\int_0^{\alpha}\left(x - f^{-1}(x)\right)dx = 2\int_0^{x} x - \left(e^{x}-1\right)^{2}dx = 2\int_0^{\alpha}(x - e^{2x} + 2e^{x} - 1)dx$<br>$= 2\left[\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{x} - x\right]_0^{\alpha}$<br>$= \alpha^{2} - e^{2\alpha} + 4e^{\alpha} - 2\alpha - 3$ |
| 4) a/ | on a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ donc vrais pour n= 0<br>Soit $n \in IN$ , supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$<br>On a $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$ et f est une fonction strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ alors<br>$f(\frac{1}{4}) \leq f(u_n) \leq f(1)$ donc $\frac{1}{4} \leq \ln(\frac{3}{2}) \leq u_{n+1} \leq \ln 2 \leq 1$ alors $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4},1\right]$<br>par suite pour tout $n \in IN$ $u_n \in \left[\frac{1}{4},1\right]$. |
| b/ | $f$ est dérivable sur $\left[\frac{1}{4},1\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{4},1\right]$ , $f'(x) \leq \frac{2}{3}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le faite que $u_n, \alpha \in I$ donc<br>$\lvert f(u_n) - f(\alpha)\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert u_n - \alpha\rvert \Leftrightarrow \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert u_n - \alpha\rvert$ et on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in IN$ $\lvert u_n - \alpha\rvert \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$<br>On a $\lvert u_0 - \alpha\rvert = \lvert 1 - \alpha\rvert \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 1$ donc la propriété est vraie pour n=0 |

| | |
|---|---|
| | Soit $n \in IN$ supposons que $\|u_n - \alpha\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $\|u_{n+1} - \alpha\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$<br>On sait que $\|u_{n+1} - \alpha\| \le \frac{2}{3}\|u_n - \alpha\|$ donc<br>$\|u_{n+1} - \alpha\| \le \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors $\|u_{n+1} - \alpha\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$<br>et par suite pour tout $n \in IN$ on a $\|u_n - \alpha\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ |
| c/ | c/ on a $\|u_n - \alpha\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$<br>donc la suite est convergente et converge vers $\alpha$ |
| d/ | on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ et $f^{-1}$ est continu en $\alpha$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha$ |

| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION 2019 | **Session de contrôle** | |
|---|---|---|
| | Épreuve : **Mathématiques** | Section : **Sciences expérimentales** |
| | Durée : **3h** | Coefficient de l'épreuve: **3** |

*Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.*

**Exercice 1 (4 points)**

*Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.*
*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

**1)** Une primitive de la fonction $f$ définie sur $]-\infty,0[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ est :

a) $F(x)=x+\ln(x)-1$ b) $F(x)=x+1+\ln(-x)$ c) $F(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

**2)** Soit $f$ une fonction strictement positive, paire et continue sur $[-1,1]$.

Soit $I=\int_0^1 f(x)dx$ , alors

a) $\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx=I^2$ b) $\int_0^{-1} f(x)dx=-I$ c) $\int_0^{-1} f(x)dx=I$

**3)** Soit la suite $(U_n)$ définie sur IN par $U_0=2$ et $U_{n+1}=2U_n^2$ . Alors

a) $(U_n)$ est géométrique b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\dfrac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

**4)** Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un sondage effectué dans une population de 100 individus.

| | Fumeurs | Non fumeurs |
|---|---|---|
| Hommes | 15 | 35 |
| Femmes | 10 | 40 |

i) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit un non fumeur sachant que c'est un homme est :

a) 0,7 b) 0,35 c) 0,66

ii) Si l'on interroge au hasard l'un d'entre eux, la probabilité que ce soit une femme non fumeur est :

a) 0,2 b) 0,8 c) 0,4

**Exercice 2 (4 points)**

**1)** a) Vérifier que $(3+2i)^2 = 5+12i$ .

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$ , l'équation $(E_1)$ : $z^2+iz+1+3i=0$ .

c) En déduire les solutions de l'équation $(E_2)$ : $z^2-iz+1-3i=0$ .

**2)** Déduire alors l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{C}$ , de l'équation

$(E): z^4+3z^2+6z+10=0$ .

**3)** Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1+2i ,1-2i , -1-i et -1+i .

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

b) Montrer que ABCD est un trapèze.

c) Calculer l'aire de ce trapèze.

**Exercice 3 (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$ .

On désigne par P le plan d'équation $x-2y+2z+1=0$.

**1)** a) Montrer que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon R = 2.

b) Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et P est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $K\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9}\right)$

et dont on déterminera le rayon r.

**2)** Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite $(K\Omega)$ est

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \; ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=-2+2t \end{cases} .$$

**3)** Soit $I(\alpha,\beta,\gamma)$ un point de la sphère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ le plan tangent en $I$ à $\mathcal{S}$.

a) Montrer qu'une équation du plan $\mathcal{Q}$ est

$$(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0 .$$

b) Vérifier que $N(-1,2,-6)$ est un point de $(K\Omega)$ .

c) Montrer alors que tous les plans $\mathcal{Q}$ tangents à $\mathcal{S}$ en un point de $\mathcal{C}$ passent par N.

**Exercice 4 (7 points)**

**1)** On considère la fonction $g$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}$ .

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)\ln(x+1) = 0$ .

b) Vérifier que pour tout $x > -1$, $g'(x) = \ln(x+1) + \frac{3}{2}$ .

c) Dresser le tableau de variations de $g$ .

d) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

**2)** On considère la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ .

On désigne par (**C**) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer la limite de f à droite en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$ , pour tout $x > -1$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

e) Construire la courbe (**C**). (On précisera la tangente au point O).

*Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier n≥1 ,* $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$ .

**3)** a) Vérifier que $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, pour tout $x \neq -1$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{1}{4}$ .

**4)** a) Vérifier que la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.

b) Montrer que $(n+2)I_{n+1} = -1 + 2\ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1)I_n$.

c) Préciser la valeur de $I_2$ et interpréter graphiquement cette valeur.

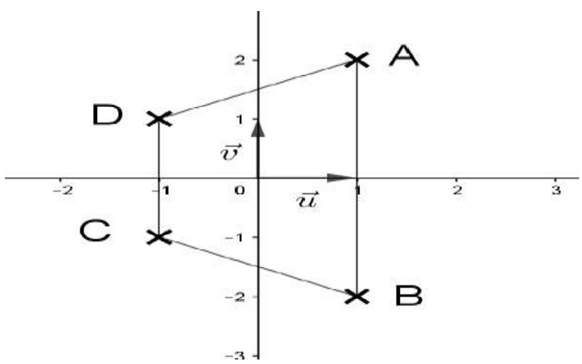
**Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale**

**Session contrôle**

**Exercice 1 ;**( 4 points )

| Questions | solutions |
|---|---|
| 1) | b/ |
| 2) | b/ |
| 3) | **c/** |
| 4) **i/** | **a/** |
| **ii/** | **c/** |

**Exercice 2** ( 4 points)

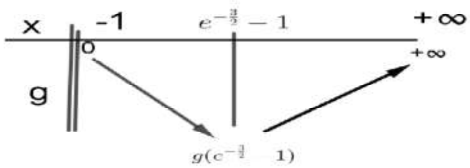
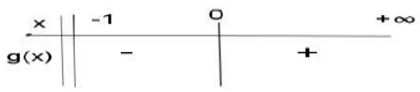
| Questions | Solutions |
|---|---|
| **1)** a/ | $(3+2i)^2 = 9+12i+(2i)^2 = 5+12i$ |
| b/ | $(E_1): z^2+iz+1+3i=0$<br>$\Delta = b^2-4ac = i^2-4(1+3i)$<br>$= -1-4-3i = -(5+12i) = [i(3+2i)]^2$<br>$z' = \dfrac{-i-i(3+2i)}{2} = -2i+1$<br>$z'' = \dfrac{-i+i(3+2i)}{2} = i-1$ |
| c/ | $(E_2): z^2-iz+1-3i=0$<br>$z^2-iz+1-3i=0 \Leftrightarrow \overline{z^2-iz+1-3i=0} \Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}+1+3i=0$<br>Alors si $z$ est solution de $(E_2)$ alors $\overline{z}$ est solution de $(E_1)$<br>Donc les solutions de $(E_2)$ sont $1+2i$ *et* -1-i |
| 2) | On a $(z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i) = z^4+3z^2+6z+10$ d'où<br>$z^4+3z^2+6z+10=0 \Leftrightarrow (z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i)=0$<br>$\Leftrightarrow z^2-iz+1-3i=0$ ou $z^2+iz+1+3i=0$<br>$\Leftrightarrow z=1+2i$ ou z = -1-i ou $z=1-2i$ ou $z=-1+i$ |
| 3) a/ |  |
| b/ | $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1-2i-1-2i = -4i$<br>$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -1-i+1-i = -2i$<br>Alors $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{DC}}} = 2 \in IR$ alors $(AB) \parallel (DC)$ ainsi ABCD est un trapèze |
| c/ | $A = \dfrac{(AB+DC)\times h}{2} = 6$ u a |

**Exercice 3** (5 points)

| Questions | Solution |
|---|---|
| 1) a/ | $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$<br>$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+4z)+5=0$<br>$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+2)^2-4+5=0$<br>$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=2^2$<br>Donc $S$ est une sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon R = 2 |
| b/ | $d(\Omega,P)=\dfrac{\lvert 1+2-2+1\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}\prec R=2$<br>Donc $S\cap P$ est un cercle de centre $K(a,b,c)$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$<br>$on\ a\begin{cases}\overrightarrow{\Omega K}=\alpha\overrightarrow{n_P}\\ K\in p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=\alpha\\ b+2=-2\alpha\\ c+2=2\alpha\\ a-2b+2c+1=0\end{cases}$<br>$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha+1\\ b=-2\alpha-2\\ c=2\alpha-2\\ \alpha+1-2(-2\alpha-2)+2(2\alpha-2)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{9}\\ b=-\dfrac{14}{9}\\ c=-\dfrac{22}{9}\\ \alpha=-\dfrac{2}{9}\end{cases}$<br>Alors $K(\dfrac{7}{9},-\dfrac{14}{9},-\dfrac{22}{9})$ |
| 2) | $(K\Omega)$ est une droite qui passe par $\Omega(1,-2,-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ ($\overrightarrow{n_P}$ est un vecteur normal à P)<br>$M(x,y,z)\in(K\Omega)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=t\ \overrightarrow{n_p},\ t\in IR\ \Leftrightarrow\begin{cases}x-1=t\\ y+2=-2t\\ z+2=t\end{cases}$<br>Donc $(K\Omega):\begin{cases}x=1+t\\ y=-2-2t\ ,\ t\in IR\\ z=-2+2t\end{cases}$ |
| 3)<br><br>a/ | $Q$ est le plan tangent à $S$ au point $I(\alpha,\beta,\gamma)$ donc $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+2\\ \gamma+2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $Q$<br>donc<br>$Q:(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z+d=0$ or $I(\alpha,\beta,\gamma)\in Q$ donc<br>$(\alpha-1)\alpha+(\beta+2)\beta+(\gamma+2)\gamma+d=0$<br>$\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$<br>Et le faite que le point $I\in S$ alors |

| | |
|---|---|
| | $\alpha^2-2\alpha+\beta^2+4\beta+\gamma^2+4\gamma+5=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\alpha-4\beta-4\gamma-5$<br>donc on aura :<br>$\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$<br>$\Leftrightarrow d=-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$<br>$\Leftrightarrow d=-\left(2\alpha-4\beta-4\gamma-5\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$<br>$\Leftrightarrow d=-\alpha+2\beta+2\gamma+5$<br>Ainsi $Q\ :(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0$ |
| b/ | $N\left(-1,2,-6\right)$<br>On a $\begin{cases} -1=1+t \\ 2=-2-2t \\ -6=-2+2t \end{cases} \Rightarrow t=-2$ ainsi $N\left(-1,2,-6\right)\in\left(K\Omega\right)$ |
| c/ | I est un point du cercle (C) donc KI=2.<br>$\overrightarrow{I\Omega}\cdot\overrightarrow{IN}=KI^2-KN.K\Omega=0$<br>d'où N est point de Q. |

**<u>Exercice 4</u> (7 points)**

| Questions | Solution |
|---|---|
| 1) a/ | $g(x)=(x+1)\ln(x+1)+\dfrac{x}{2}$ et $x\in\left]-1,+\infty\right[$<br>On a $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\ln(x+1)=0$ |
| b/ | Pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ on a $g'(x)=\ln(x+1)+1+\dfrac{1}{2}=\ln(x+1)+\dfrac{3}{2}$ |
| c/ | $g'(x)=0\Leftrightarrow\ln(x+1)=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}-1$<br><br><br>$g(e^{-\frac{3}{2}}-1)=-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{3}{2}}\right)\prec 0$ |
| d/ | $g(0)=0$<br><br> |
| 2) a/ | Soit $f(x)=x^2\ln(x+1)$ pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x+1)=+\infty$<br>La représentation graphique de $f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. |
| b/ | $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x^2\ln(x+1)=-\infty$<br>En effet ; |

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$

*et* $\lim\limits_{x \to (-1)^+} x^2 = 1$

La droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale de la représentation graphique de $f$

c/

pour tout $x \in ]-1, +\infty[$ on a

$$f'(x) = 2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{2x}{x+1} g(x)$$

d/

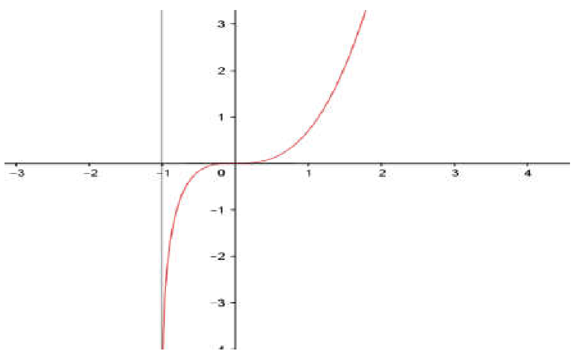
Déterminons le signe de $f'(x)$

| x | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | ‖ | - | 0 | + | |
| $\frac{2x}{x+1}$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$ | ‖ | + | 0 | + | |

Soit alors le tableau de variation de $f$

| x | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ | + | |
| f | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

e/




3) a/

Pour tout $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$

Pour tout $x \neq -1$ on a $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

b/

$I_1 = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$ On intègre par partie

$u(x) = \ln(x+1)$ $\quad$ $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

$v'(x) = x$ $\quad$ $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

| | |
|---|---|
| | $I_1=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$<br>Donc $=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$<br>$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1$<br>$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)=\frac{1}{4}$ |
| 4) a/ | On pose $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$<br>$h$ est une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a pour tout $x\in]-1,+\infty[$ ,<br>$h'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{(x+1)}-1=\ln(x+1)$ ainsi $h$ est une primitive de la fonction<br>$x\to\ln(x+1)$ sur $]-1,+\infty[$ |
| b/ | On va utiliser une intégration par partie<br>$\mathrm{I}_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx$ on pose<br>$u(x)=x^{n+1}$ $\quad$ $\mathrm{u'(x)}=(n+1)x^n$<br>$v'(x)=\ln(x+1)$ $\quad$ $\mathrm{v(x)}=h(x)$<br>$I_{n+1}=\left[x^{n+1}h(x)\right]_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n h(x)dx=2\ln 2-1-(n+1)\int_0^1 x^n\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]dx$<br>Donc $=2\ln 2-1-(n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx-(n+1)\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx+(n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx$<br>$=2\ln 2-1-(n+1)I_{n+1}-(n+1)I_n+\frac{n+1}{n+2}$<br>Ainsi on déduit que<br>$(n+2)I_{n+1}=-1+2\ln 2+\frac{n+1}{n+2}-(n+1)I_n$ |
| c/ | Pour $n=1$ on trouve $3I_2=-1+2\ln 2+\frac{2}{3}-2I_1$ alors on déduit que<br>$I_2=-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{6}=-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}\ln 2$<br>$I_2$ est l'aire de la partie du plan illimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respectuves x = 0 et x = 1 |

| | | |
|---|---|---|
| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>●●●●●<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION **2018** | ***Session principale*** | |
| | *Epreuve* :<br>**Mathématiques** | Section :<br>***Sciences expérimentales*** |
| | Durée : **3h** ◆ | Coefficient de l'épreuve : **3** |

***Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie***

## Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1/ Soit le plan Q d'équation $x+y+\sqrt{2}\,z-2=0$.

Montrer que le plan Q coupe les axes $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{k})$ respectivement aux points $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,\sqrt{2})$.

2/ Soit la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont tangents et déterminer leur point de contact.

3/ Soit a un réel strictement positif. On considère les points $M(a,0,0)$ et $N\left(0,\frac{4}{a},0\right)$.

Déterminer en fonction du réel a, les composantes du vecteur $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}$.

4/ a) Montrer qu'une équation du plan $(CMN)$ est $4x+a^2y+2a\sqrt{2}\,z-4a=0$.

b) Soit d la distance du point O au plan $(CMN)$. Montrer que $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$.

c) En déduire la valeur du réel a pour laquelle la distance d est maximale.

5/ a) Montrer que pour tout réel $a>0$, le volume du tétraèdre OCMN est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) En déduire que pour tout réel $a>0$, l'aire du triangle CMN est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$.

c) Identifier les points M et N pour lesquels l'aire du triangle CMN est égale à $2\sqrt{2}$.

## Exercice 2 (3 points)

Dans un magasin, un jeu de hasard a été organisé comme suit : le client lance un dé cubique équilibré dont une face porte la lettre G, deux faces portent la lettre R et trois faces portent la lettre D.

- Si la face supérieure du dé porte G, le client reçoit un montant de 100 DT et le jeu s'arrête.
- Si la face supérieure du dé porte R, le client ne reçoit rien et le jeu s'arrête.
- Si la face supérieure du dé porte D, le client effectue un deuxième lancer : si la face supérieure du dé au deuxième lancer porte G, le client reçoit un montant de 50 DT et si la face supérieure du dé au deuxième lancer porte l'une des lettres R ou D, le client ne reçoit rien et le jeu s'arrête.

On considère les événements suivants :

$G_1$ :« Le client reçoit un montant de 100 DT » et $G_2$ :« Le client reçoit un montant de 50 DT ».

1/ a) Déterminer $p(G_1)$, la probabilité de l'événement $G_1$.

b) Montrer que $p(G_2) = \frac{1}{12}$.

c) En déduire que la probabilité qu'un client reçoit un montant non nul est égale à $\frac{1}{4}$.

2/ On désigne par X la variable aléatoire qui associe le montant reçu par un client lors de sa participation à ce jeu. (X prend la valeur 0 lorsque le client ne reçoit rien).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer E(X), le montant moyen à recevoir par un client.

3/ On suppose que 200 clients ont participé à ce jeu. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant reçu un montant non nul et E(Y) le nombre moyen de clients gagnants.

Déterminer, en justifiant, E(Y).

4/ Le gérant de ce magasin a prévu 1200 DT comme montant global à distribuer.

Le gérant a-t-il bien estimé ce montant ?

## Exercice 3 (5 points)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 - i\sqrt{3}\,z - 1 = 0$.

(On donnera les solutions sous forme exponentielle).

2/ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}\,z^3 - 18\,z^2 + 7i\sqrt{3}\,z + 3$.

a) Vérifier que $P(i\sqrt{3}) = 0$ et que $P(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 0$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{1}{z^4} \cdot P(z)$.

c) En déduire que les nombres $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i(\frac{2\pi}{3})}$.

a) Construire les points A ,B et C.

b) Construire le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et donner son affixe sous la forme cartésienne.

c) La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la droite (OD) au point E.

Déterminer l'affixe du point E.

## Exercice 4 (7 points)

Dans **la figure** de l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

$(\Gamma)$ est la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x-1-4\ln x$,

l'axe des ordonnées est une asymptote à $(\Gamma)$,

la droite $D: y = x$ est une direction asymptotique à $(\Gamma)$ au voisinage de $+\infty$,

la courbe $(\Gamma)$ admet une unique tangente horizontale au point d'abscisse 4,

la courbe $(\Gamma)$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en deux points d'abscisses respectives 1 et $\alpha$.

**A/** Déterminer graphiquement

1/ $u(1)$, $u(\alpha)$, $u'(4)$, $\lim\limits_{x\to0^+} u(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x}$.

2/ Les signes respectifs de $u(x)$ et $u'(x)$.

**B/** On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Vérifier que pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = e^{u(x)} - u(x)$.

b) Calculer $f(\alpha)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

e) Donner les branches infinies de la courbe (C).

2/ a) Vérifier que pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f'(x) = u'(x).\left(e^{u(x)} - 1\right)$.

b) Justifier que $f'(x) > 0$, si et seulement si, $x \in ]1,4[ \cup ]\alpha,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que pour tout réel x, $e^x - 2x > 0$.

b) Déduire la position relative de (C) et $(\Gamma)$.

c) Tracer dans l'annexe la courbe (C).

4/ On désigne par

$\mathcal{A}$ : l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = 0$,

$\mathcal{A}'$ : l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\Gamma)$ et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{A}' = 20\ln 5 - 12\ln 3 - 14$.

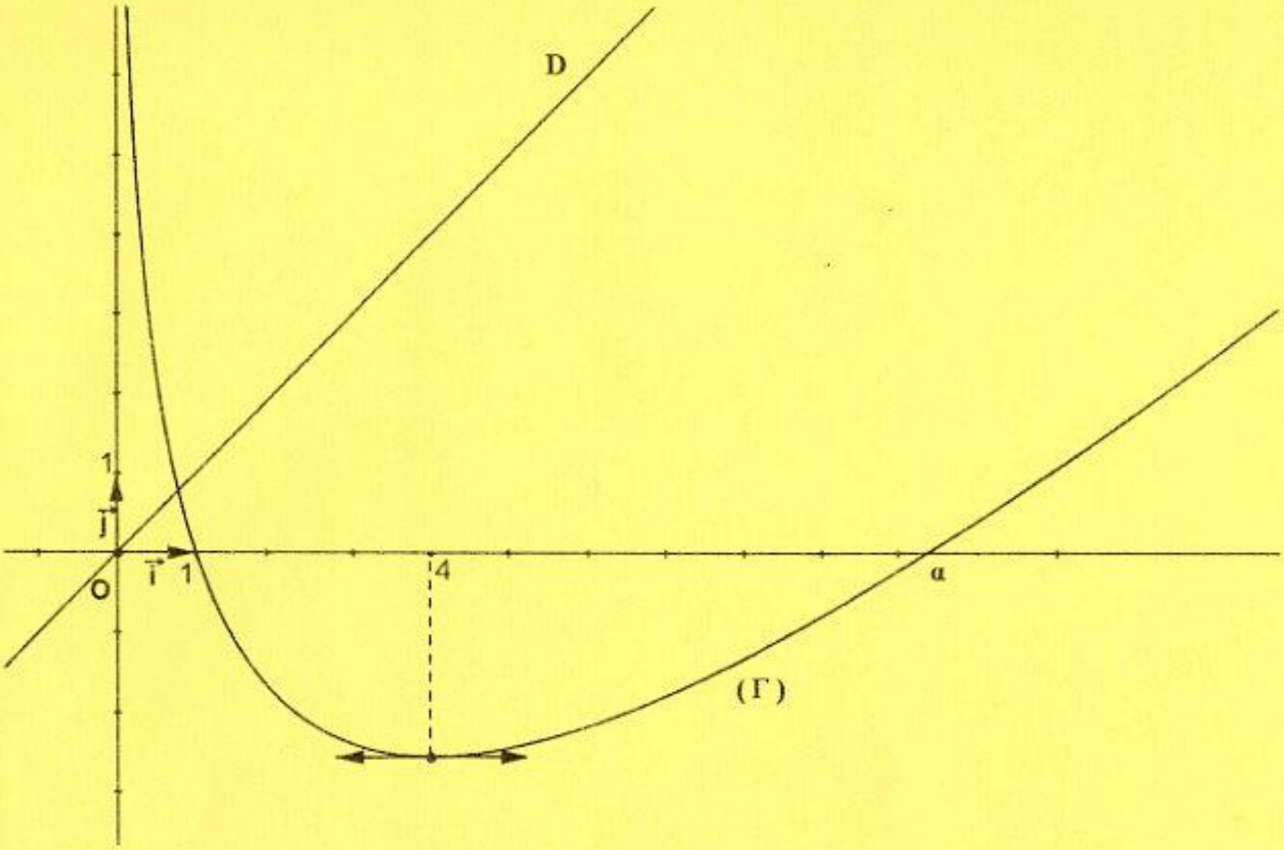
b) Montrer que $\mathcal{A}' < \mathcal{A} < 2f(4)$. En déduire que $5 < \mathcal{A} < 5,25$.

| | | |
|---|---|---|
| Section : .................... N° d'inscription : ............... Série : ....... | | Signatures des surveillants |
| Nom et Prénom : .................................................................... | | ................................ |
| Date et lieu de naissance : ...................................................... | | ................................ |

✂ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Épreuve: **Mathématiques** -Section: **Sciences expérimentales**-Session **principale (2018)**

**Annexe à rendre avec la copie**



# <u>Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences expérimentales)</u>

## <u>Session principale 2018</u>

## <u>Exercice n°1 :</u>

**De quoi s'agit-il ?**

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan , plan tangent à une sphère**
- **Volume d'un tétraèdre**

**1.** $A(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;0;0)$

$B(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;2;0)$

$C(x;y;z)\in Q\cap(O,\vec{k}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow B(0;0;\sqrt{2})$

**2.** Puisque $S: x^2+y^2+z^2=1$ donc S est la sphère de centre $O$ et de rayon 1

On a $d(O,Q)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1+2}}=1$ donc Q est tangent à la sphère S

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q

$M(x;y;z)\in Q\cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+\alpha \\ y=0+\alpha \\ z=0+\sqrt{2}\alpha \\ x+y+\sqrt{2}z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\sqrt{2}\alpha \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Conclusion : $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**3.** On a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}a\\0\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{4}{a}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}=\begin{vmatrix}0 & \frac{4}{a}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a & 0\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{4}{a}\end{vmatrix}\vec{k}=\frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{i}+\sqrt{2}a\vec{j}+4\vec{k}$

ainsi $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$

**4.** **a.** Puisque $\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{2}}{a}\\ \sqrt{2}a\\ 4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(CMN)$ donc une

équation du plan $(CMN)$ est $\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z+d=0$ et puisque

$C\left(0;0;\sqrt{2}\right)\in(CMN)$ donc $d=-4\sqrt{2}$ ainsi $(CMN):\frac{4\sqrt{2}}{a}x+\sqrt{2}ay+4z-4\sqrt{2}=0$

équivaut à $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

**b.** on a $(CMN):4x+a^2y+2a\sqrt{2}z-4a=0$

donc $d=d\left(O,(CMN)\right)=\frac{|-4a|}{\sqrt{16+a^4+8a^2}}=\frac{4a}{\sqrt{\left(4+a^2\right)}}=\frac{4a}{4+a^2}$

et puisque $1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=\frac{a^2+4-a^2+4a-4}{a^2+4}=\frac{4a}{4+a^2}$ donc $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$

**c.** On a $d=1-\frac{(a-2)^2}{a^2+4}$ est maximale lorsque $\frac{(a-2)^2}{a^2+4}=0$ donc $a=2$

**5.** **a.** on a $V(OCMN)=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CM}\wedge\overrightarrow{CN}\right).\overrightarrow{CO}\right|=\frac{1}{6}\left|4\sqrt{2}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**autrement :** $V(OCMN)=\frac{A(OMN)\times OC}{3}=\frac{a\times\frac{4}{a}\times\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**b.** On a $V(OCMN)=\frac{A(CMN)\times d}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}$

puisque $d\le 1$ donc $\frac{1}{d}\ge 1$ d'où $A(CMN)=\frac{2\sqrt{2}}{d}\ge 2\sqrt{2}$

**c.** on a $A(CMN)=2\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{2\sqrt{2}}{d}=2\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ d=1\ \Leftrightarrow\ a=2$ donc $M=A$ et $N=B$

## Exercice n°2 :

**De quoi s'agit-il ?**

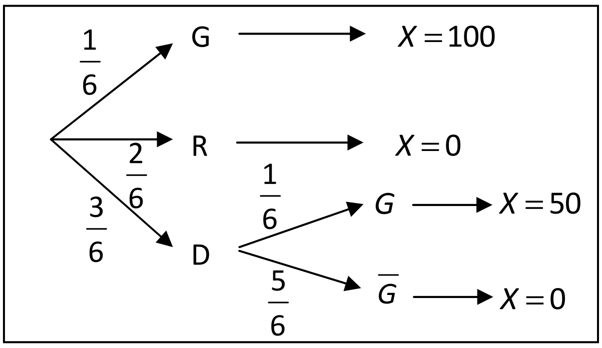
- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité total**
- **Variable aléatoire et espérance**
- **Loi Binomiale**

**1.**

**a.** On a $p(G_1)=\frac{1}{6}$

**b.** On a $p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

**c.** On a $p(G_1\cup G_2)=p(G_1)+p(G_2)-p(G_1\cap G_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-0=\frac{1}{4}$




**2.**

a. On a $X(E)=\{0;50;100\}$

$$p(X=0)=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}$$

**Autrement :** $p(X=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$p(X=50)=p(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$p(X=100)=p(G_1)=\frac{1}{6}$$

b. Le montant moyen à recevoir par un client est

$$E(X)=0+50\times\frac{1}{12}+100\times\frac{1}{6}=\frac{125}{6}=20,833DT$$

**3.** Y suit une loi binomiale de paramètre $n=200$ et $p=0,25$ alors $E(Y)=200\times0,25=50$

**4.** Le montant moyen qu'il doit prévoir de dépenser est $200\times E(X)=200\times\frac{250}{12}=4166,7$

## Exercice n°3:

**De quoi s'agit-il ?**

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

1. On a $(E): z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$

   Puisque $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 1$ donc

   $z' = \dfrac{i\sqrt{3}-1}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z'' = \dfrac{i\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2.
   a. On a $P\left(i\sqrt{3}\right) = 3\left(i\sqrt{3}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right)^3 - 18\left(i\sqrt{3}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(i\sqrt{3}\right) + 3$

   $$= 27 - 7i\sqrt{3}\left(-i3\sqrt{3}\right) + 18\times 3 - 21 + 3 = 27 - 63 + 54 - 21 + 3 = 0$$

   On a $P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 3\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 - 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 - 18\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + 7i\sqrt{3}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + 3$

   $$= 3e^{i\frac{4\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18e^{i\frac{2\pi}{3}} + 7i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 3$$

   $$= -3e^{i\frac{\pi}{3}} + 7i\sqrt{3} - 18\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$$

   $$= -3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 7i\sqrt{3} + 9 - 9i\sqrt{3} + \frac{7i\sqrt{3}}{2} - \frac{21}{2} + 3$$

   $$= -12 + 12 + i\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{7}{2}\right) = 0$$

   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ ,

   $$P\left(\frac{-1}{z}\right) = \frac{3}{z^4} + \frac{7i\sqrt{3}}{z^3} - \frac{18}{z^2} - \frac{7i\sqrt{3}}{z} + 3 = \frac{3 + 7i\sqrt{3}z - 18z^2 - 7i\sqrt{3}z^3 + 3z^4}{z^4} = \frac{P(z)}{z^4}$$

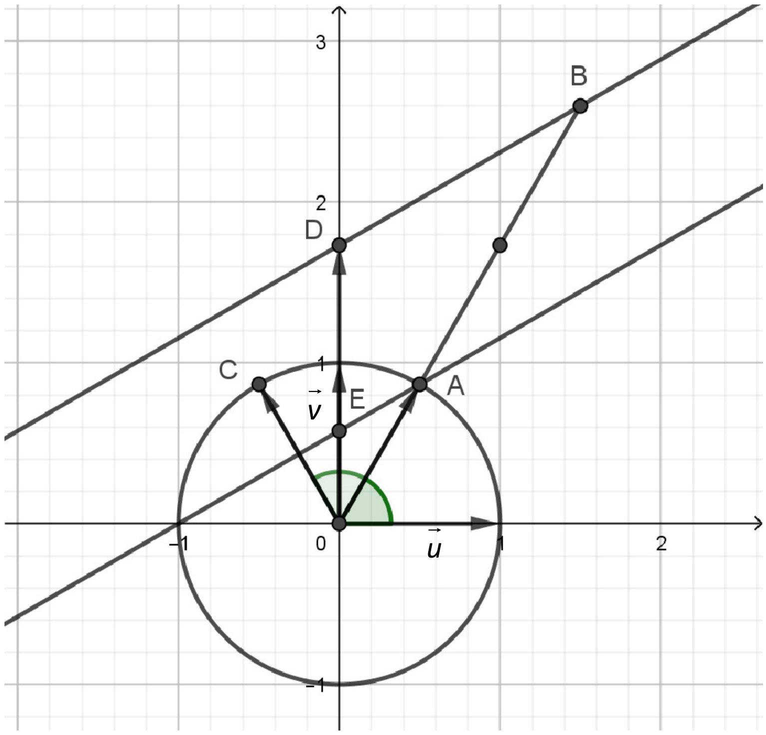
   c. On a $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\dfrac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}i}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\frac{3}{\sqrt{3}}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4 P\left(\sqrt{3}i\right) = 0$

   $$P\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(-e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 P\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

   d'où $\frac{\sqrt{3}}{3}i$ et $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$

3.

a.




b. On a $z_D = z_A + z_c = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

c. On a $aff\left(\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $aff\left(\overrightarrow{EA}\right) = z_A - z_E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - iy = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)$

$(AE)//(BD)$ donc $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - y \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

équivaut à $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $z_E = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

**Autrement :** dans le triangle OBD on a $(EA)//(BD)$ d'après Thales puisque

$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ ainsi $z_E = \frac{1}{3}z_D = \frac{i\sqrt{3}}{3}$

## Exercice n°4:

**De quoi s'agit-il ?**

- **Utiliser un graphique pour déterminer les images et les limites d'une fonction ainsi que le signe de sa fonction dérivée**
- **Fonction en exponentielle et ln ( limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires et encadrement**
- **Fonctions primitives**

**A.** **1.** On a $u(1)=0$ , $u(\alpha)=0$, $u'(4)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$ , $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$ et

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)}{x}=1$$

**2.**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**B.**

**1.** **a.** Pour tout $x\in \left]0;+\infty\right[$ ,

$$e^{u(x)}-u(x)=e^{x-1-4\ln x}-(x-1-4\ln x)=\frac{e^{x-1}}{e^{4\ln x}}-(x-1)+4\ln x=\frac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4\ln x=f(x)$$

**b.** On a $f(\alpha)=e^{u(\alpha)}-u(\alpha)=e^0-0=1$

**c.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{u(x)}-u(x)\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty\end{cases}$

**d.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^5}\right)e^{-1}-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+4\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$

**autrement :** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{u(x)}}{u(x)}\times\dfrac{u(x)}{x}-\dfrac{u(x)}{x}\right)+\infty$

**e.** La droite $\Delta: x=0$ est une asymptote à $(C)$

$(C)$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

**2.**

**a.** Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ , $f(x)=e^{u(x)}-u(x)$

$$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}-u'(x)=u'(x)\left[e^{u(x)}-1\right]$$

**b.** Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ , $f(x)=u'(x)\left(e^{u(x)}-1\right)$

On a $e^{u(x)}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{u(x)}\geq 1 \Leftrightarrow u(x)\geq 0$ d'où

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | ‖ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{u(x)}-1$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'où $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in\left]1;4\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$

**c.** Le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $f(4)$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**3.**

**a.** Soit $h(x)=e^{x}-2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ , et on a $h'(x)=e^{x}-2$

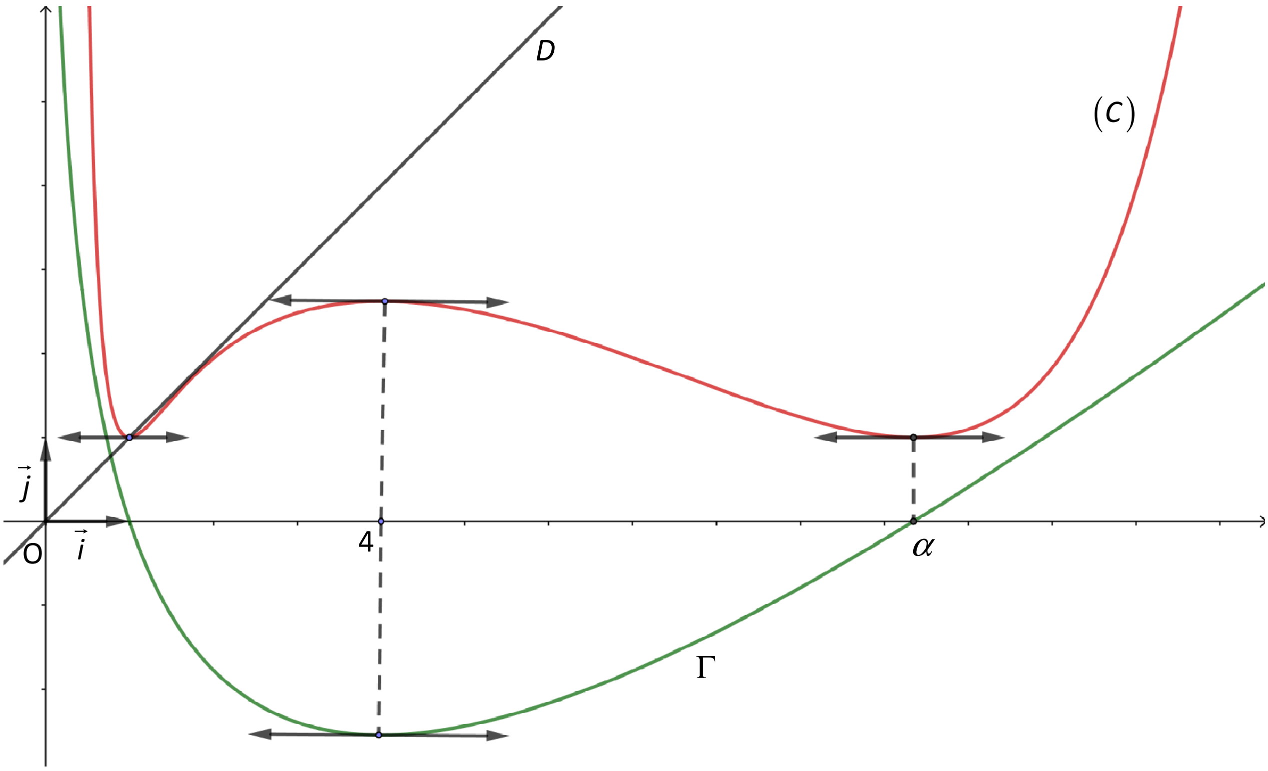
On a $h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$ d'où

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $h(\ln 2)$ | ↗ | $+\infty$ |

On a $h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$ donc $h(x)>0$ pour tout réel x

**b.** Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ on a $f(x)-u(x)=e^{u(x)}-2u(x)>0$ d'où $(C)$ est au dessus de $(\Gamma)$

**c.**



**4. a.** On a

$$A' = \int_3^5 |u(x)| dx = \int_3^5 -u(x) dx = \int_3^5 (-x+1+4\ln x) dx = \left[ -\frac{1}{2}x^2 + x + 4x\ln x - 4x \right]_3^5$$

$$= \left[ -\frac{1}{2}x^2 + 4x\ln x - 3x \right]_3^5 = \left( -\frac{25}{2} + 20\ln 5 - 15 \right) - \left( -\frac{9}{2} + 12\ln 3 - 9 \right) = 20\ln 5 - 12\ln - 14$$

**b.** On a pour tout $x \in [3;5]$ , $-u(x) < f(x) < f(4)$

d'où $\int_3^5 -u(x) dx < \int_3^5 f(x) dx < \int_3^5 f(4) dx$ donc $A' < A < 2f(4)$

or on a $A' \simeq 5{,}00541 > 5$ et $2f(4) \simeq 5{,}24 < 5{,}25$ d'où $5 < A < 5{,}25$

| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>●●●●●<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION **2018** | ***Session de contrôle*** | |
|---|---|---|
| | *Epreuve* :<br>**Mathématiques** | Section :<br>***Sciences expérimentales*** |
| | Durée : **3h** ◆ | Coefficient de l'épreuve: **3** |

***Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.***

## Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1/ a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCI.

2/ On désigne par P le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+y+2z-4=0$.

3/ Soit $(S)$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0$.

a) Montrer que $(S)$ est la sphère de centre I est de rayon $\sqrt{11}$.

b) Montrer que $P\cap(S)$ est un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon $\sqrt{5}$.

c) Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$.

En déduire les coordonnées du point H, centre de $(\mathcal{C})$.

4/ Soit a un réel et M le point défini par $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer à l'aide du réel a, les coordonnées du point M.

b) Montrer que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=(a-1)(11a+3)$.

c) En déduire que la droite $(AB)$ recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ au point E défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$.

d) Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre AECI est égal à $\frac{3}{11}\mathcal{V}$.

## Exercice 2 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, (C) et (C') sont deux cercles de même centre O et de rayons respectifs $\sqrt{3}$ et 3.

I) 1/On considère le point P d'affixe $p=\sqrt{2}+i$.

a) Vérifier que le point P appartient à (C).

b) Construire le point P.

c) On désigne par $\alpha$ un argument du nombre p. Donner l'écriture exponentielle de p.

2/Soit Q le point du cercle (C') tel que $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\right) \equiv \alpha[2\pi]$. On note q l'affixe du point Q .

a) Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OQ}\right)$.

b) Ecrire le nombre complexe q sous forme exponentielle.

c) En déduire que $p^2 = q$ puis que $q = 1+2\sqrt{2}\,i$.

II) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations

$(E): 16\,z^2-8z+9=0$ et $(E'): 16\,z^4-8z^2+9=0$.

1/ a) Montrer que les solutions de l'équation (E) sont les nombres $\frac{q}{4}$ et $\frac{\overline{q}}{4}$.

b) En déduire les solutions de l'équation $(E')$.

2/ a) Construire dans l'annexe les points images des solutions de l'équation (E').

b) Montrer que ces points sont les sommets d'un rectangle.

## Exercice 3 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 - x\,e^x$. On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

2/ a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\left(2-e^x\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $(\Gamma)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x+1$.

a) Montrer que la droite $\Delta$ est une tangente commune à $(C_f)$ et $(\Gamma)$ au point d'abscisse 0.

b) Justifier que pour tout réel x, $e^x - (x+1) \geq 0$.

4/ a) Vérifier que pour tout réel x, $e^x - f(x) = (x+1)\left(e^x - x - 1\right)$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $(x+1) - f(x) = x\left(e^x - x - 1\right)$.

c) Etudier la position relative de $(C_f)$ et $(\Gamma)$, puis de $(C_f)$ et $\Delta$.

5/ Tracer dans l'annexe, la courbe $(C_f)$.

6/ On désigne par A l'aire en (u .a) de la partie du plan limitée par les courbes $(C_f)$ et $(\Gamma)$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Montrer que $A = \frac{1}{e} - \frac{1}{3}$.

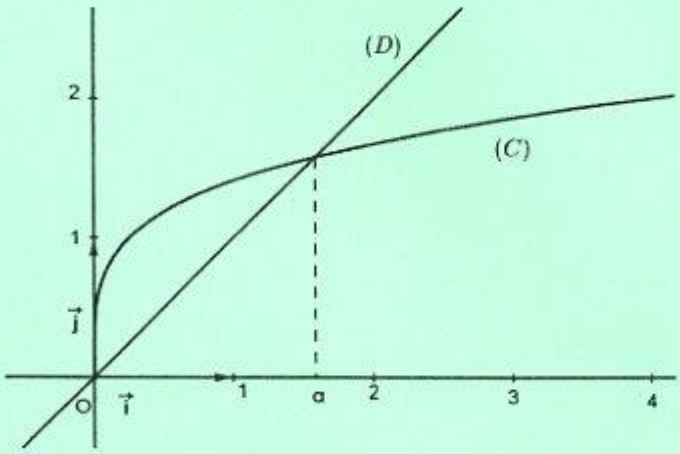
## Exercice 4 (4 points)

Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

(C) est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$g(x)=\sqrt[4]{4x}$,

la droite $(D)$ d'équation $y=x$ coupe la courbe (C) au point O et en un autre point d'abscisse $\alpha$.




1/ Vérifier que $\alpha=\sqrt[3]{4}$.

2/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on désigne par $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0=4, \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a) Classer dans l'ordre croissant les réels $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$, Montrer que, si $u_{n+1}\leq u_n$ alors $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)$ n'est pas monotone.

3/ Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)=f(f(x))$.

4/ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=u_{2n+1}$ et $w_n=u_{2n}$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=g(v_n)$ et $w_{n+1}=g(w_n)$.

b) En utilisant la monotonie de la fonction g, montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_n \leq w_{n+1}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

Section : .................... N° d'inscription : .................. Série : ........

Nom et Prénom : ..................................................................

Date et lieu de naissance : ......................................................

Signatures des surveillants

...............................

...............................

Épreuve : **Mathématiques** -Section : **Sciences expérimentales** -Session de **contrôle - 2018**

**Annexe à rendre avec la copie**

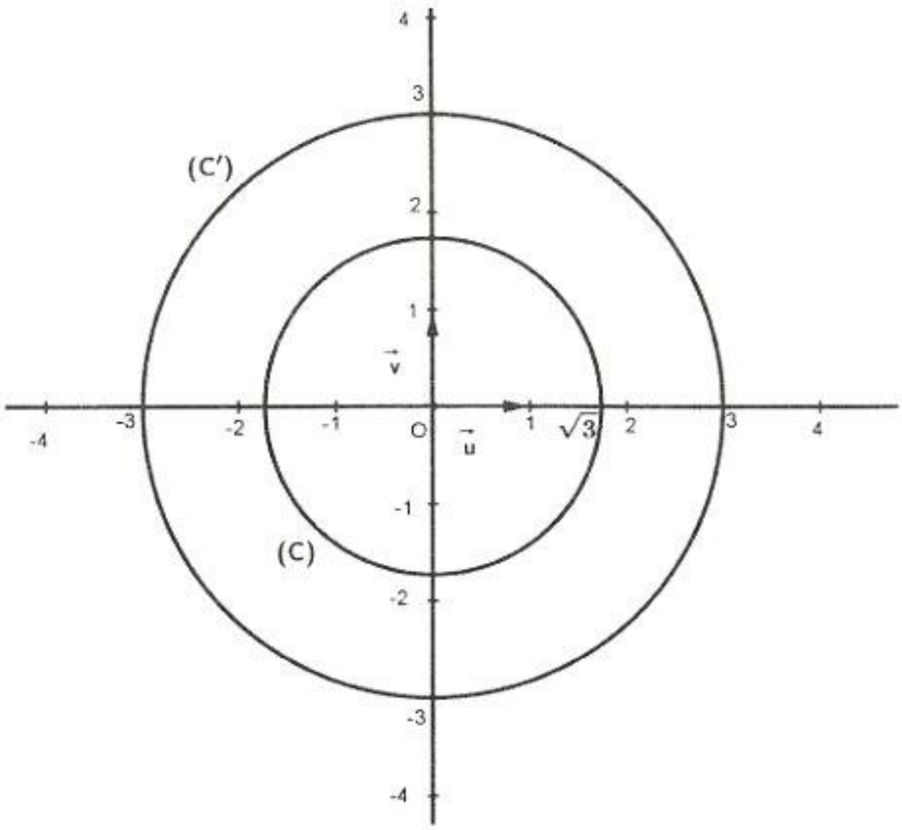



**Figure 1**

Ne rien écrire ici

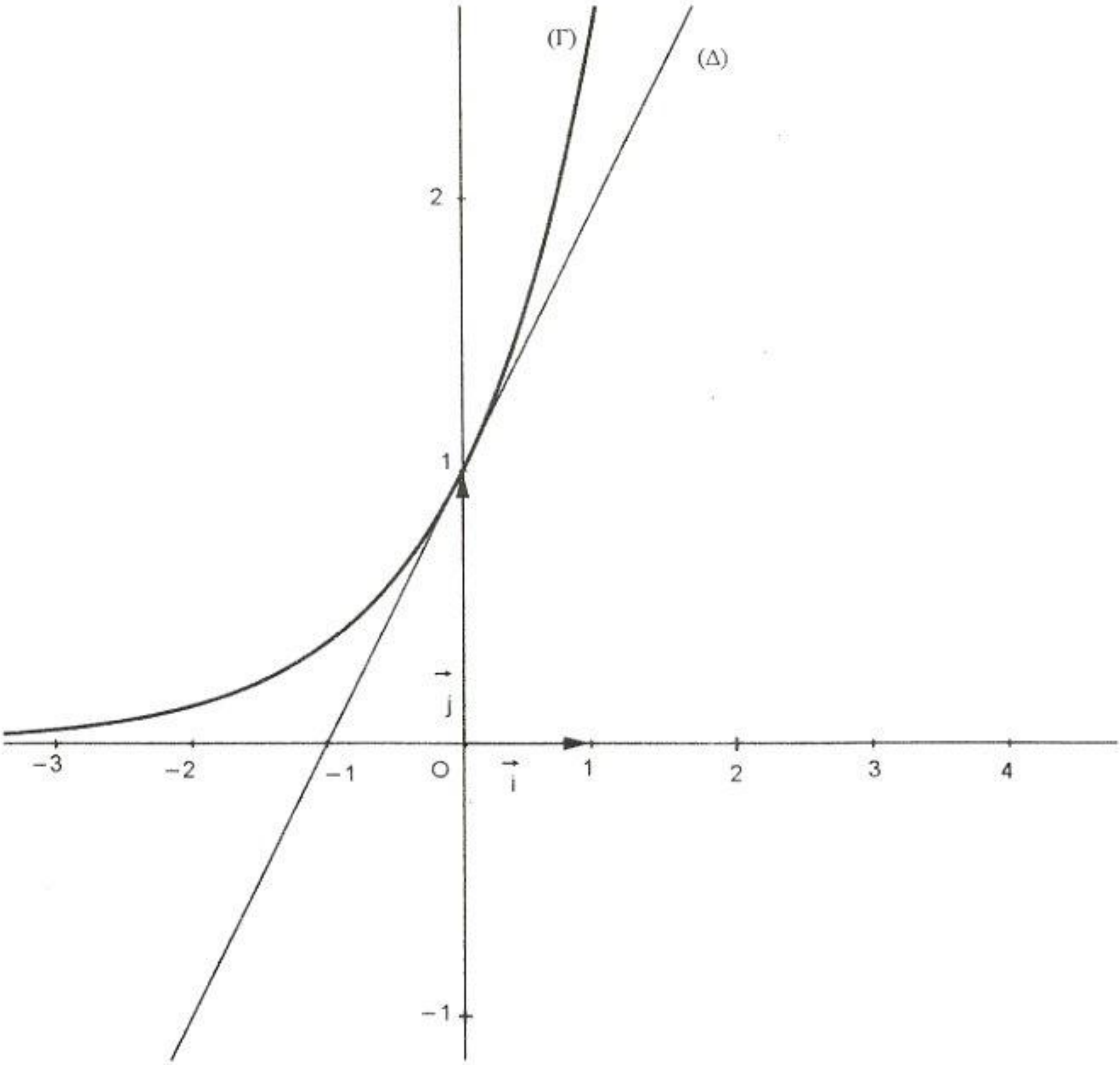



Figure 2

# <u>Correction de l'épreuve de mathématiques ( bac Science expérimentales)</u>

## <u>Session de contrôle 2018</u>

## <u>Exercice n°1 :</u>

**De quoi s'agit-il ?**

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan**
- **Volume d'un tétraèdre**

**1.** **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}\quad\text{ainsi }\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

**b.** On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\frac{1}{6}\left|-4-8\right|=2$

**2.** Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ vecteur normal à P donc $P:2x+2y+4z+d=0$

On a $C(0;0;2)\in P$ donc $d=-8$ ainsi $P:x+y+2z-4=0$

**3.**

**a.** On a $M(x;y;z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1-8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=11$

donc $S$ est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

**b.** On a $d(I,P)=\frac{\left|-1+1-2-4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}<\sqrt{11}$ donc $P\cap S$ est un cercle de rayon $r=\sqrt{11-6}=\sqrt{5}$

**c.** On a $B\in P$ et $C\in P$ et puisque $0^2+4^2+0^2+2\times0-2\times4+2\times0-8=0$ donc $B\in S$ et puisque $0^2+0^2+2^2+2\times0-2\times0+2\times2-8=0$ donc $C\in S$ de plus

$BC=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ donc $[BC]$ est un diamètre du cercle $(\varsigma)$ et ainsi

$H=B*C$ d'où $H(0;2;1)$

**4.** **a.** On a $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} x_M-1=-a \\ y_M-1=3a \\ z_M-1=-a \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_M=1-a \\ y_M=1+3a \\ z_M=1-a \end{cases}$ ainsi

$M(1-a;1+a;1-a)$

**b.** on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 3a-3 \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 1+3a \\ -1-a \end{pmatrix}$ d'où

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=(1-a)^2+(3a-3)(1+3a)-(1-a^2)=11a^2-3-8a=(a-1)(11a+3)$

**c.** On a $E\in(AB)\cap(\varsigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CE}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ (a-1)(11a+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ a=1 \ ou \ a=-\dfrac{3}{11} \end{cases}$

pour $a=1$ on a $E(0;2;0)$ or puisque $H(0;2;1)$ donc $HE=1\neq\sqrt{5}$ d'où $E\notin(\varsigma)$

ainsi $a=\dfrac{-3}{11}$ d'où $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$

**d.** On a $V'=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\left(\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{3}{11}\left[\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|\right]=\dfrac{3}{11}V$

## Exercice n°2 :

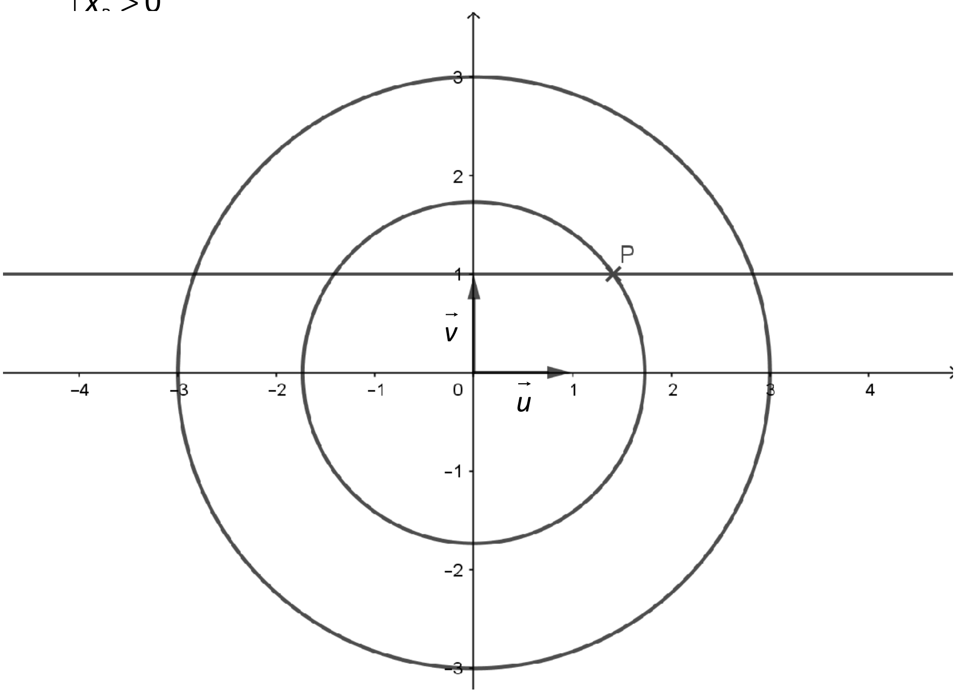
**De quoi s'agit-il ?**

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

**I.**

**1.** **a.** On a $OP=|P|=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ d'où $P\in(C)$

**b.** On a $\begin{cases} y_P=1 \\ x_P>0 \end{cases}$ et $P\in(C)$ donc $P\in(C)\cap\Delta: y=1$ avec $x_P>0$ d'où la construction



**c.** On a $\begin{cases} \arg(P) \equiv \alpha[2\pi] \\ |P| = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow P = \sqrt{3}e^{i\alpha}$

**2.**

**a.** On a $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi] \equiv \alpha + \alpha[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$

**b.** On a $Q \in (C')$ donc $|q| = 3$ et puisque $\arg(q) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$ d'où $q = 3e^{i2\alpha}$

**c.** On a $p^2 = \left(\sqrt{3}e^{i\alpha}\right)^2 = 3e^{i2\alpha} = q$ donc $q = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} - 1 = 1 + 2i\sqrt{2}$

II.

**1. a.** On a $\Delta = 64 - 4 \times 16 \times 9 = -512$ d'où $\delta = i\sqrt{512} = 16\sqrt{2}i$

d'où $z' = \dfrac{8 - 16i\sqrt{2}}{32} = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z' = \dfrac{8 + 16i\sqrt{2}}{32} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z' = \dfrac{\overline{q}}{4}$ et $z'' = \dfrac{q}{4}$

**b.** On pose $Z = z^2$

On a z solution de $(E')$ équivaut à $Z^2 - 8Z + 9 = 0$ équivaut à $Z = \dfrac{q}{4}$ ou $Z = \dfrac{\overline{q}}{4}$

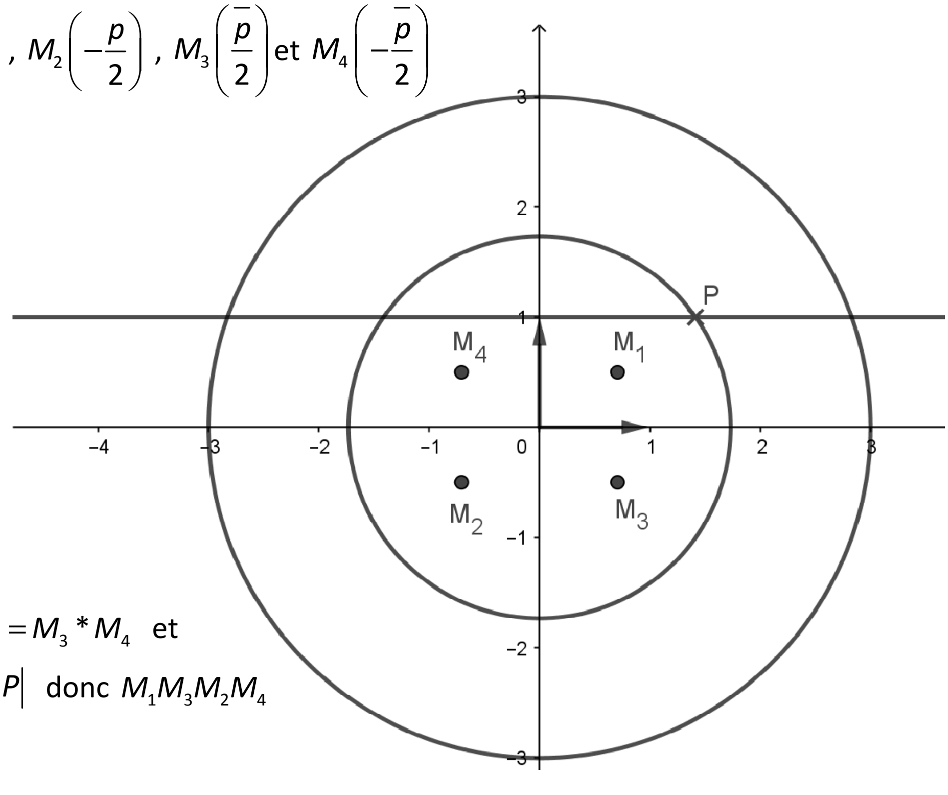
équivaut à $z^2 = \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ ou $z^2 = \dfrac{\overline{p^2}}{4} = \left(\dfrac{\overline{p}}{2}\right)^2$

équivaut à $z = \dfrac{p}{2}$ ou $z = -\dfrac{p}{2}$ ou $z = \dfrac{\overline{p}}{2}$ ou $z = -\dfrac{\overline{p}}{2}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{p}{2}; -\dfrac{p}{2}; \dfrac{\overline{p}}{2}; -\dfrac{\overline{p}}{2}\right\}$

**2.** a.

On a $M_1\left(\dfrac{p}{2}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{p}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{\overline{p}}{2}\right)$ et $M_4\left(-\dfrac{\overline{p}}{2}\right)$




b. On a $M_1 * M_2 = M_3 * M_4$ et

$M_1M_2 = M_3M_4 = |P|$ donc $M_1M_3M_2M_4$

est un rectangle

## Exercice n°3:

**De quoi s'agit-il ?**

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction en exponentielle ( limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**

**A. 1. a.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2-xe^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-e^x\right]=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2-xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{(x+1)^2}{x}-e^x\right]=-\infty$

donc $(C_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

**b.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2-xe^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\right]=-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2-xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\right]=-\infty$

donc $(C_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

**2. a.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel $x$ ,

$$f'(x)=2(x+1)-e^x-xe^x=2(x+1)-e^x(x+1)=(x+1)(2-e^x)$$

**b.** $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=\ln 2$ et on a $2-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<2 \Leftrightarrow x<\ln 2$

d'où

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $2-e^x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $e^{-1}$ | $\nearrow$ | $1+(\ln 2)^2$ | $\searrow$ | |

**3. a.** On a $f'(0)=g'(0)=1$ et $f(0)=g(0)=1$ d'ou $T: y=x+1$

**b.** Puisque $(\Gamma)$ est au dessus de $(\Delta)$ donc $e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

**autrement :** Soit $h: x\mapsto e^x-(x+1)$ , $x\in\mathbb{R}$

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ , et on a $h'(x)=e^x-1$ d'où

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'où $h(x)=e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

**4.**

**a.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=e^x-(x+1)^2+xe^x=(x+1)(e^x-x-1)$

**b.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=xe^x-x^2-x=x(e^x-x-1)$

**c.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=(x+1)(e^x-(x+1))=0 \iff x=-1$ ou $x=0$ d'où

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

Conclusion : $\Gamma$ au dessous de $(C_f)$ pour tout $x\in\,]-\infty;-1[$

$\Gamma$ au dessus de $(C_f)$ pour tout $x\in\,]-1;+\infty[\,\setminus\{0\}$

$\Gamma$ coupe $(C_f)$ aux points $(-1;e^{-1})$ et $(0;1)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=x(e^x-(x+1))=0 \iff x=0$ d'où

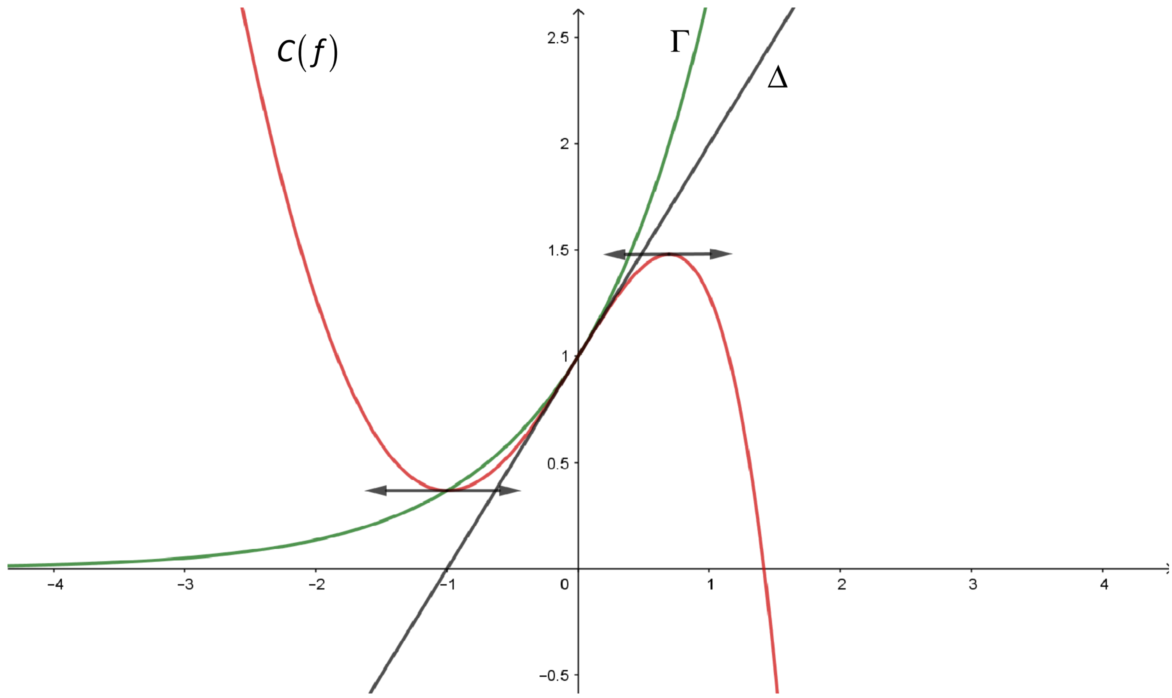
| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)-f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Conclusion : $\Delta$ au dessous de $(C_f)$ pour tout $x\in\,]-\infty;0[$

$\Delta$ au dessus de $(C_f)$ pour tout $x\in\,]0;+\infty[$

$\Gamma$ coupe $(C_f)$ au point $(0;1)$

**5.**



**6.** On a

$$A=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{x}+xe^{x}-x^{2}-2x-1dx=\left[xe^{x}-\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$$

## Exercice n°4:

**De quoi s'agit-il ?**

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction** $\sqrt[n]{\ }$
- **Suites** $u_{n+1}=f(u_n)$ **( monotonie, résonnement par récurrence , absurde, convergence )**

1. Soit $M(x;y)\in\wp\setminus\{O\}$

   On a $M\in(C)\cap(D)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=x\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{4x}=x\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x^{3}=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$

   d'où $\alpha=\sqrt[3]{4}$

2.
   a. On a $u_0=4$ , $u_1=f(4)=1$ , $u_2=f(1)=2$ et $u_3=f(2)=\sqrt{2}$ donc $u_1<u_3<u_2<u_0$

   b. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n>0$

   Pour $n=0$ on a $u_0=4>0$

   Soit $n\in\mathbb{N}$ , on suppose $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$

   On a $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{2}{\sqrt{u_n}}>0$

   Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n>0$

   c. Soit $n\in\mathbb{N}$ , si $u_{n+1}\le u_n$ alors $0<\sqrt{u_{n+1}}\le\sqrt{u_n}$ d'où $\dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ ainsi

   $\dfrac{2}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$ donc $u_{n+2}\ge u_{n+1}$

   d.

   Puisque si $u_{n+1}\le u_n$ alors $u_{n+2}\ge u_{n+1}$ donc $(u_n)$ n'est pas décroissante

Et si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $0<\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_{n+1}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ d'où $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

donc $(u_n)$ n'est pas croissante

Conclusion : $(u_n)$ n'est pas monotone

3. Pour tout $x \in ]0;+\infty[$ ,

$$f(f(x))=f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}}}}=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x}}=2^{\frac{2}{4}}x^{\frac{1}{4}}=(4x)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4x}=g(x)$$

4.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(v_n)=f(f(u_{2n+1}))=f(u_{2n+2})=u_{2n+3}=v_{n+1}$

$$g(w_n)=f(f(u_{2n}))=f(u_{2n+1})=u_{2n+2}=w_{n+1}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$

Pour $n=0$ , on a $u_1<u_3<\alpha<u_2<u_0$ d'où $v_0<v_1<\alpha<w_1<w_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ , on suppose $v_n<v_{n+1}<\alpha<w_{n+1}<w_n$

montrons que $v_{n+1}<v_{n+2}<\alpha<w_{n+2}<w_{n+1}$

on a $0<v_n<v_{n+1}<\alpha<w_{n+1}<w_n$ et $g$ croissante sur $[0;+\infty[$ donc

$g(v_n)<g(v_{n+1})<g(\alpha)<g(w_{n+1})<g(w_n)$ d'où $v_{n+1}<v_{n+2}<\alpha<w_{n+2}<w_{n+1}$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_{n+1} \leq w_n$

c. On a $(v_n)$ est une suite croissante et majorée par $\alpha$ donc convergente vers $\ell \in [0;+\infty[$ et puisque $v_{n+1}=g(v_n)$ et g continue sur $[0;+\infty[$ d'où $g(\ell)=\ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque $v_n \geq v_0=1>0$ d'où $\ell>0$ ainsi $\ell=\alpha$

On a $(w_n)$ est une suite décroissante et minorée par $\alpha$ donc convergente vers $\ell \in [0;+\infty[$ et puisque $w_{n+1}=g(w_n)$ et g continue sur $[0;+\infty[$ d'où $g(\ell)=\ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque et puisque $0<\alpha \leq w_n \leq w_0=4$ d'où $\ell>0$ donc $\ell=\alpha$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}=\alpha$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

| | |
|---|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>●●○●●<br>**EXAMEN DU BACCALAURÉAT**<br>SESSION **2017** | Épreuve : **Mathématiques**<br>Section : **Sciences expérimentales**<br>Durée : 3h — Coefficient : 3<br>**Session principale** |

**Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

**<u>Exercice 1</u> ( 5 points )**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC}$.

b) On note P le plan (OBC).

En remarquant que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{OA}$, justifier que la droite $(OA)$ est perpendiculaire au plan P en O.

c) Montrer que la distance du point O à la droite $(BC)$ est égale à $\sqrt{2}$.

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$.

Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

3) a) Calculer la distance OA.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).

4) On considère le point $H(1,-1,0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

**<u>Exercice 2</u> ( 4,5 points )**

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{5}+2i)z+1+4\sqrt{5}\,i=0$.

a) Calculer $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

b) Vérifier que le discriminant de l'équation ( E ) est $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

c) En déduire que les solutions de (E) sont :

$$a=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 3.

2) Soit Q le point d'affixe $\sqrt{5}+2i$.

a) Montrer que le point Q appartient à (C).

b) Construire alors le point Q.

3) Soient A et B les points d'affixes respectives les nombres complexes a et b.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) En déduire que le quadrilatère OAQB est un losange.

d) Construire alors les points A et B.

__Exercice 3__ **(7points)**

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left(1+x^2\right)e^{-x}$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(C)$ au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de $(C)$ d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de $(C)$.

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- $(\Gamma)$ est la courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x$.
- E et F sont les points de $(\Gamma)$ d'abscisses respectives $(-1)$ et $\ln 10-3$.
- G est le point de coordonnées $(0\ ,\ 1-6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10\,g(-3)=g(\ln 10-3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\frac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe $(C)$ au point B.

b) Tracer la courbe $(C)$ dans l'annexe (On placera les tangentes à ( C) en A, en J et en B ).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe ( C ), l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 3$ .

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur IR.

c) Calculer S.

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,3] est égale à $1 - 6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S.

**Exercice 4 (3,5points)**

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer p(U)

b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer p(D) .

b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ( $n \geq 2$ ).

On note $p_n$ la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

a) Exprimer $p_n$ en fonction de n.

b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité $p_n$ soit supérieure à 0,9 ?

Section : . . . . . . . . . . . N° d'inscription : . . . . . . . . . . . Série : . . . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Date et lieu de naissance : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Signatures des surveillants

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Épreuve : Mathématiques** **Section : Sciences expérimentales**

**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure 1**

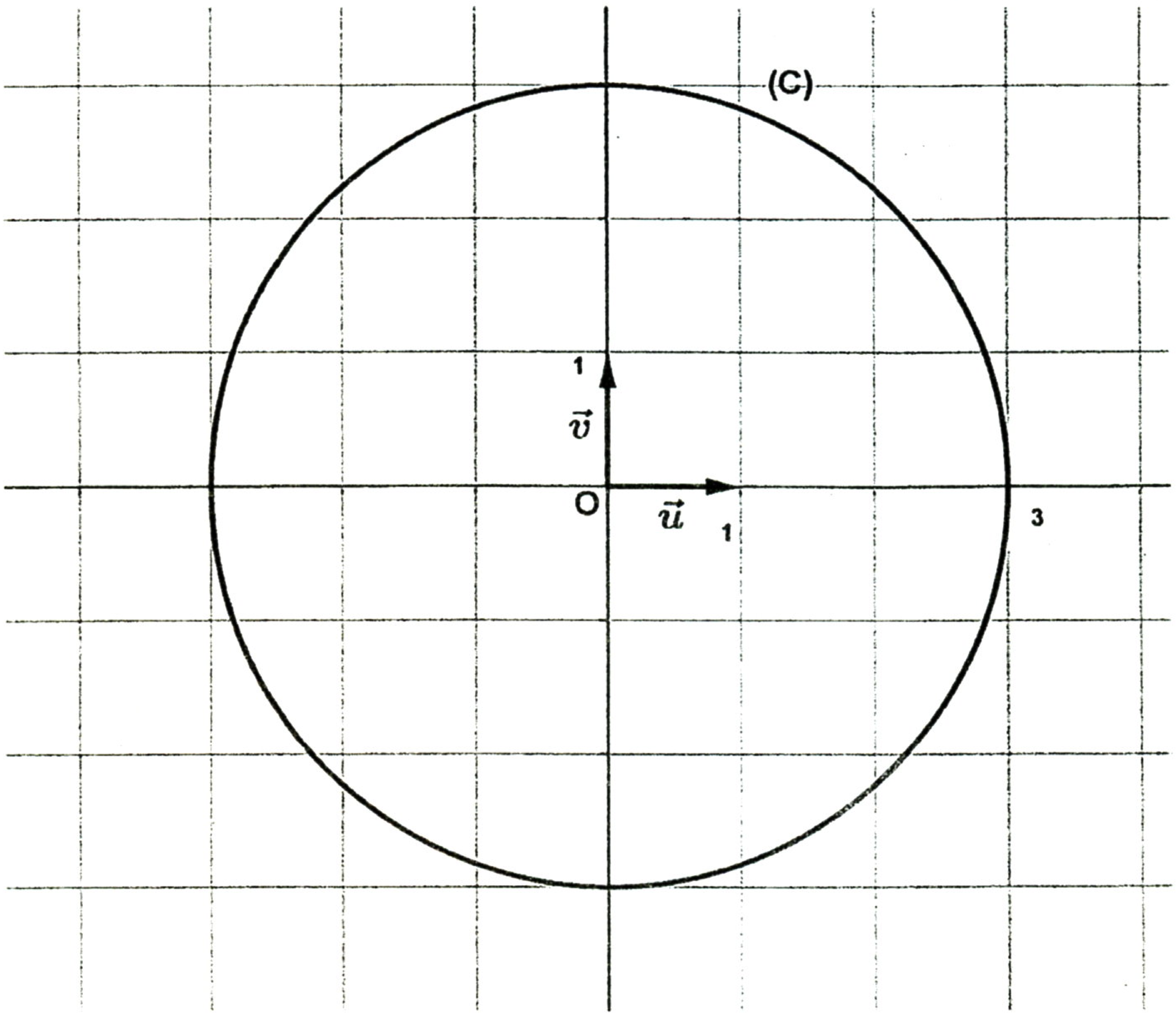
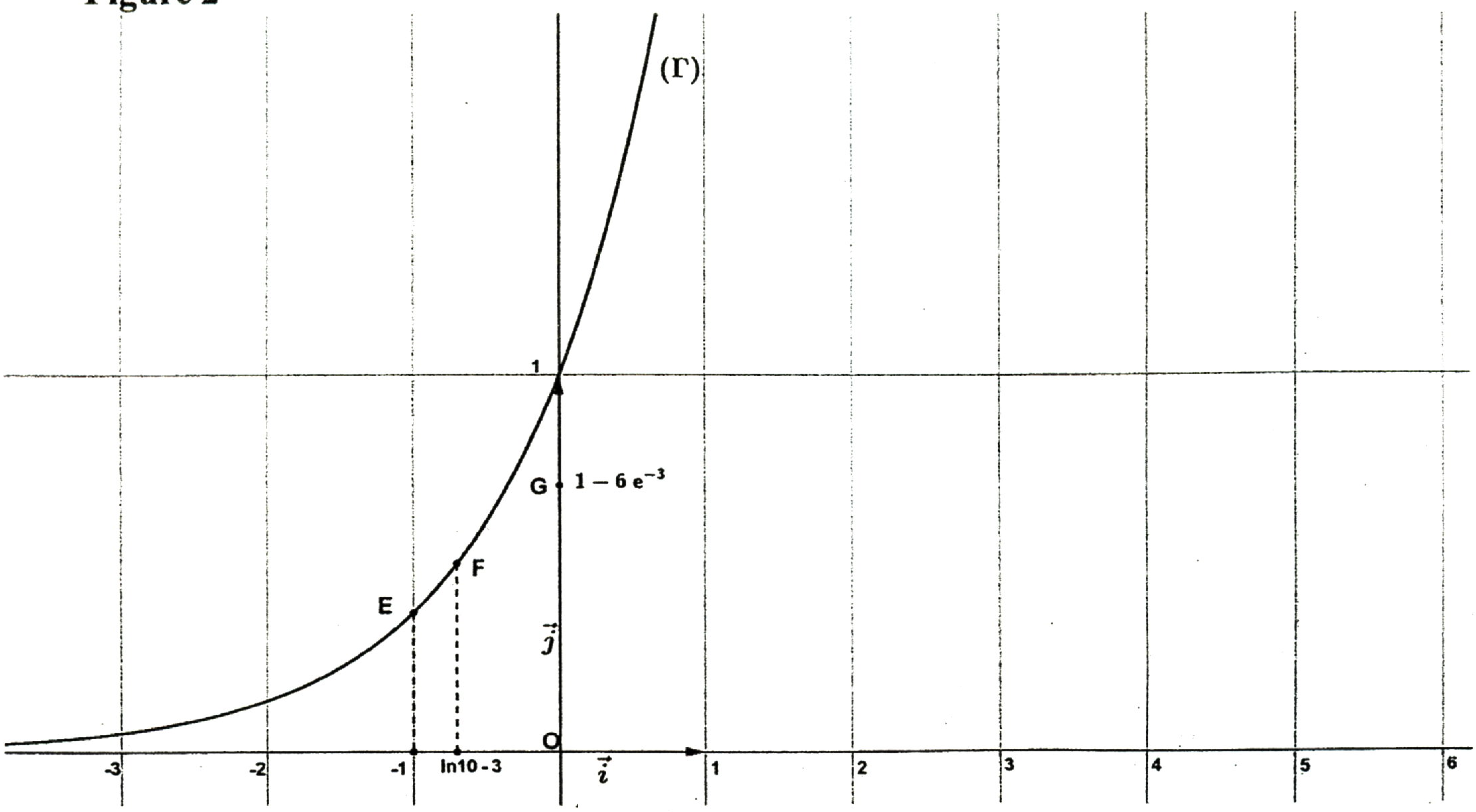



**Figure 2**



**Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)**

**Session principale 2017**

## Exercice n°1 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère**
- **Droite tangente à un cercle**

**1°) a)** $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$,

Donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{k} = 8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$.

**b)** $O\in P\cap(OA)$ ①

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA}\perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan *P* en *O*.

**c)** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ ainsi,

$$d\left(O,(BC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+8^2}}=\sqrt{2}.$$

**2)** $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$ signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2+2^2+2^2+1^2$

signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=11>0$

Donc (S) est la sphère de centre *A*(2,2,1) et de rayon R = $\sqrt{11}$.

**3) a)** $OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

**b)** D'après la question **1-b)**, O est le projeté orthogonal de A sur le plan *P*, donc $d(A,P) = OA = 3 < R = \sqrt{11}$.

Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\sqrt{11}^2-3^2}=\sqrt{11-9}=\sqrt{2}$.

**c)** $(BC)\subset P$ ; C $\subset P$ et $d(O,(BC))=\sqrt{2}$ donc (*BC*) est tangente au cercle C.

**4)** **a)** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H\in(BC)$ (✶).

$OH=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}=r$ (✶✶).

D'apres (✶) et (✶✶), on conclut que $(BC)\cap$C $=\{H\}$.

## Exercice n°2 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Résolution d'une équation du second degré dans IC**
- **Complexe et géométrie**

**1)** **a)** $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\sqrt{5}^2+2\times\sqrt{5}\times 2i+(2i)^2=5+4i\sqrt{5}-4=1+4i\sqrt{5}$.

**b)** $\Delta=\left[-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2-4\times1\times\left(1+4i\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}+2i\right)^2-4\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

**c)** $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\left[i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2$, donc $\delta=i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)$ par suite :

$$a=\frac{\sqrt{5}+2i+i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et $a=\dfrac{\sqrt{5}+2i-i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Donc les solutions de (*E*) sont a et b.

**2)** **a)** $OQ=|z_Q|=\left|\sqrt{5}+2i\right|=\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=\sqrt{9}=3$, donc $Q\in$ C $_{(O,3)}$ = C .

**b)** $Q\in$C $\cap\{y=2\}$, avec Re($z_A$) > 0.

**3)** **a)** $OA=|a|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1+i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc A $\in$C .

$OB=|b|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1-i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc B $\in$C .

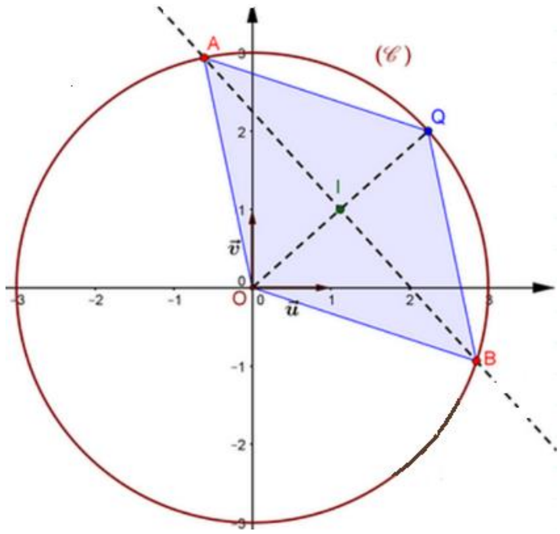
**b)** $z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}=a+b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\sqrt{5}+2i=z_Q=z_{\overrightarrow{OQ}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

**c)** On a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ donc le quadrilatère *OAQB* est un parallélogramme, de plus *OA* = *OB* ainsi *OAQB* est un losange.

**d)** On construit le point *I* milieu du segment [*OQ*]

La perpendiculaire à (*OQ*) passant par I coupe le cercle C en A et B tel que Im($z_A$) > 0, car $a=\dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2+\sqrt{15}}{2}$ et $b=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2-\sqrt{15}}{2}$.




## Exercice n°3 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Fonction en exponentielle (limites, variations, points d'inflexions, construction de points sur une représentation graphique donnée)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**
- **Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle**

**1)** **a)** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{-\infty}f=+\infty$.

**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}.e^{-x}=-\infty$.

(C ) admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$.

**c)** $\lim\limits_{+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}+x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}}=0+0=0$.

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C ) au voisinage de $+\infty$.

**2)** **a)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\times\left(1+x^2\right)=\left(2x-\left(1+x^2\right)\right)e^{-x}$

$=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}=-\left(x^2-2x+1\right)e^{-x}=-\left(x-1\right)^2e^{-x}$.

**b)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\le0$ et $f'(1)=0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | | $0$ |

**3)** **a)** $T_0 : y = f'(0)\,x + f(0)$ avec $f'(0) = -e^0 = -1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

**b)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\left[2\times 1\times (x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$.

$$= -e^{-x}\left(2x-2-x^2+2x-1\right) = \left(x^2-4x+3\right)e^{-x}$$

$$= (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi A et B sont deux points d'inflexions de (C ).

**4)** **a)** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+x^2\right)e^{-x} = \left(1+x^2\right)g(-x)$.

Donc : $f(1) = 2g(-1)$ et $f(3) = 10\,g(-3)$.

**b)** $A(1; f(1))$ et $f(1) = 2g(-1) = 2y_E$, donc $A(1; 2y_E)$.

$B(3; f(3))$ et $f(3) = 10\,g(-3) = g(\ln(10)-3) = y_F$, donc $B(3; y_F)$.

$T_3$ est la tangente à (C ) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3}\times\dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

**5)** **a)** $T_3$ est la tangente à (C ) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3}\times\dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

**b)** Voir figure.

**6)** **a)** Voir figure.

**b)** $x \mapsto -\left(x^2+2x+3\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ; $F'(x) = -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}\left(x^2+2x+3\right)\right]$

$$= -e^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-3\right) = -e^{-x}\left(-x^2-1\right)$$

$$= \left(1+x^2\right)e^{-x} = f(x).$$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

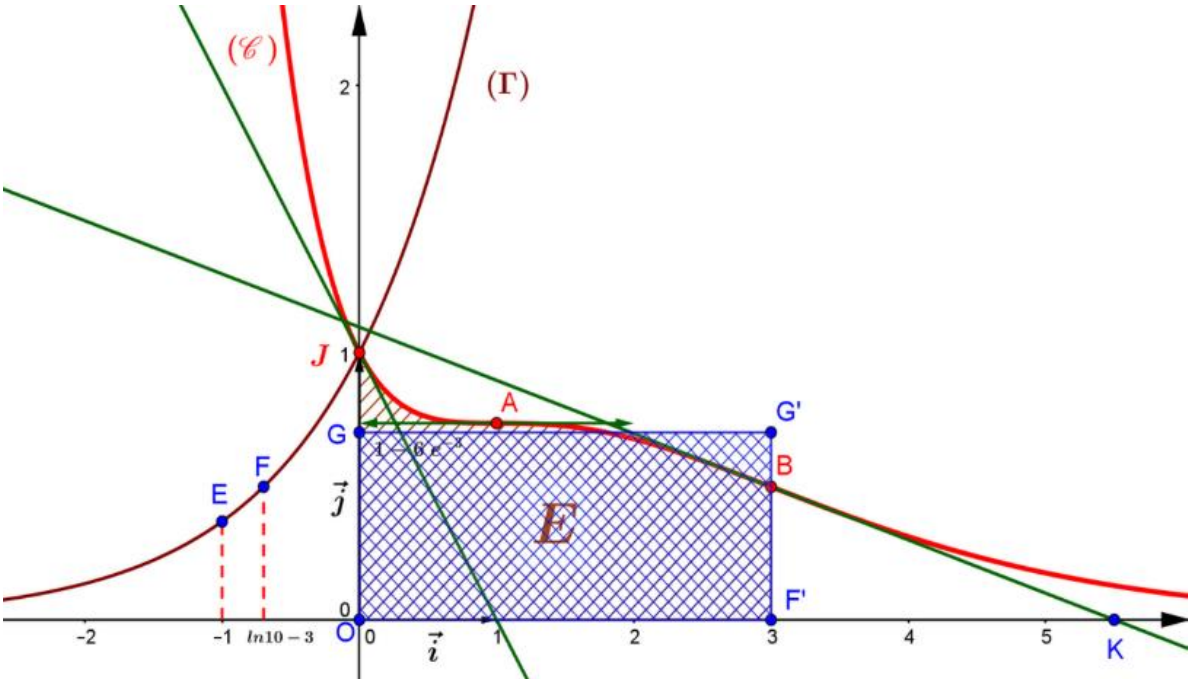
**c)** $S = \int_0^3 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^3 = F(3) - F(0) = -18e^{-3} + 3 = 3 - 18e^{-3}$.

**d)** $\overline{f} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}\left(3-18e^{-3}\right) = 1 - 6e^{-3}$.

**e)** $S = 3 \times \overline{f} = 3 \times \left(1-6e^{-3}\right)$.

Soients $G'(3\ ;\ 1-6e^{-3})$ ; $F'(3\ ;\ 0)$ et **A** l'aire du rectangle $OF'G'G$,

Donc $S = OF' \times OG =$ **A**.



## Exercice n°4 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité totale**
- **Loi binomiale**

**1)** **a)** $p(U)=1-p(\overline{U})=1-\dfrac{5}{100}=0,95$ .

**b)** $p(D/U)=\dfrac{92}{100}=0,92$ et $p(D/\overline{U})=\dfrac{55}{100}=0,55$ .

**2)** **a)** $p(D)=p(D\cap U)+p(D\cap\overline{U})=p(D/U)\times p(U)+p(D/\overline{U})\times p(\overline{U})$

$=0,92\times0,95+0,55\times0,05=0,9015$ .

**b)** $p(U/D)=\dfrac{p(U\cap D)}{p(D)}=\dfrac{0,92\times0,95}{0,9015}=\dfrac{1748}{1803}\simeq0,9694$ .

**3)** **a)** $p_n=1-\overline{p_n}$ avec $\overline{p_n}$ est la probabilité qu'aucune de ces femmes ait une grossesse multiple.

C'est à dire que n femmes ait une grossesse unique.

Ainsi : $p_n=1-(p(U/D))^n=1-(0,9694)^n$.

Autrement : X suit une loi binomiale de paramètres n (n$\geq$2) et $p=p(\overline{U}/D)$

$$p_n=p(X\geq1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-(0,9694)^n.$$

**b)** $p_n>0,9$ signifie $1-(0,9694)^n>0,9$

signifie $(0,9694)^n<0,1$

signifie $\ln((0,9694)^n)<\ln(0,1)$

signifie $n\ln(0,9694)<\ln(0,1)$

signifie $n>\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,9694)}\simeq74,09$ car $\ln(0,9694)<0$.

Ainsi le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 est n = 75.

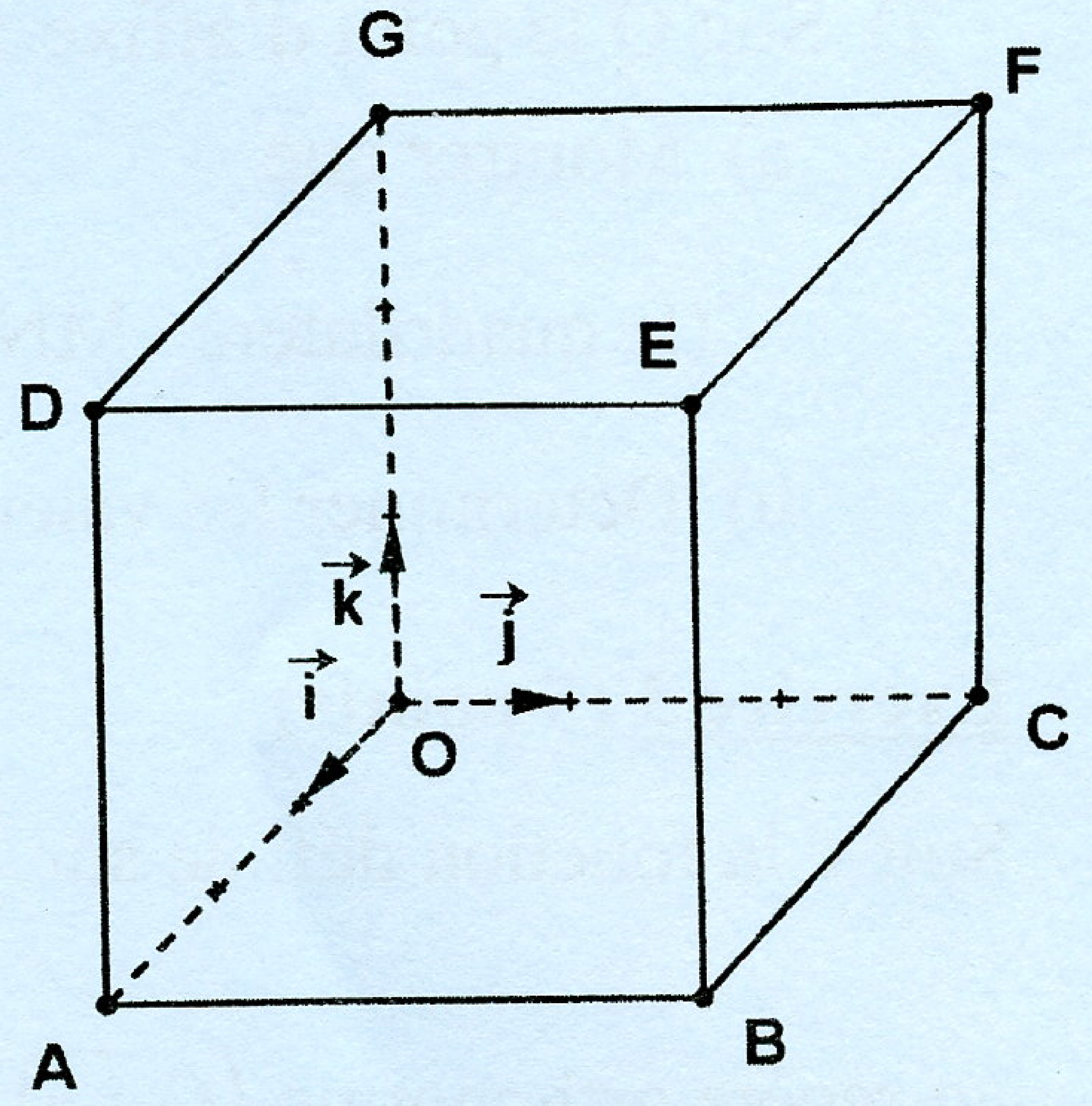
| | |
|---|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>●●○●●<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION **2017** | Épreuve : **Mathématiques**<br>Section : **Sciences expérimentales**<br>Durée : 3h — Coefficient : 3<br>**Session de contrôle** |

**Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

## Exercice 1 (5 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que A(3,0,0) ; C(0,3,0) et G(0,0,3).




1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point $\Omega$ milieu de $[CD]$ .

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ .

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG .

3) On désigne par P le plan passant par les points A , E et G.

a) Montrer que la droite $(CD)$ est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x-y+z-3=0$ .

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y ,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

## Exercice 2 (5points)

A/1) a) Justifier que $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}\,i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe :

- $(C)$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{2}\,i$ et $z_D=2\sqrt{2}\,i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives $z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) Vérifier que $z_B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC)\perp(AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

**B/** Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer ${z_N}^3$ et ${z_P}^3$.

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ( $\alpha^3 = -2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles MNQP est un losange.

**<u>Exercice 3</u> (5 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x \in ]0,+\infty[$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x\big(\ln(x+1) - \ln x\big) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $]-\infty,1[$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}(\frac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Montrer que $a_n$ est une solution de l'équation $x^n = x+1$.

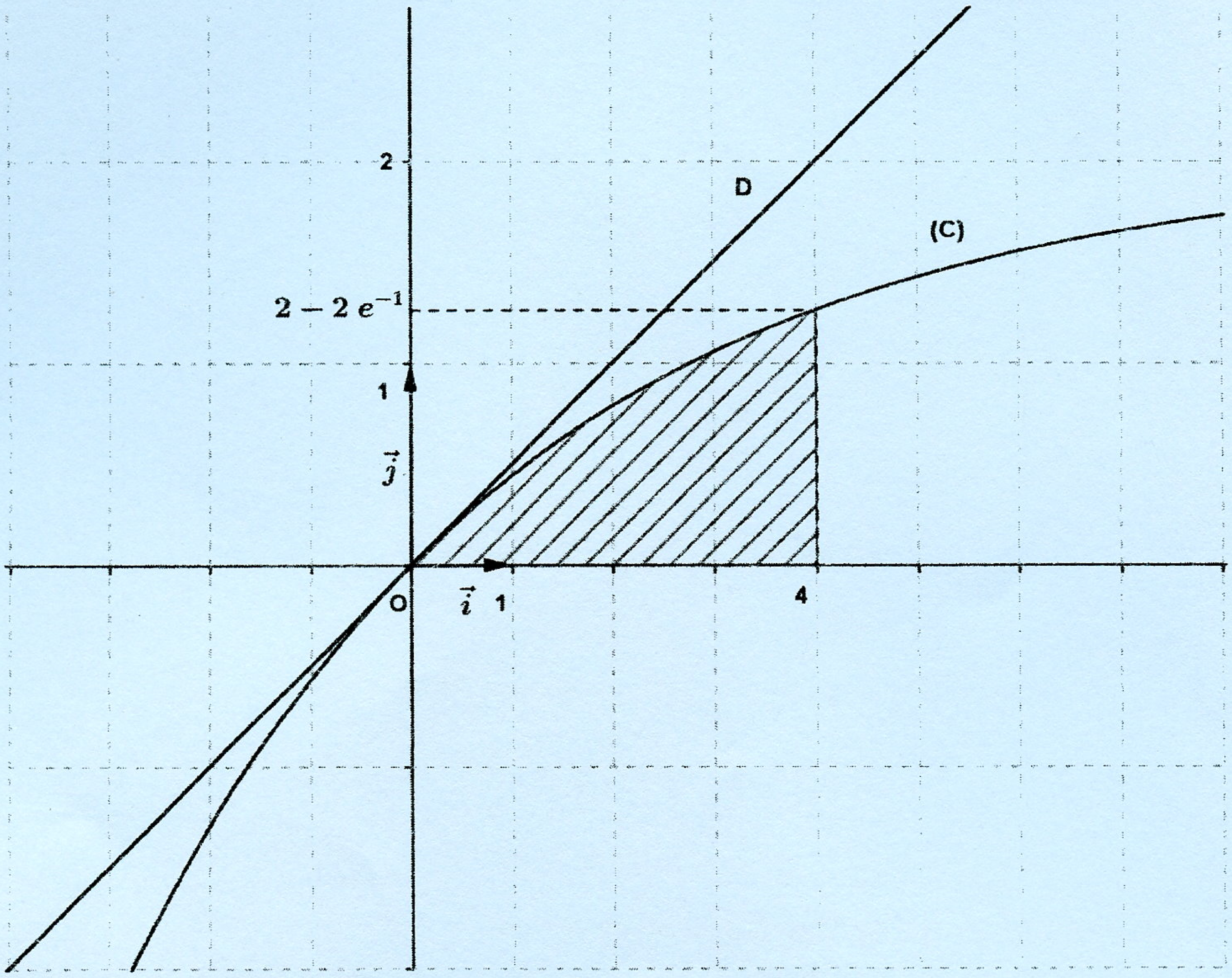
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$.

**Exercice 4** **( 5 points )**

Dans la figure ci–dessous :

- la courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- la droite D est la tangente à (C) au point O.
- $f(4) = 2 - 2e^{-1}$.

On désigne par S l'aire en (u.a ) de la partie hachurée et on admet que $S = 8e^{-1}$.




1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

   b) En déduire que $b = \dfrac{1}{2}$.

2) a) Justifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{a}\left(f'(x) - \dfrac{1}{2}\right)$

   b) En déduire que $S = \dfrac{-2\,e^{-1}}{a}$.

   c) Montrer alors que $a = -0,25$.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2 - 2e^{-0.25x}$.

4) On admet que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ modélise l'évolution de la hauteur d'une certaine espèce de maïs. Autrement dit : si on note h(t) la hauteur en mètres de cette espèce de maïs à l'instant t (exprimé en semaines) alors $h(t) = 2 - 2\,e^{-0.25\,t}$.

   a) Déterminer la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines.

   b) Au cours de quelle semaine la hauteur d'une plante de maïs dépassera-t-elle 198 cm ?

Section : . . . . . . . . . . . N° d'inscription : . . . . . . . . . . . Série : . . . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Date et lieu de naissance : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

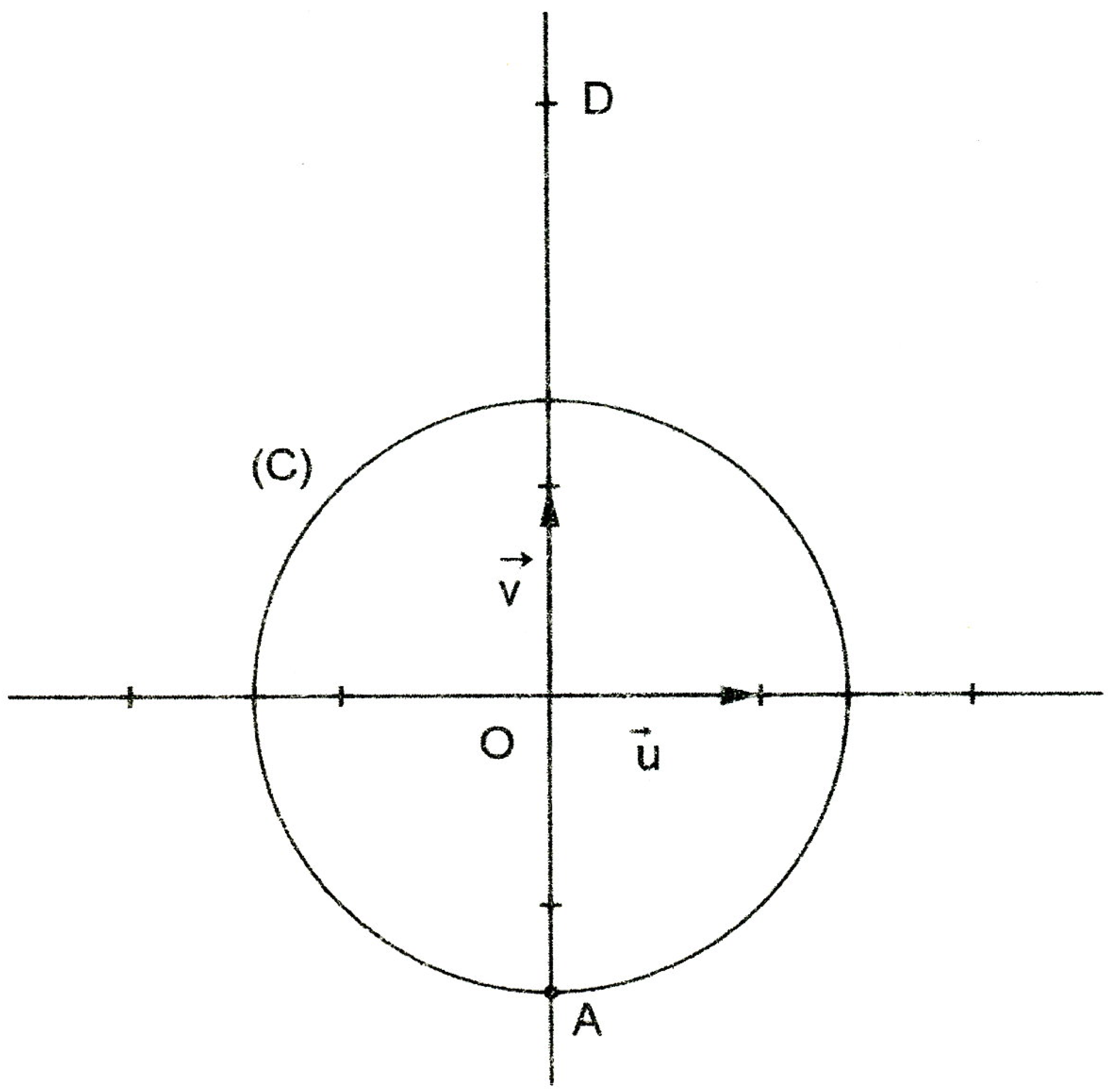
Signatures des surveillants

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Épreuve : Mathématiques** **Section : Sciences expérimentales**

**Annexe à rendre avec la copie**



**Correction de l'épreuve de mathématiques ($\textit{bac Sciences expérimentales}$)**

**Session de contrôle 2017**

# <u>Exercice 1 :</u>

**De quoi s'agit -il ?**

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

**1°) a)** ⇨ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG}=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

⇨ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=3\vec{i}+3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

**b)** ⇨ $\Omega=C*D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

**2) a)** $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$.

**b)** $V_{(OAEG)}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AO}\right|$ avec $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{6}|-27+0+0|=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$.

**3) a)** $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(CD)$

Donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P\perp(CD)$.

**b)** Soit $P' : x-y-z-3=0$

⇨ $3-0+0-3=0$ donc $A\in P'$.

⇨ $3-3+3-3=0$ donc $E\in P'$.

⇨ $0-0+3-3=0$ donc $G\in P'$.

Or $(AEG)=P=P'$, ainsi $P : x-y+z-3=0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x-9y+9z+d=0$,

Or $A(3,0,3)\in P$ signifie $9\times3-9\times0+\times0+d=0$ signifie $d=-27$

Donc $P : 9x-9y+9z-27=0$ signifie $P : x-y+z-3=0$.

**4)** a) $(S): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=-6+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**b)** $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ , $P: x-y+z-3=0$ donc $d(\Omega,P)=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega,P)=R$. Ainsi $(S)$ et $P$ sont tangents en $H$.

Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur P.

Signifie $\begin{cases} H\in P \\ H\in D\left(\Omega,\overrightarrow{n_p}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

signifie $\begin{cases} \frac{3}{2}+\alpha-\frac{3}{2}+\alpha+\frac{3}{2}+\alpha-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ Ainsi $H(2,1,2)$

## Exercice 2 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Racines cubiques d'un nombre complexe donné**
- **Construction de points M(z) sachant $|z|$ et arg(z)**
- **Complexe et géométrie**

## A/

**1) a)** $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

**b)** $Z^3=2\sqrt{2}i=\left(\sqrt{2}\right)^3e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z=2\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$.

Signifie $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

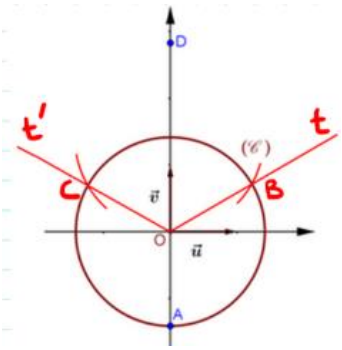
Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$ sont

$Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ; $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

**2) a)** ⇨ $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B|=\sqrt{2} \\ \arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

signifie $B\in\zeta\cap[Ot)$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

⇨ $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C|=\sqrt{2} \\ \arg(z_C)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$




signifie $C\in\zeta\cap[Ot')$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot'})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

**b)** ⇨ $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

⇨ $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement : ⇨ $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=-\overline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=-\overline{z_B}$.

$=-\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**c)** ⇨ $z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-\sqrt{6}$.

⇨ $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=3\sqrt{2}\,i$.

Donc $\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=-\sqrt{3}\,i\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$. Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

Autrement : $z_C=-\overline{z_B}$ signifie $S_{(O,\vec{v})}(B)=C$ signifie $(O,\vec{v})\perp(BC)$

Or $(O,\vec{v})=(AD)$, Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

**d)** ⇨ $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}i=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

⇨ $z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=2\sqrt{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Donc $z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC)\perp(AD)$ ;
Ainsi ABDC est un losange.

**B/ 1) a)** ⇨ $z_N^3=\left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\alpha^3e^{i2\pi}=\alpha^3$.

⇨ $z_P^3=\left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3=\alpha^3e^{-i2\pi}=\alpha^3$.

b) ⇨ $z_N^3=z_P^3=\alpha^3$.

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul $\alpha^3$ sont $z_N$, $z_P$ et $z_M$
et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) ⇨ MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et MN = MQ
signifie MNQP est un parallélogramme(car MNP est un triangle équilatéral)

signifie $\quad z_{\overrightarrow{MN}} = z_{\overrightarrow{PQ}}$ $\quad$ signifie $\quad z_N - z_M = z_Q - z_P$ $\quad$ signifie $\quad z_Q = -z_M + z_P + z_N$

signifie $\quad \alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ $\quad$ signifie $\quad \alpha^3 = -\alpha + \alpha\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$

signifie $\quad \alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad$ signifie $\quad \alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie $\quad \alpha^3 = -2\alpha$ .

b) ⇨ MNQP est un losange $\quad$ signifie $\quad \alpha^3 = -2\alpha$ $\quad$ signifie $\quad \alpha\left(\alpha^2 + 2\right) = 0$

signifie $\quad \alpha^2 + 2 = 0$ $\quad$ car $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie $\quad \alpha^2 = -2$ $\quad$ signifie $\quad \alpha = i\sqrt{2}$ ou $\alpha = i\sqrt{2}$.

## Exercice 3 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique**
- **Fonction réciproque**
- **Résolution d'équations**

**1)** **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$ et $\ln(x+1) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ .

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote a ($\mathscr{C}$).

**b)** Pour tout $x \in ]0,+\infty[$; $\quad \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

**c)** $$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ $\quad$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ . Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

La droite $\Delta$ : y = 1 est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

**2)** **a)** Pour tout $x \in ]0,+\infty[$; $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{x\left(\ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(x)\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$= \frac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x \in ]0,+\infty[$; $1+\dfrac{1}{x} > 1$ et $x+1 > 1$

Donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et $\ln(x+1) > 0$

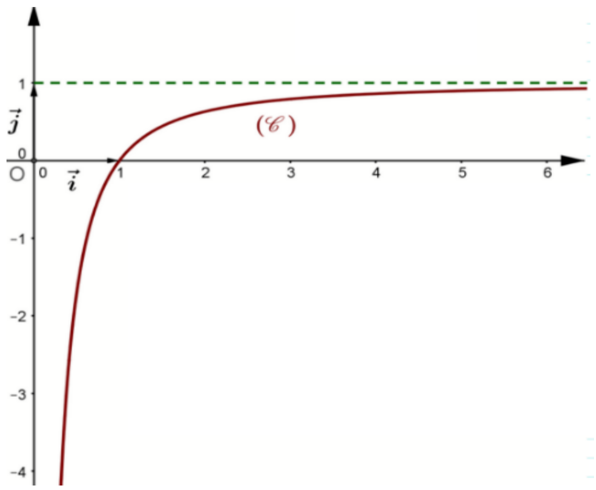
Ainsi $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1) > 0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$.

Donc pour tout $x \in ]0,+\infty[$; $f'(x) > 0$ Par suite f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

**c)**

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $-\infty \nearrow 1$ |

**d)**




**3)** f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) = ]-\infty,1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $]-\infty,1[$.

**4)** **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{x\to0}f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ car $f^{-1}$ est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

**b)** pour tout $n\geq2$ ; $a_n=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n)=\frac{1}{n}$

signifie $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n+1)}=\frac{1}{n}$

signifie $n\ln(a_n)=\ln(a_n+1)$

signifie $\ln\left((a_n)^n\right)=\ln(a_n+1)$

signifie $(a_n)^n=a_n+1$ .

Ainsi $a_n$ est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

**c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+1)=2$.

## Exercice 4 :

**De quoi s'agit -il ?**

- **Lecture graphique**
- **Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle**
- **Modélisation**

**1)** **a)** $f(0) = 0$ ; $f'(0)=\frac{+1}{+2}=\frac{1}{2}$.

**b)** $f$ est solution de l'équation $y' = ay + b$ donc $f'(x) = a\,f(x) + b$, pour tout réel x.

d'où $f'(0) = a\ f(0) + b$ ainsi ; $b=f'(0)=\frac{1}{2}$.

**2)** **a)** f solution de l'équation : $y'=ay+\frac{1}{2}$

Donc $f'(x)=a\,f(x)+\frac{1}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Signifie $a\,f(x)=f'(x)-\frac{1}{2}$ signifie $f(x)=\frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)$ car $a\neq0$.

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)$.

**b)** S est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 4.

Donc $S = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{a}\left(f'(x) - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{a}\left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]_0^4$

$$= \frac{1}{a}\big(f(4) - 2 - (f(0) - 0)\big) = \frac{1}{a}\left(2 - 2e^{-1} - 2\right) = \frac{-2e^{-1}}{a}.$$

**c)** On a $S = \frac{-2e^{-1}}{a} = 8e^{-1}$ signifie $a = \frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}} = -0{,}25$.

**3)** f solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}25\,y + \frac{1}{2}$

Donc $f(x) = ce^{-0{,}25x} - \frac{\frac{1}{2}}{-0{,}25} = ce^{-0{,}25x} + 2$.

Or $f(0) = 0$ signifie $c + 2 = 0$ signifie $c = -2$

Ainsi $f(x) = 2 - 2e^{-0{,}25x}$.

**4)** **a)** $h(3) = 2 - 2e^{-0{,}25\times 3} = 2 - 2e^{-0{,}75} \simeq 1{,}05\,\text{m}$.

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

**b)** $h(t) > 1{,}98$ signifie $2 - 2e^{-0{,}5t} > 1{,}98$ signifie $2e^{-0{,}5t} < 0{,}02$ signifie $e^{-0{,}5t} < 0{,}01$

signifie $-0{,}5\,t < \ln(0{,}01)$ signifie $t > -\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}5} \simeq 18{,}42$.

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.

| | | |
|---|---|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>*****<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Épreuve : **MATHÉMATIQUES** | |
| | Section : **Sciences expérimentales** | |
| | Durée : **3 h** | Coefficient : **3** |
| SESSION **2016** | **Session principale** | |

**(Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3 )**

**Exercice 1 (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

   a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

   b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2,3,0)$ dont on déterminera le rayon.

   c) Déterminer $Q\cap S$.

3) On donne les points $A(0, 0, 1)$ ,$B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

   a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

**Exercice 2 (5 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A et B.

   b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

   a) Déterminer l'affixe c du point C.

   b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.

3) On considère le point D d'affixe $c^2$.

   a) Montrer que $OD=5$.

   b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.

On désigne par $z_1$ la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par $z_2$ l'autre solution.

5) Soit les points I, $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $1$, $z_1$ et $z_2$.

a) Justifier que le point $M_1$ est le milieu du segment $[IC]$.

b) Montrer que le quadrilatère $OCM_1M_2$ est un parallélogramme.

c) Construire les points $M_1$ et $M_2$.

**Exercice 3 (6,5 points)**

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta$ d'équation $y=-x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) pour $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Soit $x>0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarquant que $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $u_3$.

2) a) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq 1-\dfrac{1}{n+1}$.



d) En déduire que $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell$ et que $0{,}7<\ell\leq 1$.

**Exercice 4 (3,5 points)**

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

| Année | 1990 | 1993 | 1996 | 1999 | 2002 | 2005 | 2008 | 2011 | 2014 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Taux $y_i$ | 37,3 | 32,3 | 29,7 | 24,2 | 22,1 | 20,3 | 18,4 | 16,4 | 16,3 |

Source : INS 03-02-2016

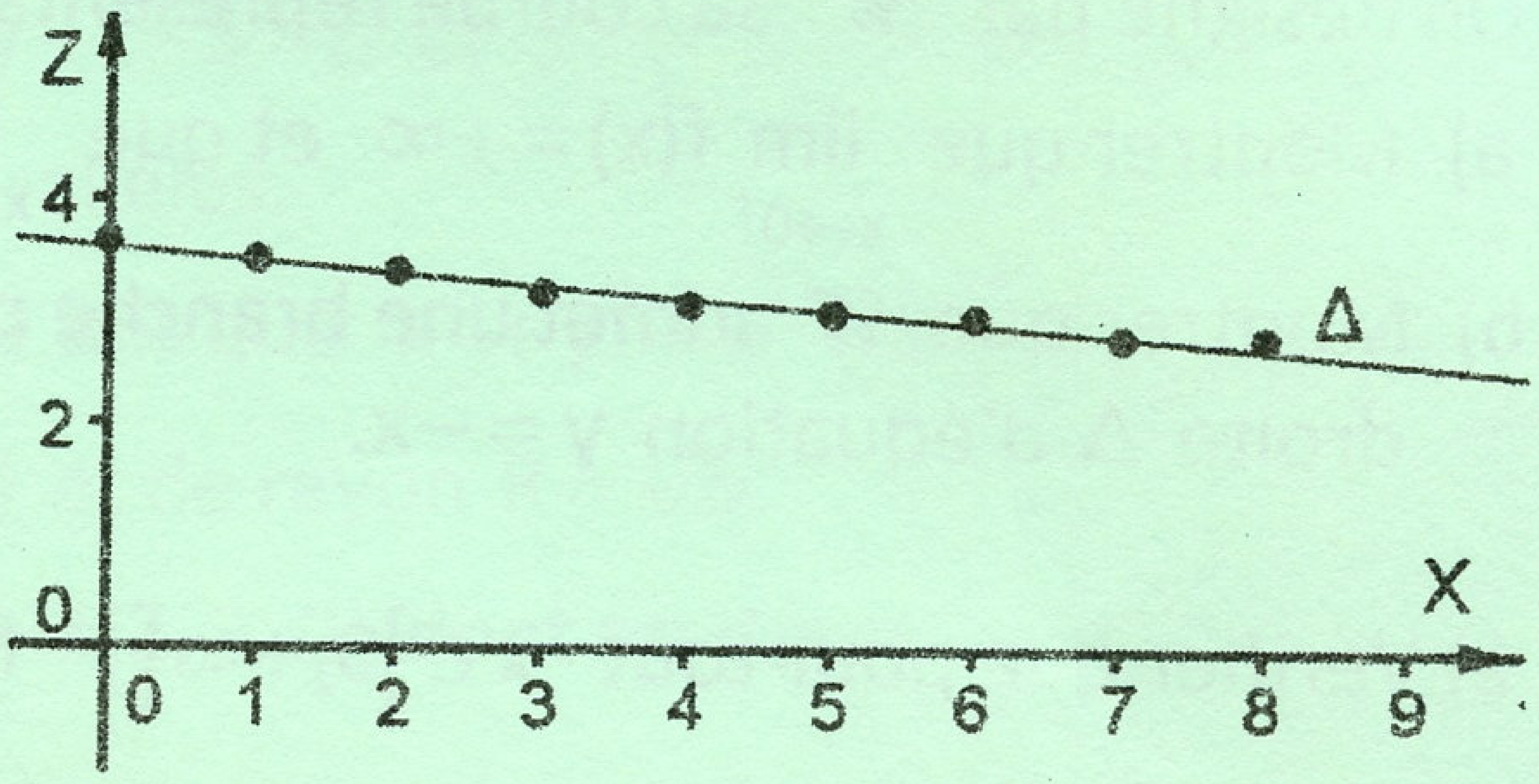
1) a) Déterminer, à $10^{-2}$ près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X. (les coefficients seront arrondis au centième).

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose $Z = \ln(Y)$.

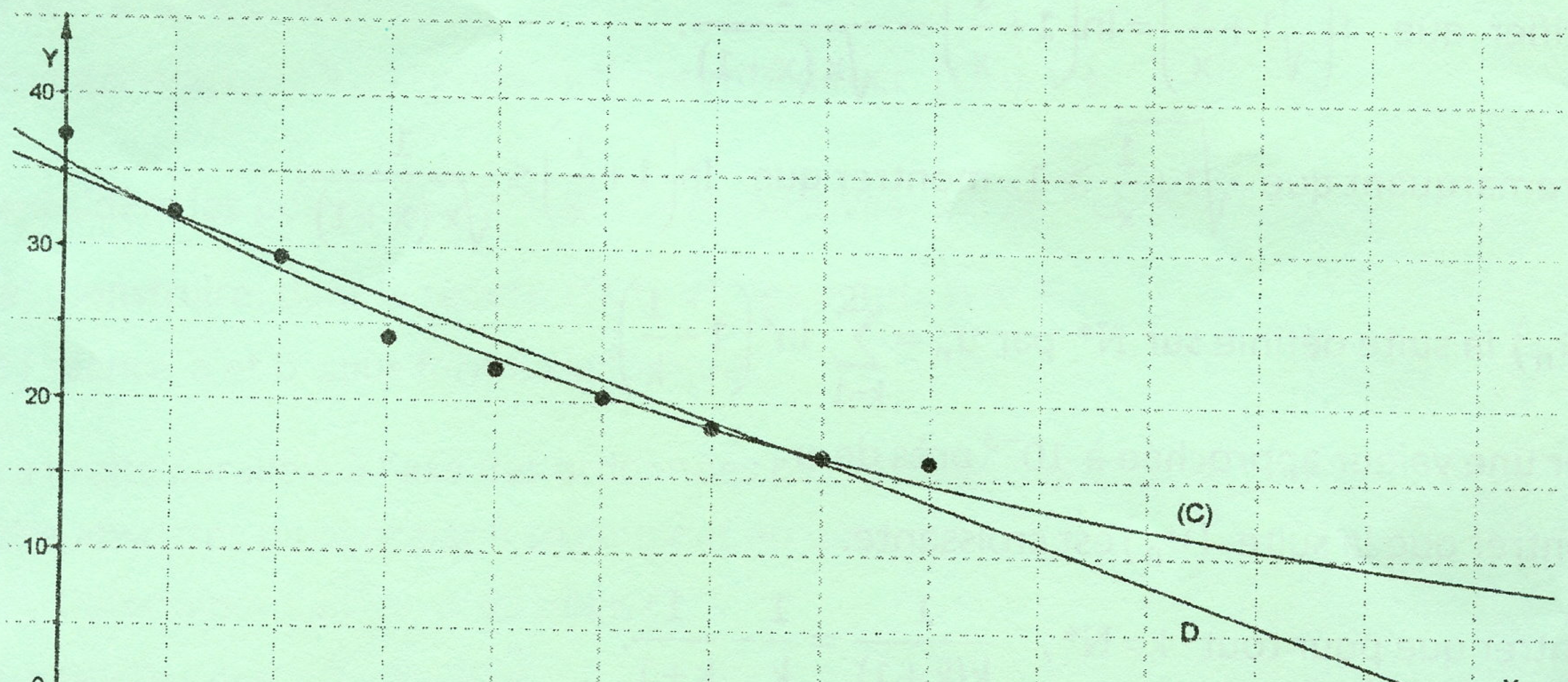
Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X, Z) et la droite de régression $\Delta$ de Z en X dont une équation est $z = -0{,}11x + 3{,}57$.




a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y = 35{,}52\,e^{-0{,}11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1) b), la courbe (C) d'équation $y = 35{,}52\,e^{-0{,}11x}$ et le nuage de points de la série (X, Y).




Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ? Justifier la réponse.

**Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat**

**Section : Sciences expérimentales**

**Session principale 2016**

**Exercice 1**

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5 \neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$ Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}.$

b) $d(I,P) = \sqrt{3} < R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$

et puisque $J \in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q) = 3\sqrt{3} > R$, on en déduit que $S \cap Q = \varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

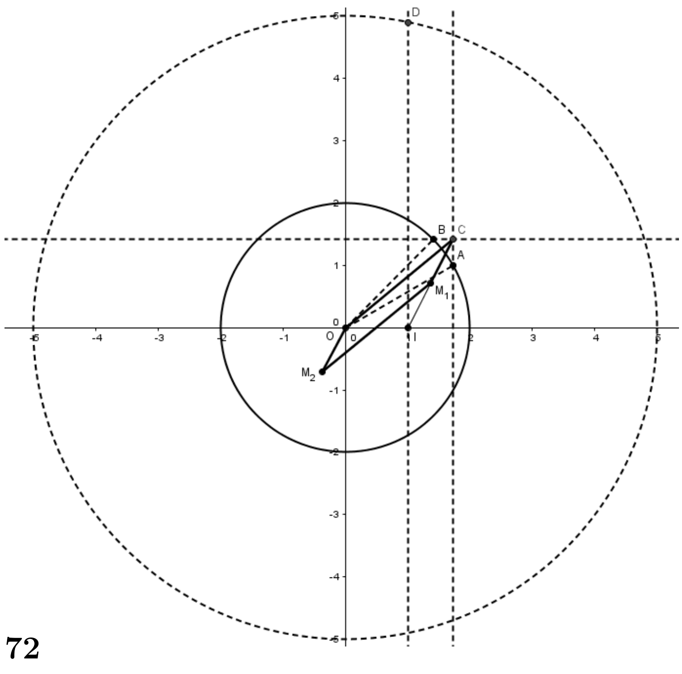
b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x + y - z + 1)$.

4) $\begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|2(x + y - z + 1)\right| = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x + y - z - 5 = 0 \text{ ou } x + y - z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathscr{C}.$

**Exercice 2**




1) a) Voir figure.

b) $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$

2) a) $\begin{cases} \mathrm{Re}(c) = \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(c) = \mathrm{Im}(b) \end{cases}$,

on en déduit que $c = \sqrt{3} + i\sqrt{2}.$

b) $c^2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 + 2\sqrt{6}i = 1 + 2i\sqrt{6}.$

3) a) $OD = \left|c^2\right| = \sqrt{1 + 24} = 5.$

b) D'une part $OD = 5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part

$\mathrm{Re}\left(c^2\right)=1$ donc D appartient à la droite

d'équation $x=1$ d'où la construction de D.

(En tenant compte de $\mathrm{Im}\left(c^2\right)>0$ )

4) $\Delta=4+8i\sqrt{6}=4c^2$. Soit $\delta=2c$.

$z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$.

5) a) $z_1=\dfrac{1+c}{2}$, il en résulte que $M_1$ est le milieu de [IC].

b) $c=z_1-z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que $OCM_1M_2$ est un parallélogramme.

c) Voir figure.

## Exercice 3

**A.**

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left(2x\ln x-x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}=-1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x+\dfrac{1}{x}=+\infty$, il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta: y=x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)=-\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^2=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

b) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[\,, f'(x)\geq 0$ de plus $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | \|\| | $+\infty$ | $\searrow$ | | $-\infty$ |

c) $f(1)=0$.

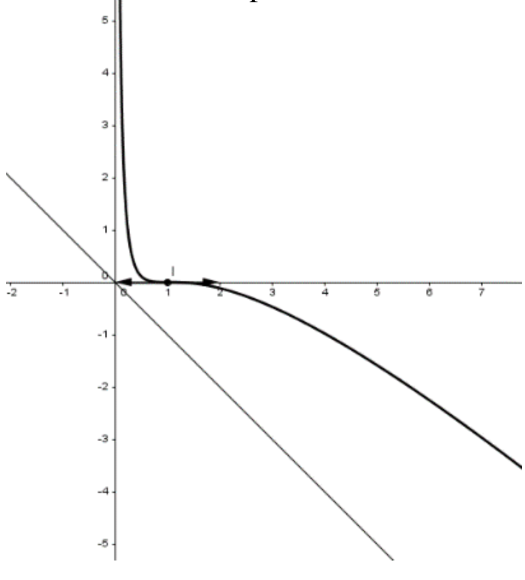
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

d) $f'(1)=0$ donc $\mathscr{C}$ admet au point $I(1,0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3) a) Voir figure.

b) $A=\displaystyle\int_1^e |f(x)|dx=-\int_1^e f(x)dx=-\left[2(x\ln x-x)-\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e$

$=\dfrac{e^2-7}{2}$ (ua).



4) a) $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) Puisque pour tout $x>0, \sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que

$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\leq 0$ ou encore $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

**B.**

1) $u_3=\sum_{k=1}^{3}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln^2 2+\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)+\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)=0,726.$

2) a) $u_{n+1}-u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ car $(1+\frac{1}{n+1}>1)$ par suite la suite $(u_n)$ est croissante.

b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$..

c) On a $\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\leq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ alors $\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Il en résulte que $u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$

d) On a $u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}<1$. La suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1 alors la suite $(u_n)$ est convergente vers un réel L.

Pour $n\geq 3,\ u_3\leq u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1}=1$ alors $0.7<0.726\leq L\leq 1$..

**<u>Exercice 4</u>**

1) a) $r=-0.97$.
b) D : y = -2.64x + 34.66.
c) Pour x = 10, on obtient y = -2,64.10 +34,66 = 8.26.

2) a) $Z=\ln y=-0.11x+3.57 \Leftrightarrow y=e^{-0.11x+3.57} \Leftrightarrow y=e^{3.57}e^{-0.11x} \Leftrightarrow y=35.52e^{-0.11x}$.
b) Pour x=10, on obtient $y = 35.52.e^{-1.1}\approx 11,82$.

3) L'allure du nuage est proche de l'allure de (C) et n'a pas l'allure d'une droite alors le deuxième ajustement est plus adapté.

| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'ÉDUCATION<br>*****<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Épreuve : **MATHÉMATIQUES** | |
|---|---|---|
| | Section : **Sciences expérimentales** | |
| | Durée : **3 h** | Coefficient : **3** |
| SESSION **2016** | **Session de contrôle** | |

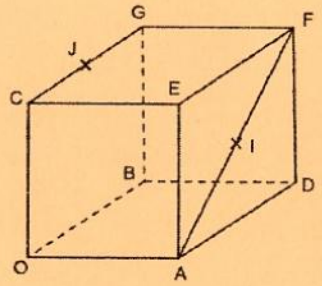
Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

## Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].




1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$.

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

## Exercice 2 (5 points)

Dans la <u>figure 1</u> de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit $\theta$ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

a) Donner, en fonction de $\theta$, l'écriture exponentielle des nombres complexes $a$, $\bar{a}$, $a^2$ et $\bar{a}^2$.

b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\bar{a}$, $a^2$ et $\bar{a}^2$.

2) a) Justifier que $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) Montrer que $a$ et $\bar{a}$ sont les solutions de l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z$,

$$z^5-1=(z-1)\left[z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right]\left[z^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z+1\right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

**Exercice 3 ( 4,5 points )**

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :
Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.
- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit $A_n$ l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{ième}}$ choix » et $p_n$ sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer $p_1$ et $p_2$.

c) Montrer que $p_3=\frac{7}{120}$ et que $p_4=\frac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de $\lambda$ et T.

b) Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\lambda$ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.

c) On prend $\lambda = 0,071$.
Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

**Exercice 4 ( 6,5 points )**

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x\in]0,1[$ et $x\in]1,+\infty[$.

c) En déduire que si $x\in]0,1[$ alors $g(x)<g(\frac{1}{x})$ et que si $x\in]1,+\infty[$ alors $g(x)>g(\frac{1}{x})$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})$.

b) Calculer $f'(1)$.

c ) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la <u>figure 2</u> de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_h)$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$.

Exprimer en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\mathscr{A}_\alpha$.

# Annexe (à rendre avec la copie)

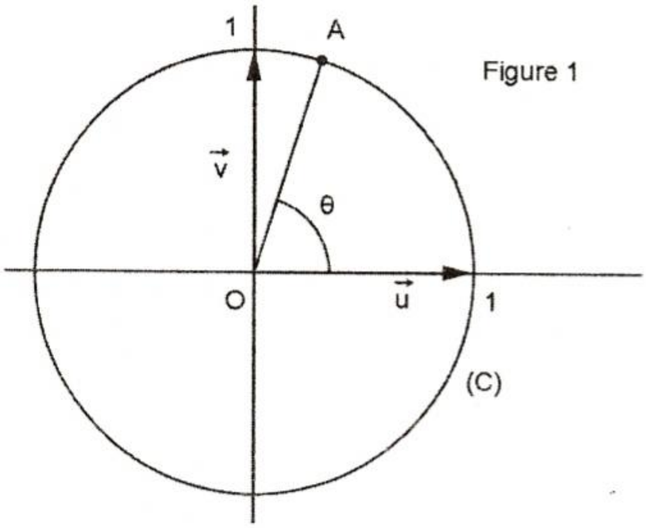



Figure 1

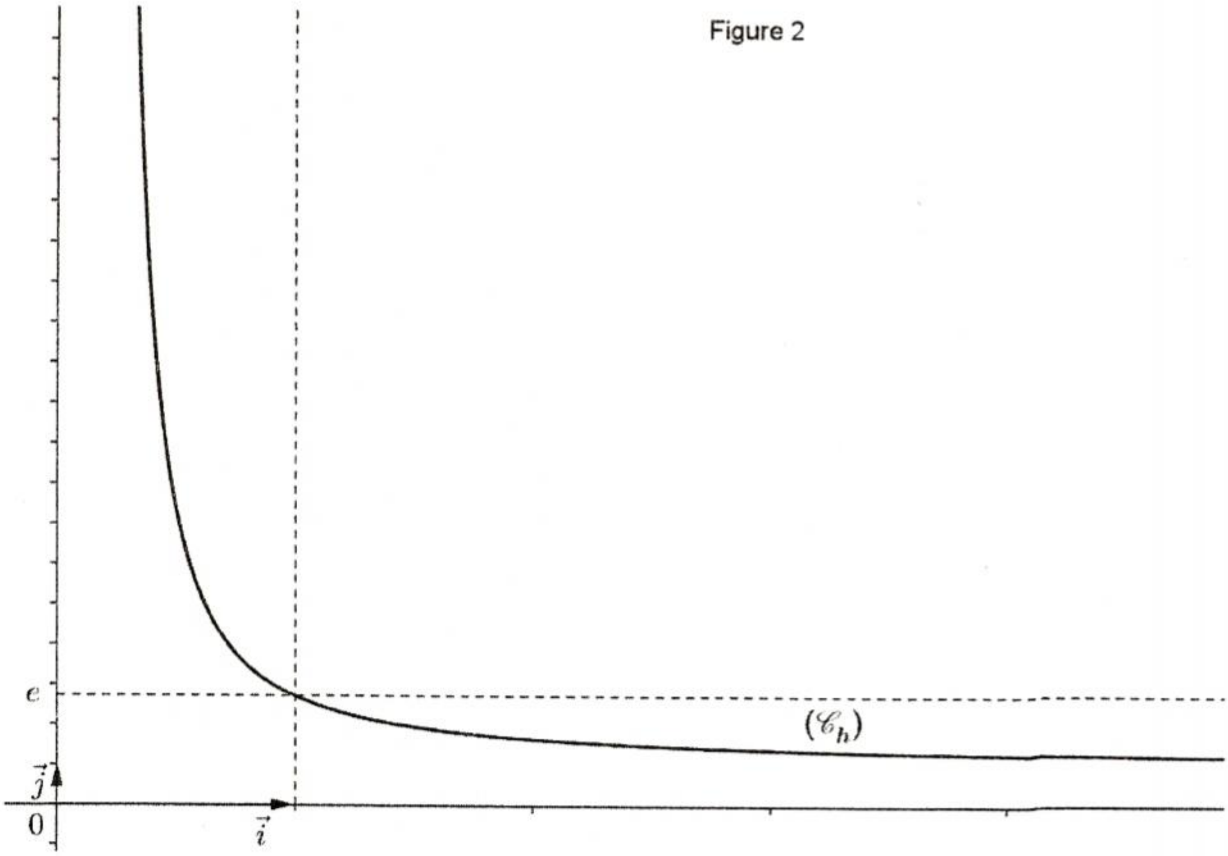



Figure 2

# Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

## Section : Sciences expérimentales

## Session de contrôle 2016

**Exercice 1**

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

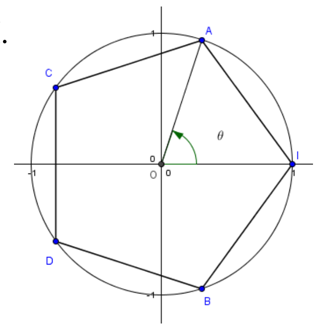
2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que $d\left(E,(OIJ)\right)=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.




**Exercice 2**

1) a) $a=e^{i\theta}$, $\bar{a}=e^{-i\theta}$, $a^2=e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2=e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a+\bar{a}=2\operatorname{Re}(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1=a^2-a\left(a+\bar{a}\right)+1=a^2-a^2-\left|a^2\right|+1=0$ ce qui prouve que a est solution de l'équation (E).

$\bar{a}^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a}+1=\overline{a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1}=0$ ce qui prouve que $\bar{a}$ est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1)\left(z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=z^5-1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5-1=(a-1)\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)\left(a^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1\right)=0$, il en résulte que

$a^5-1=0 \Leftrightarrow a^5=1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k\in\{1,2,3,4\}$.

b) $\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{5}>0\\ \sin\frac{2\pi}{5}>0\end{cases}$, $\mathrm{Im}(1)=0$, $\cos\frac{4\pi}{5}<0$, $\cos\frac{6\pi}{5}<0$ et $\sin\frac{8\pi}{5}<0$. Il en résulte que $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).

**Exercice 3**

1) a) Puisqu'il y a exactement 3 microscopes défectueux donc le premier microscope non défectueux est obtenu au plus au quatrième choix, on en déduit que $n\le 4$.

b) $p_1=\frac{7}{10}$ et $p_2=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

c) $p_3=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$ et $p_4=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}$.

2) a) Les valeurs prises par X sont $\{1,2,3,4\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{120}$ | $\frac{1}{120}$ |

b) $E(x)=\sum_{1}^{4}x_ip_i=1\times\frac{7}{10}+2\times\frac{7}{30}+3\times\frac{7}{120}+4\times\frac{1}{120}=\frac{46}{120}=\frac{23}{60}=0.38.$

3) a) $p(Y\le T)=1-e^{-\lambda T}$.

b) $p(Y\ge 5)=1-p(Y\le 5)=e^{-5\lambda}=0.7\Leftrightarrow -5\lambda=\ln 0.7\Leftrightarrow \lambda=-\frac{\ln 0.7}{5}=0.071.$

c) $p(Y\ge 10\setminus Y\ge 5)=\frac{p((Y\ge 10)\cap(Y\ge 5))}{p(Y\ge 5)}=\frac{p(Y\ge 10)}{p(Y\ge 5)}=e^{-5\times 0.071}=0.701.$

**Exercice 4**

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x\in]0,1[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$, il en résulte que $x<\frac{1}{x}$.

Si $x \in ]1,+\infty[$, $x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}>0$, il en résulte que $x>\frac{1}{x}$.

c) Si $x \in ]0,1[$, $x<\frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x \in ]1,+\infty[$, $x>\frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=+\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. La droite $x=0$ est une asymptote de $(C_f)$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$. La courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right).$

b) $f'(1)=g(1)-g(1)=0.$

c)

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ ↘ | $2e$ | ↗ $+\infty$ |

4) a) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x>0$ car $x^2-2x+2>0$, $(\Delta=-4)$. Il en résulte que $(C_f)$ est au-dessus de $(C_h)$.

b) Voir figure.

5) a) $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=\int_1^x\left(t^2-2t+2\right)e^t dt=\int_1^x\left(t^2+2t\right)e^t dt+2\int_1^x e^t dt-4\int_1^x te^t dt$

$=\left[g(t)\right]_1^x+2\left[e^t\right]_1^x-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x-e+2e^x-2e-4\int_1^x te^t dt=x^2e^x+2e^x-3e-4\int_1^x te^t dt$

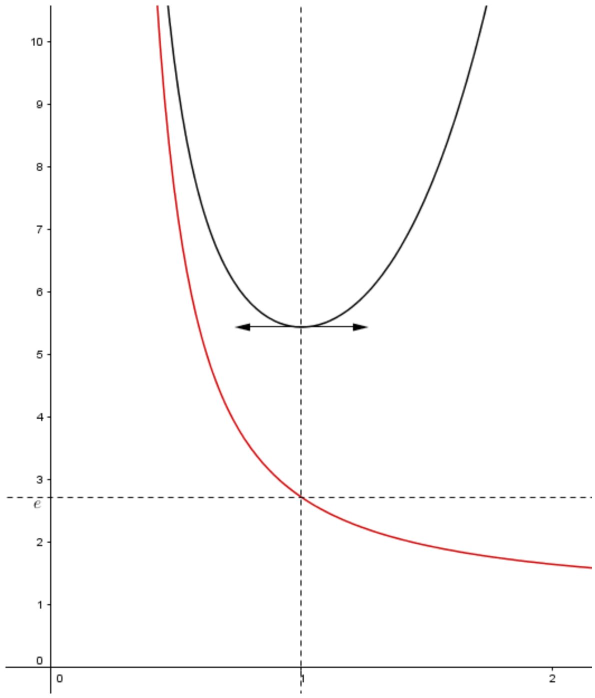
On pose $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(x)=e^t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u(x)=1\\ v(x)=e^t\end{cases}$

$\int_1^x te^t dt=\left[te^t\right]_1^x-\int_1^x e^t dt=xe^x-e-\left[e^t\right]_1^x=xe^x-e^x.$

Donc $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=x^2e^x+2e^x-3e-4\left(xe^x-e^x\right)=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e.$

b) $A_\alpha = \int_\alpha^1 \left(f(t) - h(t)\right)dt = 3e - \left(\alpha^2 - 4\alpha + 6\right)e^\alpha.$

$\lim_{\alpha \to 0^+} A_\alpha = \lim_{\alpha \to 0^+} 3e - \alpha^2 e^\alpha - 4\alpha e^\alpha + 6e^\alpha = 3e.$



| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◊◊◊◊<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION **2015** | Epreuve : **MATHEMATIQUES** |
|---|---|
| | Durée : 3 H |
| | Coefficient : 3 |
| Section : **Sciences expérimentales** | **Session principale** |

**Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

**Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.**

**Exercice 1 : (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A, B et C déterminent un plan qu'on notera (P).

b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P).

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Soit $\Delta$ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H.

Justifier qu'une représentation paramétrique de $\Delta$ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$.

4/ Soit M un point de $\Delta$.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de $\Delta$ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 2 : (5 points)**

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1/ Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{2}$.

a) Montrer que A appartient au cercle (C).

b) Placer A.

2/ On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$.

a) Montrer que le discriminant $\Delta$ de l'équation (E) est égal à $12a^2$.

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}\left[-1 + i(1-\sqrt{2})\right] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\left[1 + i(1+\sqrt{2})\right]$$

3/ On considère le point K d'affixe $z_K = i\sqrt{3}$ et on désigne par $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

a) Vérifier que K est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$.

En déduire que la droite $(M_1M_2)$ est parallèle à la droite (OA).

c) Montrer que $M_1M_2 = 6$.

d) Placer le point K et construire alors les points $M_1$ et $M_2$.

**Exercice 3: (3 points)**

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C, exprimée en $cm^3$, chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm.

| t (en cm) | 152 | 156 | 160 | 166 | 170 | 174 | 178 | 180 | 182 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C (en $cm^3$) | 3525 | 3620 | 3710 | 3850 | 3945 | 4035 | 4130 | 4175 | 4220 |

1/ a) Donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C.

b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t, C).

c) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à $10^{-2}$ près).

d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm ?

2/ En fait, la capacité vitale C (exprimée en $cm^3$) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation (R) : $C = \alpha t + \beta g + 754$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes (ne dépendant pas de t et g)

a) Donner l'expression de C pour $g = 40$.

b) En déduire, en utilisant 1/ c), les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

3/ Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant 188 cm.

**Exercice 4 : (7 points)**

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

$(x^2-1)$ et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente D parallèle à la droite $\Delta$.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de $\mathscr{C}$ et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

la droite $\Delta$ et la courbe $(\Gamma)$ d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A(\frac{1}{e},0)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

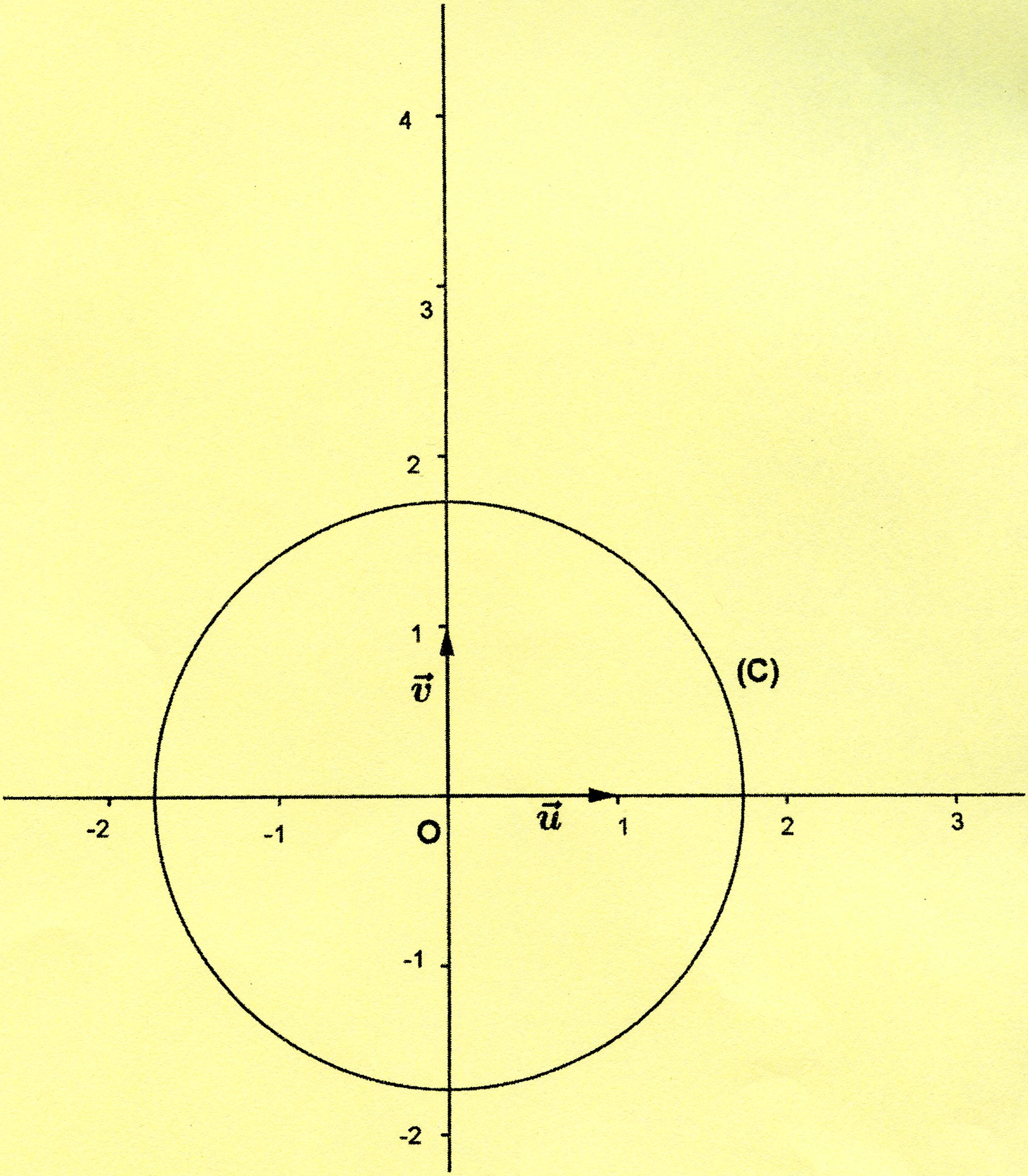
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5/ Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=e$.

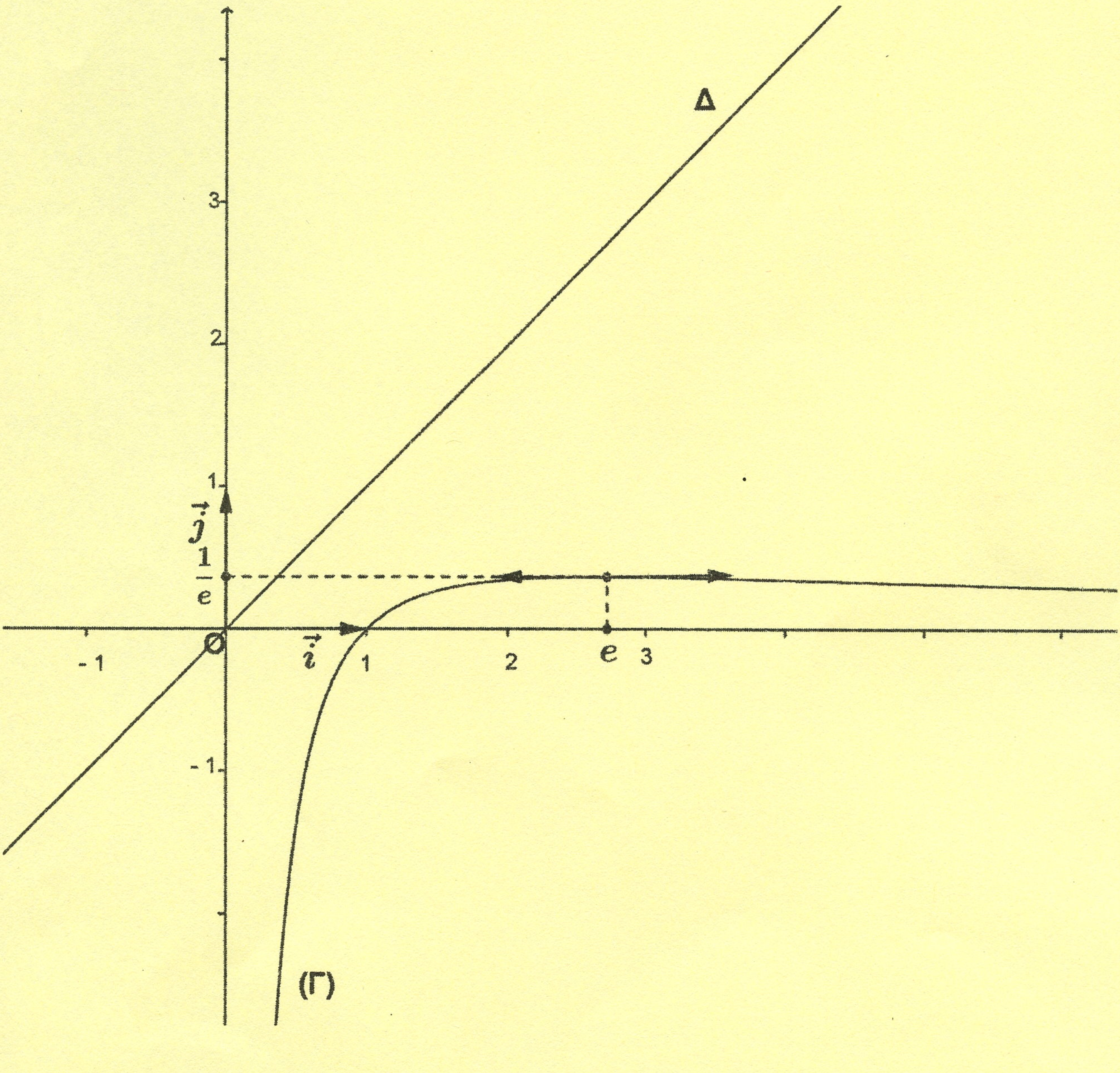
Calculer $\mathscr{A}$.

## Annexe (à rendre avec la copie)

### (Figure 1)



## (Figure 2)



# MATHÉMATIQUES

**Section : Sciences Expérimentales**

**Session principale : juin 2015**

**<u>Exercice 1</u> ( Thèmes : produit vectoriel ; droite dans l'espace ; sphère )**

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A\in(P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B\in(P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C\in(P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de $(P)$.

c) $1+1+4-2=2\neq 0$ donc $D\notin(P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H=A*B$ donc c'est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un normal à $(P)$ donc il est directeur de $\Delta$ de plus le point $H=A*B$ donc $H(1,0,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de $\Delta$ est $\begin{cases}x=1+\alpha\\y=\alpha\\z=1+\alpha\end{cases}$ ; $\alpha\in\mathbb{R}$.

4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et $\Delta$ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite $\Delta$ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de $\Delta$ donc $MA=MB=MC$.

Ou bien : $M\in\Delta$ donc $M(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$.

$\begin{cases}MA^2=\alpha^2+(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2\\MB^2=\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2\\MC^2=(\alpha+1)^2+(\alpha-1)^2+\alpha^2\end{cases}$ donc $MA=MB=MC$.

b) $I\in\Delta$ donc $I(1+\alpha,\alpha,1+\alpha)$ $IA=ID\Leftrightarrow IA^2=ID^2\Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2=(\alpha-3)^2\Leftrightarrow\alpha=1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de $\Delta$ tel que $IA=ID$.

c) Le point $I\in\Delta$, d'après a) et b), $IA=IB=IC=ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA=\sqrt{5}$.

**<u>Exercice 2</u> ( Thème : Nombres complexes)**

1/ a) $|a| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ donc $A \in (C)$.

b) Il suffit de tracer la droite d'équation $x = 1$ et de remarquer que $(\mathrm{Im}(a) > 0)$.

2/ a) $\Delta = \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + 24i\sqrt{2} = -12 + 24i\sqrt{2} = 12\left(-1+2i\sqrt{2}\right) = 12a^2$.

b) Soit $\delta = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)$.

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i-1-i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[-1+i\left(1-\sqrt{2}\right)\right].$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{3}\left[i+1+i\sqrt{2}\right] = \sqrt{3}\left[1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

3/ a) $\dfrac{z_1+z_2}{2} = i\sqrt{3} = z_K$ donc $K = M_1 * M_2$.

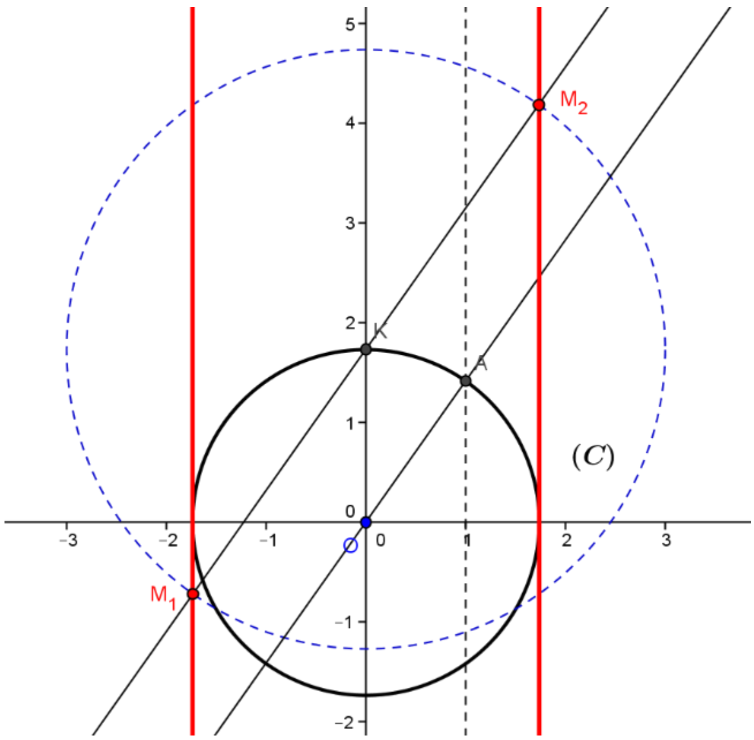
b) $$\frac{z_2 - z_1}{a} = \frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)}{\left(1+i\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(1-i\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}$ est réel donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires donc $(M_1M_2) \parallel (OA)$.

c) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{6}\right| = \sqrt{36} = 6$.

d) Les points $M_1$ et $M_2$ appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et le cercle de centre K et de rayon 3.

Ou bien : Les points $M_1$ et $M_2$ appartiennent à la droite parallèle à (OA) passant par K et les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.



**<u>Exercice 3</u> ( Thème : statistique à deux variables)**

1/ a) $r = \dfrac{\mathrm{cov}(t,C)}{\sigma_t \sigma_C} = 0.99998.$

b) $r = 0.99998$, il y a une très forte corrélation $\left(|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) $C = bt + a$ avec $b = \dfrac{\mathrm{cov}(t,C)}{\sigma_t^2} = 23.19$ et $a = \overline{C} - b\overline{t} = 1.68.$ Ainsi $C = 23.19t + 1.68.$

d) Pour $t = 188$, on obtient $C = 4361.4\ \mathrm{cm}^3$.

2/ a) $C = \alpha t + 40\beta + 745.$

b) On sait que $C = 23.19t + 1.68 = \alpha t + 40\beta + 745$ par identification $\alpha = 23.19$ et $\beta = \dfrac{1.68 - 754}{40} = -18.808.$

3/ $C = 23.19t - 18.808g + 745.$ Pour $g = 50$ et $t = 188$, on obtient $C = 4173.32\ \mathrm{cm}^3$.

**<u>Exercice 4</u> ( Thèmes : variation d'une fonction ; bijection ; notion d'aire)**

1/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite $y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$ le signe est celui de $-\ln x$

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ | \|\| | $+$ | 0 | $-$ |
| Positions | \|\| | $\mathscr{C}$ est au dessus de $\Delta$ | | $\mathscr{C}$ est en dessous de $\Delta$ |

2/ a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{(x^2 - 1) + \ln x}{x^2}.$

b) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 1$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ |
| $\ln x$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ |

c) Pour tout $x \in ]0,1[$, $f'(x) < 0.$

Pour tout $x \in ]1,+\infty[$, $f'(x) > 0.$

d) On a $f'(1) = 0$ de plus pour tout $x \in ]0,1[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in ]1,+\infty[$, $f'(x) > 0.$

Il en résulte que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0.$

e)

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | \|\| | $+\infty \searrow$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ | |

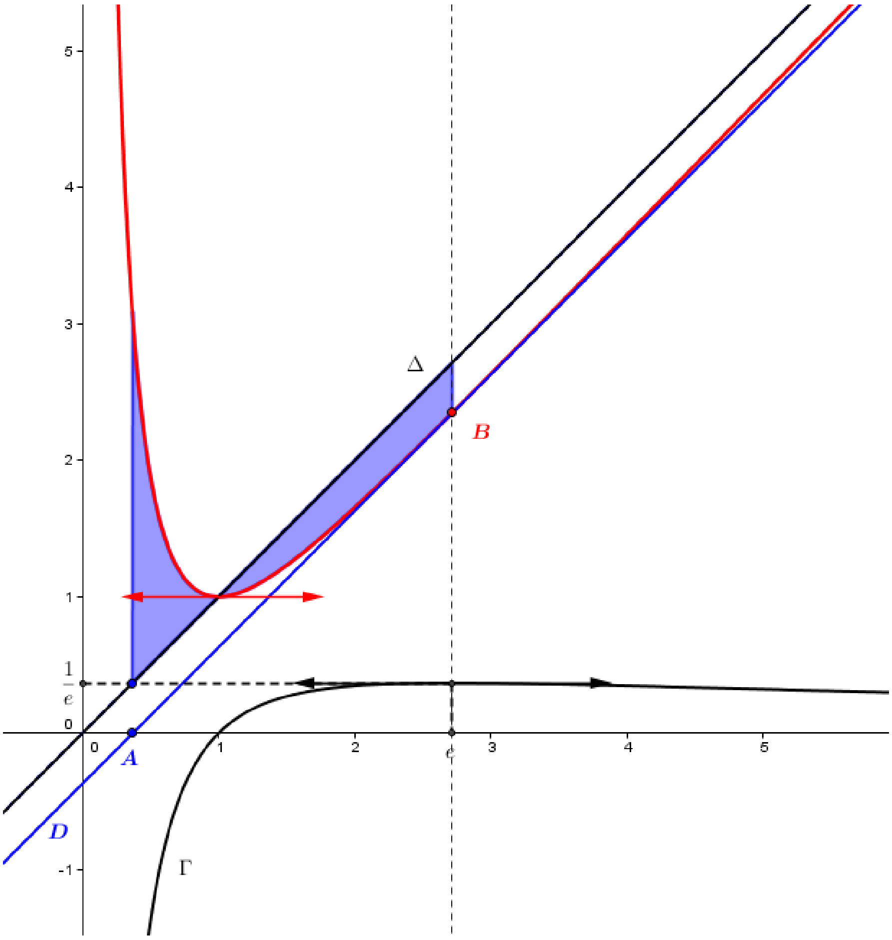
3/ a) $D \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1 \\ ]0,+\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ ]0,+\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow x = e$. On en déduit qu'il existe une unique tangente D à $\mathscr{C}$ au point $B\left(e, e-\frac{1}{e}\right)$.

b) $D : y = f'(e)(x-e) + f(e) = x - \frac{1}{e}$.

4/ a) $D : y = x - \frac{1}{e}$. Pour $x = \frac{1}{e}$, $y = 0$ donc $A \in D$.

b) $D \parallel \Delta$ et passe par A.

c)




5/ $A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x) - x|\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$

$$= \left[ -\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{1}^{e} = 1 \text{ua.}$$

| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◇◇◇◇<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION **2015** | Épreuve : **MATHEMATIQUES**<br>Durée : 3 H<br>Coefficient : 3 |
|---|---|
| Section : **Sciences expérimentales** | **Session de contrôle** |

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

## Exercice 1 : (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2/ Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$.

a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que $AJ=6$.

4/ Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

## Exercice 2 : (5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-4e^{i\frac{\pi}{3}}z+e^{2i\frac{\pi}{3}}=0$.

1/ a) Montrer que le discriminant $\Delta$ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Résoudre l'équation (E) .On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans l'annexe ci-jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1+i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

a) Écrire $z_I$ sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B tels que $OA < OB$.

Placer A et B, puis justifier que $OA = 2-\sqrt{3}$ et $OB = 2+\sqrt{3}$.

c) En déduire que les affixes respectives $z_A$ et $z_B$ des points A et B sont les solutions de l'équation (E).

**<u>Exercice 3</u> : (6 points)**

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$..

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f et par $\Delta$ la droite d'équation $y = 2x$.

a) Vérifier que $\Delta$ est la tangente à $C_f$ en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que $C_f$ admet une direction asymptotique qui est celle de la droite $\Delta$.

c) Étudier la position relative de $C_f$ et $\Delta$.

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe $C_f$.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite $\Delta$, la courbe $C_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A} = e - 2$.

**Exercice 4 : (4 points)**

1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

a) Calculer $u_1$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ..... + u_n$.

Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2/ En étudiant les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, montrer que

$$1 + x \leq e^x \text{, pour tout réel } x.$$

3/ Soit $(v_n)$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = (1+u_0)(1+u_1)\times .... \times(1+u_n).$$

a) Calculer $v_0$ et $v_1$.

b) Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente.

e) Soit $\ell$ la limite de $(v_n)$.

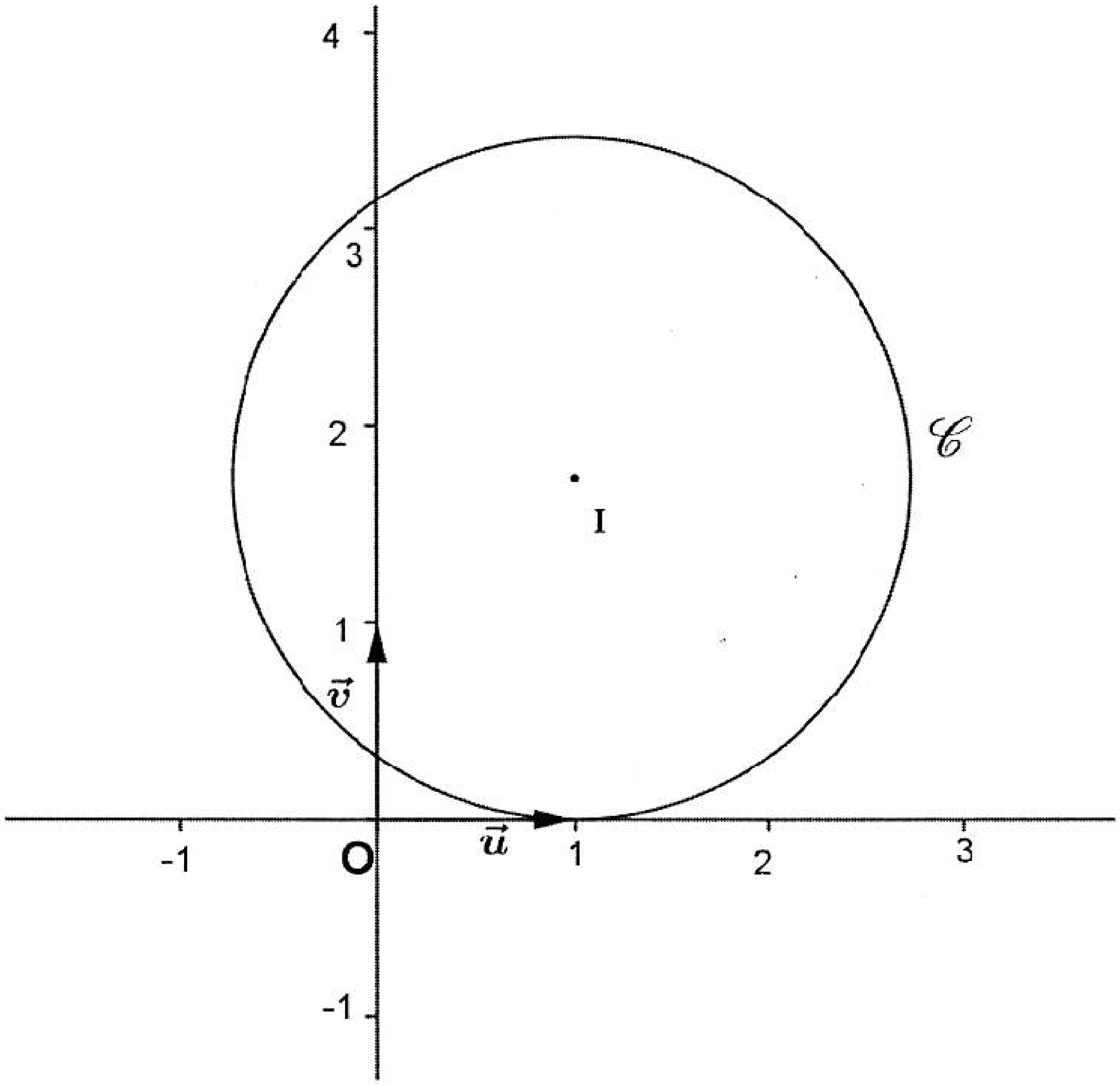
Montrer que $1 < \ell \leq \sqrt{e}$.

Section : ……………………… N° d'inscription : ………………… Série : …………
Nom et prénom : ……………………………………………………………………………
Date et lieu de naissance : ………………………………………………………………

Signatures des surveillants
………………
………………

Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

## Annexe (à rendre avec la copie)



# MATHÉMATIQUES

**Section : Sciences Expérimentales**
**Session de contrôle : juin 2015**

**Exercice 1 (5 points)**

1/ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25.$ Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $R=5$ .

2/ a) $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$. $M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0 \Leftrightarrow 2x-2y--z+5=0.$ Il en résulte que (P) est le plan d'équation $2x-2y--z+5=0.$

b) $d(I,P)=\dfrac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J\in(P)$ et $\overrightarrow{JI}$ est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{JI}$ par suite les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, d'où $A\in(IJ)$.

b) $AJ=\sqrt{16+16+4}=6.$

4/ a) On sait que $\begin{cases}A\in(IJ)\\(IJ)\perp(P)\text{ en }J\\M\in(C)\subset(P)\end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM=\sqrt{AJ^2+JM^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}.$

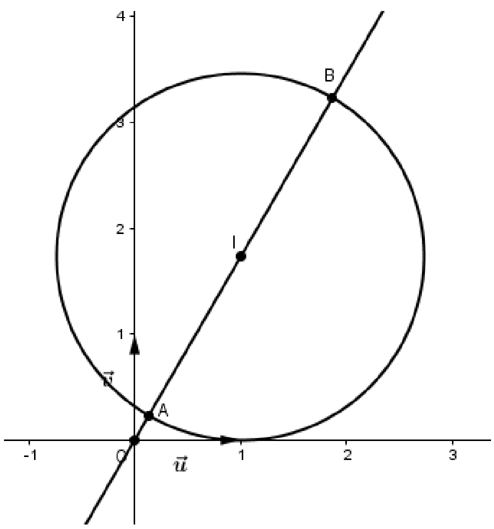
**c)** Pour tout M du cercle (C), $AM=2\sqrt{13}$ donc $M\in(S')$, il en résulte que $(C)\subset(S')$ et puisque $(C)\subset(P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

**Exercice 2 (5 points)**

1/ a) $\Delta=\left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-4e^{i\frac{2\pi}{3}}=12e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2.$

b) Soit $\delta=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.$

$z'=\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}=\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$



$$z'' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2/ a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

b) $OA = OI - IA = 2-\sqrt{3}.$
$OB = OI + IB = 2+\sqrt{3}.$

c) $|z_A| = OA = 2-\sqrt{3}$ et $\arg(z_A) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$

Il en résulte que $z_A = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$

$|z_B| = OB = 2+\sqrt{3}$ et $\arg(z_B) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$

Il en résulte que $z_B = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$

**Exercice 3 (6 points)**

1/ a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$ le signe est celui de $x-1$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | \|\| | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

b) $g(1) = 1$. La fonction g admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 1 égal à 1, il en résulte que pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty.$

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = 2-2\frac{\ln x}{x} = 2\frac{(x-\ln x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}.$$

c)

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3/ a) Soit T la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1, alors T à pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x$.

Il en résulte que $\Delta$ est la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-(\ln x)^2\right] = +\infty \end{cases}$ . On en déduit que $C_f$ admet une direction asymptotique qui est celle de la droite $\Delta$.

c) Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $f(x) - 2x = \left[-(\ln x)^2\right] \leq 0$ donc $C_f$ est au-dessous de la droite $\Delta$ et le point de coordonnées $(1,2)$ est un point d'intersection.

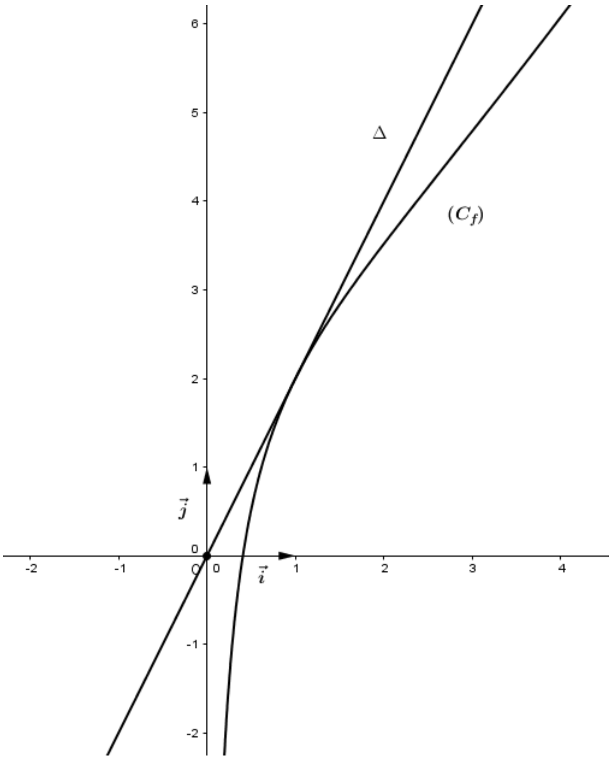
4/ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{4}\right) \simeq -1.4 < 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0.5 > 0 \end{cases}$ . Il en résulte que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b)




c) $A = \int_1^e |f(x) - 2x|\, dx = \int_1^e (\ln x)^2\, dx.$

On pose $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$A = \left[ x(\ln x)^2 \right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2\left[ x\ln x - x \right]_1^e = (e-2)\text{ua}.$$

**Exercice 4 (4 points)**

1/ a) $u_1 = qu_0 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

b) La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c) $S_n$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc

$$S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

2/ La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

$h(0) = 0$. La fonction h admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 0 égal à 0, il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$, on en déduit que $e^x \geq x + 1$.

3/ a) $v_0 = 1 + u_0 = \frac{4}{3}$ et $v_1 = (1+u_0)(1+u_1) = \frac{40}{27}$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = (1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1}) - (1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$

$$= (1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1}-1) = (1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)u_{n+1} > 0$$

car $u_n = q^n u_0 = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$ pour tout entier naturel n.

Ainsi la suite $(v_n)$ est croissante.

c) D'après 2/ on a pour tout entier k, $1 + u_k \leq e^{u_k}$.

Pour $k = 0$, $0 < 1 + u_0 \leq e^{u_0}$

Pour $k = 1$, $0 < 1 + u_1 \leq e^{u_1}$

.

.

.

Pour $k = n$, $0 < 1 + u_n \leq e^{u_n}$

En multipliant membre à membre, on obtient $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n) \le e^{u_0+u_1+....u_n}$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $v_n \le e^{S_n} = e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) La suite $(v_n)$ est croissante et pour tout entier naturel n, $v_n \le e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)} \le e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ car $0 < 1 - \dfrac{1}{3^{n+1}} < 1$

donc elle est majorée par $\sqrt{e}$, il en résulte qu'elle est convergente.

e) On sait que $v_n \le \sqrt{e}$ de plus la suite $(v_n)$ est croissante donc $v_n \ge v_0 = \dfrac{4}{3} > 1$, ainsi $1 < v_n \le \sqrt{e}$ et puisque $(v_n)$ est convergente vers l et par passage à la limite, on obtient $1 \le v_n \le \sqrt{e}$.